١١

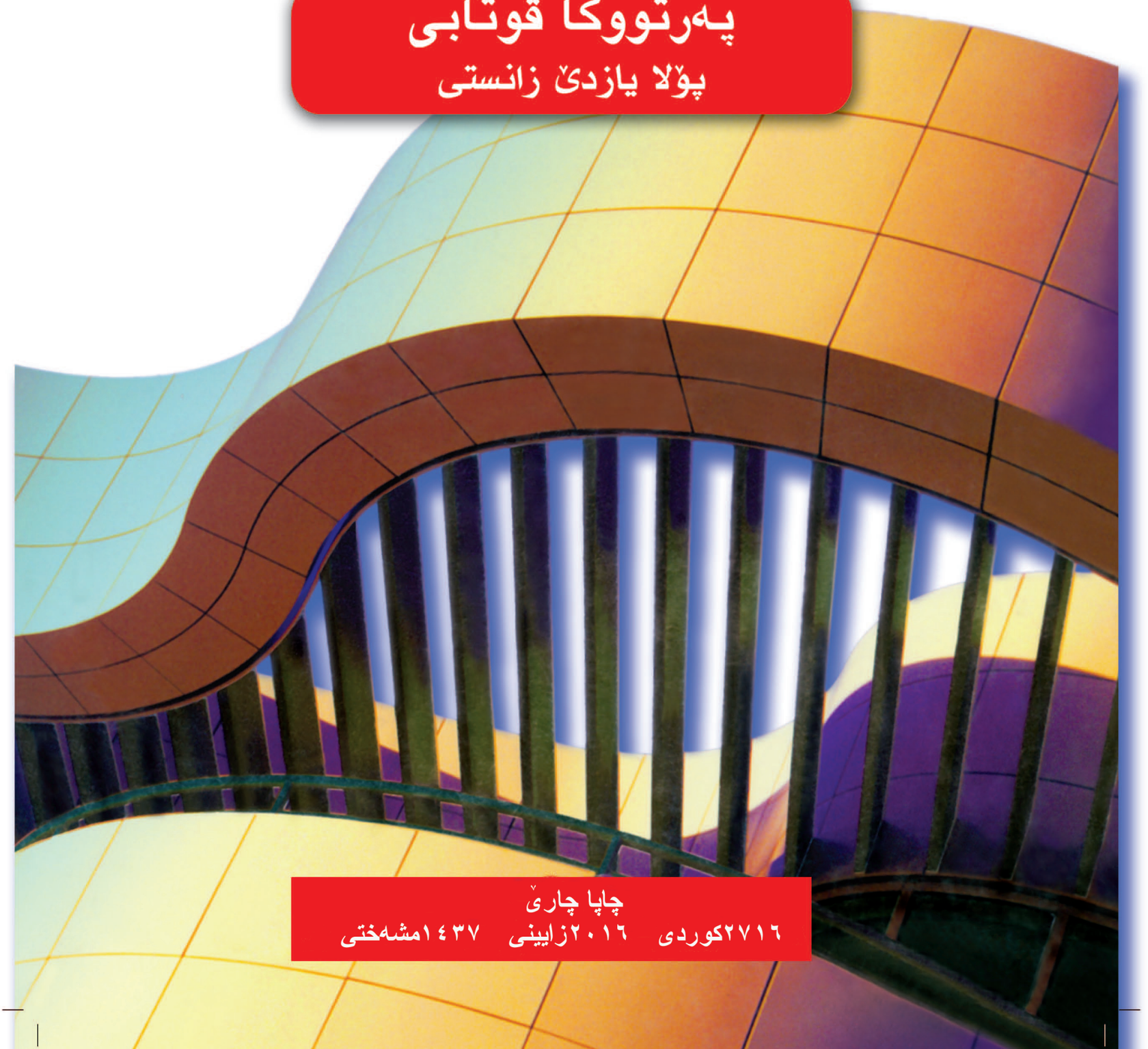
حکومەتا هەرێما کوردستانێ

وەزارەتا پەروەردێ - رێڤەبەریا گشتی یا پرۆگرام و چاپەمەنیان

بیرکاری بۆ هەمووان

پەرتووکا قوتابی

پۆلا یازدێ زانستی



چاپا چارێ

٢٧١٦کوردی ٢٠١٦زایینی ١٤٣٧مشەختی

هەڵسەنگاندنا زانستی
الیاس حیدر الیاس

وەرگێڕان و گونجاندن
شکری حسن سلو
عصام الدین عبید عمر
مشیر الیاس عبدالله

پێداچوونا چاپکرنێ
شکری حسن سلو

پێداچوونا زمانی
طه یاسین طه

سەرپەرشتێ هونەری یێ چاپێ
عثمان پیرداود کواز
سعد محمد شریف صالح

بەشی 1

Geometry ئەندازە

ئەرێ تو یێ ئامادەی؟ Are You Ready? 3

ڕێبەرێ خواندنێ: لێنێرینە بۆ بەشی Study Guide: Preview 4

بیرکاری ب خواندن و نڤیسین Reading and Writing Math 5

1–1 بۆشایێ پۆتانێ 3D Coordinate System 6

بەرپەڕێ تەکنۆلۆژیا: چێکرنا چەند لایێن ڕێك

Constructing regular polygons 12

2–1 چەند لا Polygons 14

3–1 هاوڕێژەیا ئەندازەی Dilation 21

4–1 ئاراستەبر Vectors 27

ئەزموونا نیڤا بەشی (وانەیێن 1–4) Quiz 36

5–1 ڕووبەرێ بازن و چەند لایێن ڕێك

Area of Circles and Regular Polygons 37

6–1 هندەك ژ یاسایێن بۆشایێ Formulas in Three Dimensions 43

7–1 گۆ Sphere 51

8–1 کەرتێن بازنەیی وکڤانە Sectors and Arcs 59

ڕێبەرێ خواندنێ: پێداچوون Study Guide: Review 65

ئەزموونا بەشی Chapter Test 67

ئەزموونا کەلۆکی Cumulative Assessment 68

بەشی 2

سیستەمێن هاوکێشە و لاسەنگەیێن هێڵی

Systems of Linear Equations and Inequalities

ئەرێ تو یێ ئامادەی؟ Are You Ready? 71

پێبەرێ خواندنێ: لێنێرینەك بۆ بەشی Study Guide: Preview 72

بیرکاری ب خواندن و نڤیسین Reading and Writing Math 73

2–1 لاسەنگەیێن هێڵی ب دوو نەزانراوان Linear Inequalities in 2 Unknowns 74

2–2 سامپلێن هێڵی Linear Models 83

2–3 سیستەمێن لاسەنگەیێن هێڵی Systems of Linear Inequalities 92

2–4 پرۆگرامێ هێڵی Linear Programming 98

ئەزموونا نیڤا بەشی (وانەیێن 1–4) Quiz 106

2–5 شیکارکرنا سیستەمێ هێڵی ب سێ نەزانراوان
Solving Linear Systems in 3 Unknowns 107

2–6 پێڤەرێن ئامارەی Statistical Measurements 115

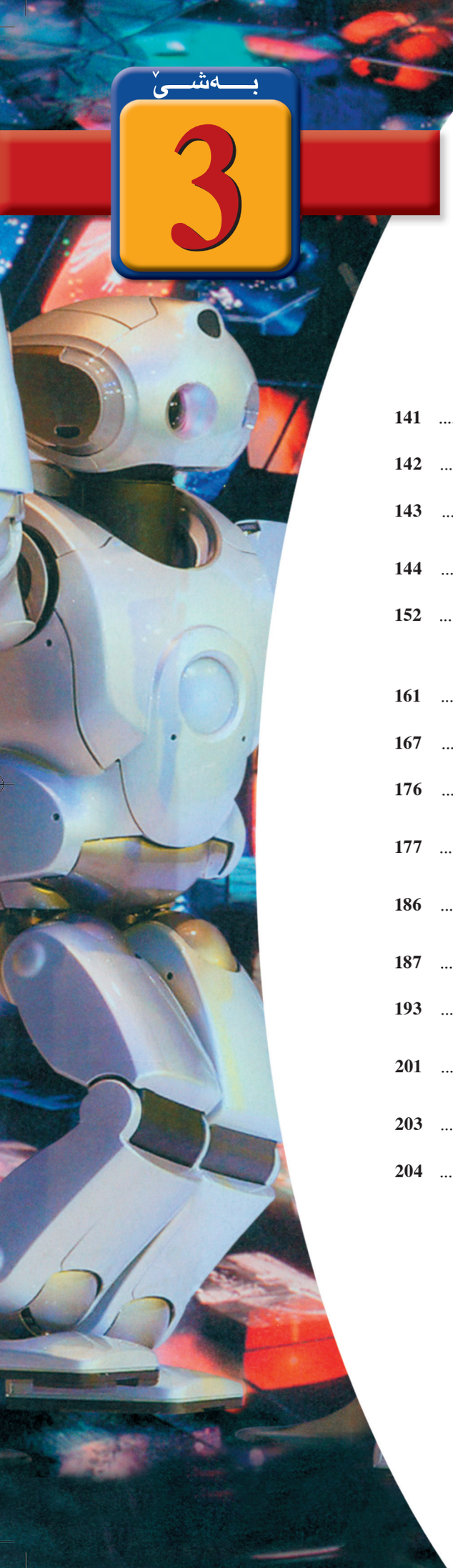
بەریەڕ تەکنۆلۆژیا: خرڤەکرنا پێداییان ب شێوێ تاقیکرنێ
Collecting Experimental Data 124

2–7 بەلاڤکرنا ڕادەداریێ دووانی «ڤەکریێ ڕادەداریێ دووانی»
Binomial Distributions 125

پێبەرێ خواندنێ: پێداچوون Study Guide: Review 135

ئەزموونا بەشی Chapter Test 137

ئەزموونا کەلۆکی Cumulative Assessment 138



بەشی 3

ڕێزکری (ڕێزکراو) Matrices

ئەرێ تو یێ ئامادەی؟ Are You Ready? 141

ڕێبەرێ خواندنێ: لێنێرینە بۆ بەشی Study Guide: Preview 142

بیرکاری ب خواندن و نڤیسین Reading and Writing Math 143

1–3 ڕێزکری Matrices 144

2–3 لێکدانا ڕێزکریان Multiplying Matrices 152

3–3 ڕێزکری و جهگوهۆڕکێن ئەندازەیی Matrices and Geometrical Transformations 161

4–3 سنوردار و ڕێسایا گرامر Determinants and Cramer's Rule 167

ئەزموونا نیڤا بەشی (وانەیێن 1–4) Quiz 176

5–3 هەلگەراوێ ڕێزکریان Matrix Inverse 177

بەرپەڕ تەکنۆلۆژیا: شیکارکرنا سیستەمێ هێلی بکارئینانا بەرنامەیێ Excel 186

6–3 ژمارەیێن ئاوێتە Complex Numbers 187

7–3 کردار لسەر ژمارەیێن ئاوێتە Operations with Complex Numbers 193

ڕێبەرێ خواندنێ: پێداچوون Study Guide: Review 201

ئەزموونا بەشی Chapter Test 203

ئەزموونا کەلۆکی Cumulative Assessment 204

بەشی 4

نەخشەیێن توانی و لۆگاریتمی

Exponential and Logarithmic Functions

ئەرێ تو یێ ئامادەی؟ Are You Ready? 206

ڕێبەرێ خواندنێ: لێنێرینەك بۆ بەشی Study Guide: Preview 208

بیرکاری ب خواندن و نڤیسین Reading and Writing Math 209

1–4 نەخشەیێن توانی ، گەشەبوون و نزمبوون
Exponential Functions, Growth and Decay 210

بەرپەر تەکنۆلۆژیا: دیارکرنا بەرۆڤاژیا نەخشەیان

Explore Inverses of Functions 218

2–4 بەروڤاژیا نەخشەی Inverse Function 219

3–4 نەخشەیێن لۆگاریتمی Logarithmic Functions 226

ئەزموونا نیڤا بەشی (وانەیێن 1–3) Quiz 233

4–4 سیفەتێن لۆگاریتمێ Properties of Logarithm 234

5–4 لۆگاریتما سروشتی Natural Logarithm 242

6–4 هاوکێشە و لاسەنگەیێن توانی و لۆگاریتمی
Exponential and Logarithmic Equations and Inequalities 249

7–4 سامپلێن توانی و لۆگاریتمی Exponential and Logarithmic Models 256

ڕێبەرێ خواندنێ: پێداچوون Study Guide: Review 263

ئەزموونا بەشی Chapter Test 265

ئەزموونا کەلۆکی Cumulative Assessment 266

بەشی 5

سیفەتێن نەخشەیان

Properties of Functions

ئەرێ تو یێ ئامادەی؟ Are You Ready? 269

رێبەرێ خواندنێ: لێنێرینەك بۆ بەشی Study Guide: Preview 270

بیرکاری ب خواندن و نڤیسین Reading and Writing Math 271

1–5 نەخشەیێن ڕێسا پلەدار Piecewise Functions 272

بەرپەڕ تەکنۆلۆژیا: هەژمارتنا جیاوازی و ڕێژەیان 282

2–5 جهگوهۆڕکیا نەخشەیان Transforming Functions 283

ئەزموونا نیڤا بەشی (وانەیێن 1–2) Quiz 291

3–5 کردار لسەر نەخشەیان Operations with Functions 292

4–5 نموونەیێن بیرکاریێ Mathematical Models 299

رێبەرێ خواندنێ: پێداچوون Study Guide: Review 308

ئەزموونا بەشی Chapter Test 310

ئەزموونا کەلۆکی Cumulative Assessment 311

بەشی 6

ئێك لدویڤ ئێك و زنجیرە

Sequences and Series

ئەرێ تو یێ ئامادەی Are You Ready? 314

ڕێبەرێ خواندنێ: لێنێرینەك بۆ بەشی Study Guide: Preview 315

بیرکاری ب خواندن و نڤیسین Reading and Writing Math 316

1–6 دەروازەیەك بۆ ئێك لدویڤ ئێکان Introduction to Sequences 317

2–6 زنجیرە Series 324

3–6 ئێك لدویڤ ئێك و زنجیرەییێن ژمارەی Arithmetic Sequences and Series 332

ئەزموونا نیڤا بەشی (وانەییێن 1–3) Quiz 341

4–6 ئێك لدویڤ ئێك و زنجیرەییێن ئەندازەیی Geometric Sequences and Series 342

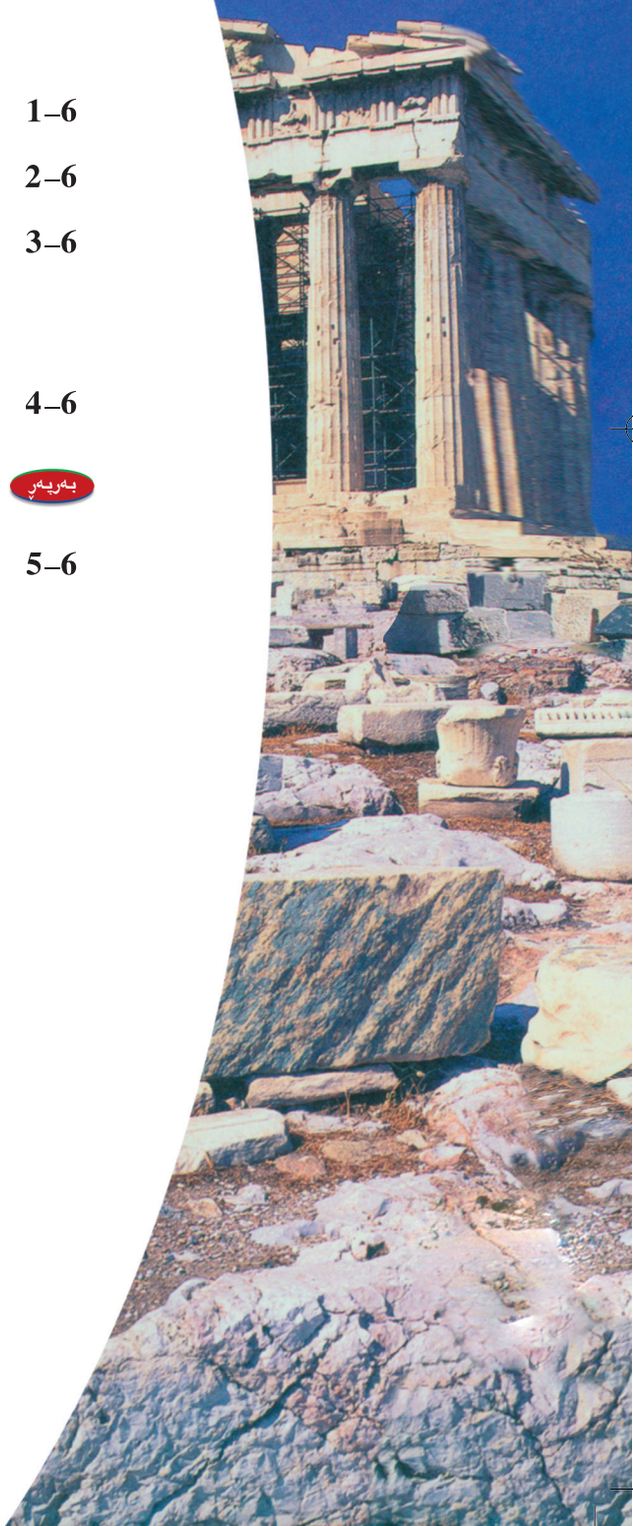
بەرپەڕ تەکنۆلۆژیا: دیارکرنا زنجیرەییێن ئەندازەیی ییێن بێ دوماهی 351

5–6 دەرئەنجامێ بیرکاریێ Mathematical Induction 352

ڕێبەرێ خواندنێ: پێداچوون Study Guide: Review 360

ئەزموونا بەشی Chapter Test 362

ئەزموونا کەلۆکی Cumulative Assessment 363



بەشی 7

سێگۆشەزانی
Trigonometry

ئەرێ تو یێ ئامادەی؟ Are You Ready? 366

ڕێبەرێ خواندنێ: لێنێرینە بۆ بەشی Study Guide: Preview 367

بیرکاری ب خواندن و نڤیسین Reading and Writing Math 368

1–7 یاسایا ساین و یاسایا کۆساین Law of Sine and Law of Cosine 369

2–7 نەخشەیێن سێگۆشەیی Trigonometric Functions 377

بەرپەڕ تەکنۆلۆژیا: هاوئەنجامێن سێگۆشەیی ب وێنەیێ ڕوونکرنێ 358

3–7 هاوئەنجامێن سێگۆشەیی یێن بنەڕەت
Fundamental Trigonometric Identities 386

ئەزموونا نیڤا بەشی (وانەیێن 1–3) Quiz 392

4–7 هاوئەنجامێن سەرجەم و جیاوازیێ Sum and Difference Identities 393

5–7 هاوئەنجامێن دوو جارانی گۆشەیێ و نیڤ جارانی گۆشەیێ
Double-Angle and Half-Angle Identities 399

ڕێبەرێ خواندنێ: پێداچوون Study Guide: Review 406

ئەزموونا بەشی Chapter Test 408

ئەزموونا کەلۆکی Cumulative Assessment 409

بەشێ 1

ئەندازە

Geometry

بەشێ ئێکێ

وانە

1–1 بۆشایێ پۆتانی

بەرپەڕێ تەکنۆلۆژیا

2–1 چەندلا

3–1 مەزنکرن و بچووکرن

4–1 ئاڕاستەبڕ

ئەزموونا نیڤا بەشی

5–1 ڕووبەرێ بازنێ و چەندلایێن ڕێك

6–1 هندەك ژ یاسایێن بۆشایێ

7–1 گۆ

8–1 کەرتێن بازنەی

تەنێن زێرین

وێنە ژمارەیەکا شێوەیێن ڕووچوارینە دناڤ ئێکدا دیاردکەت. تو دشێی ئەڤان ڕووان بکاربینی بۆ دروستکرنا هندەك تەنێن ڕووچوارینە و هندەك تەنێن دی یێن ئەندازەیی.

ئەرێ تو یێ ئامادەی؟

زاراڤ

هەر زاراڤەکێ ل گەل پێناسا وێ یا ل ڕەخێ چەپێ هاتی گرێدە.

1. لاتەریب
2. نیڤتیرە
3. پای π
4. چێوەیێ بازنێ

أ. دووریا لدۆر بازنییە.

ب. ڕێژا چێوەیێ بازنێ بۆ تیرێ وێیە.

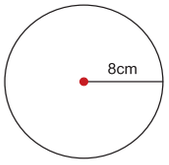
ج. هەموو لایێن وێ جووتن.

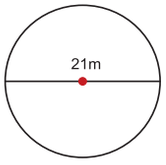
د. دووریا لناڤبەرا چەقێ بازنێ وئەو خالا دکەڤیتە سەر وێ.

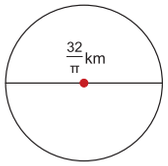
هـ. چوارلایەکە هەر لایەك ژ لایێن وێ تەریبە دگەل لایێ بەرامبەر.

چێوە و ڕووبەرێ بازنێ:

ڕووبەر و چێوەیێ هەر بازنەکا ل خوارێ بهەژمێرە:

5. 

6. 

7. 

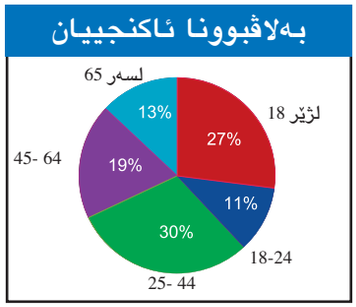
هەژمارتنا دووریێ ودیارکرنا ناڤەڕاستا پارچە ڕاستەهێلی:

دریژیا $\overline{AB}$ و پۆتانێ ناڤەڕاستا وی بهەژمێرە:

8. $A(-3, 2)$ ، $B(5, 6)$
9. $A(-4, -4)$ ، $B(2, -3)$
10. $A(0, 1)$ ، $B(-3, 4)$

بازنێن ڕوونکرنێ

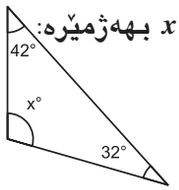
ئەڤ بازنا ڕوونکرنێ یا بەرامبەر بەلاڤبوونا ئاکنجیێن باژێرەکی ل دویڤ ژیێ وان دیاردکەت کو ژمارا وان ٤٠٠٠٠٠ کەسن.

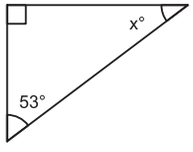


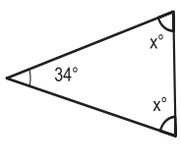
11. ژمارا وان ئاکنجیێن ژیێ وان لناڤبەرا ١٨و٢٤ سالدا چەندە؟
12. ژمارا وان ئاکنجیێن ژیێ وان کێمتر ژ ١٨ سالان چەندە؟
13. ڕێژەیا سەدی بۆ وان ئاکنجیێن ژیێ وان کێمتر ژ ٤٤ سالان چەندە؟
14. ژمارا وان ئاکنجیێن ژیێ وان زێدەتر ژ ٤٤ سالان چەندە؟

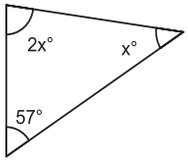
سەرجەمێ پیڤانا گۆشەیێن سێگۆشەیێ

بهایێ x بهەژمێرە:

15. 

16. 

17. 

18. 

بەشێ 1

ڕێبەرێ خواندنێ: لێنێرینەك بۆ بەشی

ل دەمێ بۆری

تە ئەڤە خواندبوون؟

- ڕووتەختێن پۆتانی.
- سێگۆشە و گۆشەیێن وان.
- جهگوهۆرکێن ئەندازەی وەکی ڕاکێشان و زڤراندن. (دەوران).
- پارچە ڕاستەهێل.
- هەژمارتنا ڕووبەر وچێوێ بازنێ.
- ڕێسایا دووریێ وپۆتانێ ناڤەڕاستێ د ڕووتەختێ پۆتانیدا.
- بکارئینانا بازنێ بۆ شیکارکرنا پرسیاران.

د ڤی بەشیدا

دێ فێری ئەڤان بی

- بۆشایێ پۆتانی.
- چەندلا و گۆشەیێن وان.
- ئەوێ جهگوهۆڕکا ئەندازەیی کو پیڤانان دگوهۆڕیت.
- پارچە ڕاستەهێلێن ئاڕاستەکری یان ئاڕاستەبڕان.
- چەند لایێن ڕێك وهەژمارتنا ڕووبەرێن وان.
- ڕێسایا دووریێ وپۆتانی ناڤەڕاستێ د بۆشایێ پۆتانیدا.
- پارچە و کەرتێن بازنەی وهەژمارتنا ڕووبەرێن وان ودرێژیا کڤانێ.

د ئایندە دا

تو دشێی شارەزاییێن ڤی بەشی بکاربینی بۆ:

- چێکرنا بنچینەیەکا بهێز بۆ خواندنا بلند.
- ڤەکۆڵینا وان کارێن پەیوەندی هەین دگەل وان بابەتێن فێردبیێ.
- شیکارکرنا ئەوان پرسیارێن پەیوەندی هەین دگەل ئەندازەیا نافخۆیی و تەلارسازیێ.
- هەژمارتنا دووریان و شرۆڤەکرنا ئەوان زانیاریێن د ڕۆژنامە و گۆڤاراندا دئێن.
- د ژیانا ڕۆژانە دا.

زاراڤ — Vocabulary

بۆشایێ پۆتانی	3D coordinate system
کومد (قۆقز)	convex
ناڤچال (قۆپاو)	concave
چەند لایێ ڕێك	regular polygon
مەزنکرن	enlargement
بچووکرن	compression
ئاڕاستەبڕ	vector
ستوونك	apothem
چەقێ بازنێ	center of the circle
چەقێ چەندلایێ ڕێك	center of a regular polygon
چەقە گۆشە	central angle
گەلەك ڕوویی	polyhedron
درێژیا کڤانێ	arc length
پارچەیا بازنەی	sector
کەرتێ بازنەی	segment

ڕۆناهیەك لسەر زاراڤان

بۆ ڕوونکرنا هندەك زاراڤێن د ئەڤی بەشیدا هاتین، ئەڤان پێنگاڤان پەیرەو بکە.

1. تو ڕووتەختێ پۆتانی دناسی، ئەڤ زانیاریە چەوا هاریکاریا تە دکەت بۆ ناسینا **بۆشایی پۆوتانێ**.
2. پەیڤا ڕێك ئانکو پابەندبوون ب سیستەمی، دەربڕینا **چەند لایێ ڕێك** لنك تە چ دگەهینیت؟
3. دەمێ نۆژدار چاڤێ تە ڤەکەت دێ چاڤ مەزنتربیت، شێوەیێ ئەندازەیێ **مەزنکری**، شێوەیەکێ ئەندازەییە، ڕامانا وی چییە؟
4. هندەك ئاڕاستەبڕی ب پارچە ڕاستەهێلەکێ **ئاڕاستەکری**، پێناسە دکەن، ئەڤ پێناسە چەوا هاریکاریا تە دکەت بۆ تێگەهشتنا ڕامانا ئاڕاستەبڕی.
5. پەیڤا ستوونگ هەبوونا ستوونبوونێ دیاردکەت، ئەرێ پێناسا **ستوونگی** ئەڤێ دیار دکەت؟
6. پەیڤا ڕووبەر چ دگەهینیت؟ لدویڤ هزرا تە **ڕووبەرێ گۆیێ** چییە؟
7. دەمێ تو وەسفا تشتەکی دکەی ودبێژی ئەوی چەقییە، ئانکو ئەو د چەقێدایە، ئەڤە چەوا هاریکاریێ دکەت بۆ تێگەهشتنا دەربڕینا **چەقەگۆشە** د بازنێدا، و د چەند لایەکێ ڕێکێدا.

بەشێ
1

بیرکاری
ب خواندن و نڤیسینێ

ستراتیژیا خواندنێ: خواندن بۆ شیکارکرنا پرسیارێ

دەمێ دەست بخواندنا پرسیارەکێ دکەی بۆ شیکارکرنا وێ، چێدبیت هەست ب بێی ئۆمێدیەکێ بکەی بەرامبەر ئەوا تو دخوینی. لێ دەمێ تو بەشێن جیاوازێن پرسیارێ ژێك جودا دکەی و دگوهۆڕی بۆ زمانێ بیرکاری دێ بۆ تە دیار بیت کو ئەڤ پرسیارە یا هاوشێوەیە دگەل وان پرسیارێن تە پێشتر شیکارکرین.

ڕێنما بۆ خواندنێ

- هەر ڕستەیەکێ هێدی هێدی بخوینە، و ڕامانا هەر پەیڤەکێ تۆماربکە، و ل خواندنێ بەردەوام بە.
- پەیڤ و ڕستەیان بۆ زمانێ بیرکاری بگوهۆڕە.
- هێلەکێ لژێر داخوازکری بکێشە بۆ دیارکرنا وی.
- هێلکارەکی بکێشە، وئەوی هێلکاری ب ناڤ ونیشان بکە دا دیاربیت کو ئەو چ دنوێنیت.
- دووبارە پرسیارێ بخوینە ل پێش دەستنیشانکرنا وێ بکەی.

وان ڕێنمایێن سەری بکاربینە بۆ تێگەهشتنا پرسیارا بەرامبەر.

ل دوماهیا ڕۆژەکا سەیرانێ لسەر چیایەکی، تیمەکا سەیرانکەران چادرا خۆ ڤەدا ل دووریا 3 km ل ڕۆژهەلاتی خالا دەستپێکرنێ و 7 km ل باشوور و ل بلنداهیا 0.6 km ، دووریا لناڤبەرا چادرێ و خالا دەستپێکرنێ بهەژمێرە.

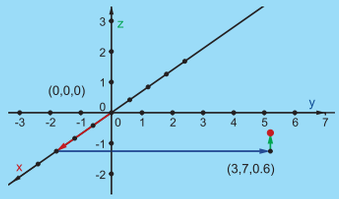
جوداکرنا پەیڤان – کلیلان

ل دوماهیا ڕۆژەکا سەیرانێ لسەر چیایەکی، تیمەکا سەیرانکەران چادرا خۆ ڤەدا ل دووریا *3 km* ل ڕۆژهەلاتی خالا دەستپێکرنێ و *7 km* ل باشوور و ل بلنداهیا *0.6 km* ، دووریا لناڤبەرا چادرێ و خالا دەستپێکرنێ بهەژمێرە.

وەرگێرانا دەقی بۆ بیرکاریێ

چێدبیت خالا دەستپێکرنێ ب خالا بنەڕەت $(0, 0, 0)$ بهێتە نواندن وچێدبیت چادر ب خالا $(3, 7, 0.6)$ بێتە نواندن، وچێدبیت دووریێ بهەژمێرن بکارئینانا یاسایا دوورییێ ل بۆشاییێ پۆتانی.

هێلکار



یاسایا دوورییێ د بۆشاییێ پۆتانێدا. بکاربینە بۆ هەژمارتنا دوورییێ لناڤبەرا چادرێ و خالا دەستپێکرنێ.

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

دووری ل ناڤبەرا چادرێ و خالا دەستپێکرنێ دبیتە 7.6 km ب نێزیکی. $= \sqrt{(3-0)^2 + (7-0)^2 + (0.6-0)^2} \approx 7.6$

هەوڵبدە

ل پرسیارا ل خوارێ ڤان ڕێنمایان بۆ خواندنا وێ بکاربینە و شیکاربکە:

- پەیڤان – کلیلان دیاربکە.
- هەر ڕستەیەکێ بۆ زمانێ بیرکاریێ بگوهۆڕە.
- هێلکارەکی بکێشە کو پرسیارێ بنوێنیت.

1. بلنداهیا لوولەکەکێ 4m و نیڤتیرێ وی 9m بوو، دووجاران کرنا هەر ئێك ژ ڤان هەردوو پیڤانان چ کارتێکرنێ لسەر قەبارێ لوولەکێ دکەت.

1-1 بۆشایێ پۆتانی

3D Coordinate system

بۆچی ئەم فێڕی ئەڤی دبین؟

تو دشێی سەرکەڤی ل بەریکانا ڤەدیتنا گەنجینەکێ، بکارئینانا سیستەمێ پۆتانی یێ سێ دووری، ئەڤە دێ هاریکاریا تە کەت بۆ دەستنیشانکرنا جهێ گەنجینێ لسەر ئەردی.

ئارمانج

- نواندنا خالان وهاوکێشەیێن هێلی د بۆشایێ پۆتانیدا.

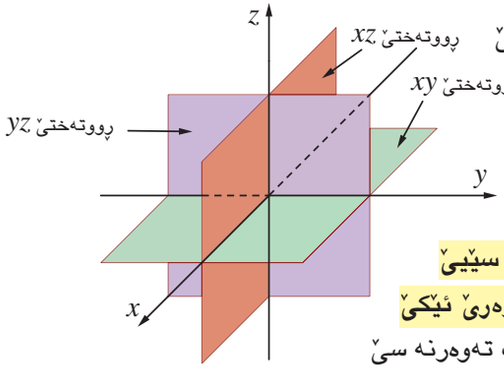
زاراڤ

Vocabulary

بۆشایێ پۆتانی
3D Coordinate system

تەوەرێ سێیێ
z-axis

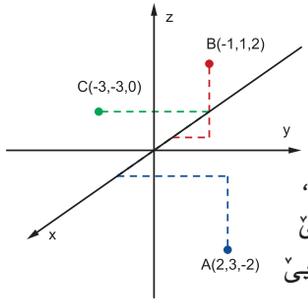
سیستەمێ GPS (سێ دووری) بکاردئینن بۆ دیارکرنا جهان ب ڕێیا دیارکرنا هەردوو هێلێن درێژی و پانیێ کو جهە دکەفتێ ودیارکرنا بلنداهیا وی جهی.



هەروەك چەوا ڕووتەختێ پۆتانی ڕووتەختەکا ئاولی سیستەمێ پۆتانییە، جهێ هەر خالەکێ لسەر وی ب دوو ژمارا دیار دیاربکە پۆیێ ئێکێ x و تانێ دووێ y یە، هەروەسا بۆشایێ پۆتانی ئەو بۆشاییە کو ئاولێ سیستەمێ پۆتانییە جهێ هەر خالەکێ ب سێ ژمارا دناڤ وێدا دیار دبیت، **تەوەرێ ئێکێ x x-coordinate** و **تەوەرێ دووێ y y-coordinate** و **تەوەرێ سێیێ z z-coordietan** بۆشایێ پۆتانی 3 تەوەران بخۆڤە دگریت **تەوەرێ ئێکێ x-axis** و **تەوەرێ دووێ** y-axis و **تەوەرێ سێیێ** z-axis . ئەڤ تەوەرنە سێ ڕووتەختان دیاردکەن **ڕووتەختێ** xy و **ڕووتەختێ** yz و **ڕووتەختێ** zx.

نموونـــــە 1 دیارکرنا خالان د بۆشایێ پۆتانیدا

هەر خالەکێ د بۆشایێ پۆتانیدا دیاربکە.



أ خالا $A(2, 3, -2)$

ژ خالا بنەڕەت 2 یەکان لسەر تەوەرێ ئێکێ بەرەڤ پێش بلقە، پاشی 3 یەکان بۆ ڕەخێ ڕاستێ ب ئاراستەیێ تەریبی تەوەرێ دووێ بلقە، پاشی 2 یەکە بەرەڤ خوارێ ب ئاراستەیێ تەریبیێ تەوەرێ سێ بلقە.

ب خالا $B(-1, 1, 2)$

ژ خالا بنەڕەت ئێك یەکە لسەر تەوەرێ ئێکێ بەرەڤ پاش بلقە، پاشی ب ئێك یەکە بۆ ڕەخێ ڕاستێ ب ئاراستەیێ موجەب تەریبی تەوەرێ دووێ بلقە، پاشی ب 2 یەکەیان بەرەڤ ژوورو تەریبی تەوەرێ سێیێ بلقە.

ج خالا $B(-3, -3, 0)$

ژ خالا بنەڕەت 3 یەکەیان لسەر تەوەرێ ئێکێ بەرەڤ پاش بلقە، پاشی ب 3 یەکەیان بۆ ڕەخێ چەپێ ب ئاراستەیێ تەریبی تەوەرێ دووێ بلقە.

خالا چاڤدێڕیێ

1. ئەڤان خالان دیاربکە:

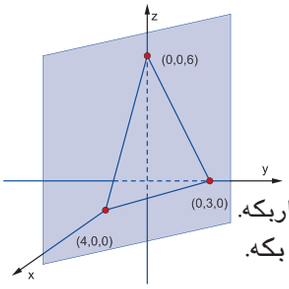
أ خالا $D(1, 3, -1)$ ب خالا $E(1, -3, 1)$ ج خالا $F(0, 0, 3)$

ل بیرا تەبیت کو هاوکێشە یا ڕاستەهێڵی دروتەختێ پۆتانیدا هاوکێشەیەکا هێڵییە وەکی $ax+by+c=0$ ب دوو گۆڕاوان x و y هەموو خالێن (x, y) دروتەختێ پۆتانیدا ئەوێن هەردوو پۆتانێن وان ئەڤێ هاوکێشەیا هێڵی ساخدکەن، ئەڤی راستە هێڵی پێکدئینن. هەروەسا هاوکێشەیا ڕووتەختی د بۆشایێ پۆتانیدا هاوکێشەیەکا هێڵییە $ax+by+cz+d=0$ ب گۆڕاوێن x و y و z ، وەهموو خالێن (x, y, z) دبۆشایێ پۆتانیدا ئەڤێ هاوکێشە یا هێڵی ساخدکەن و ڕووتەختەکی پێکدئینن. چونکی سێ خالێن لسەر ئێك ڕێز نەبن بەسن بۆ پێکئینانا ڕووتەختەکی د بۆشایێدا، وێنەکرنا ئێکودوو برینا ڕووتەختێ خودان هاوکێشەیا $ax+by+cz+d=0$ دگەل هەرسێ تەوەرێن پۆتان بەسە بۆ نواندنا ڤێ هاوکێشەیێ د بۆشایێ پۆتانیدا.

نموونـــــە 2 نواندنا هاوکێشەیا هێڵی بۆشایێ پۆتانیدا.

ئەڤێ هاوکێشەیا هێڵی دبۆشایێ پۆتانیدا بنوێنە $3x+4y+2z=12$

پێنگاڤا (1)ێ ئێکودوو برینێن ڕووتەختی ل گەل تەوەرێن پۆتان دیاربکە.



لگەل تەوەرێ ئێکێ: $x=4$ $3x+4\times0+2\times0=12$

لگەل تەوەرێ دووێ: $y=3$ $3\times0+4y+2\times0=12$

لگەل تەوەرێ سێیێ: $z=6$ $3\times0+4\times0+2z=12$

پێنگاڤا (2)ێ هەرسێ خالان $(4, 0, 0)$ و $(0, 3, 0)$ و $(0, 0, 6)$ دیاربکە. پاشی ئەوی ڕووتەختی دڤان هەرسێ خالانڕا دبۆریت بکێشە وێنە بکە.

هاریکاری

بۆ دیارکرنا ئێکودووبرینا ڕووتەختەکی ل گەل تەوەرەکی، ل جهێ پۆتانێ هەردوو تەوەرێن دی 5 دانە و هاوکێشەی شیکاربکە.

خالا چاڤدێریێ

2. هاوکێشەیا هێڵی $x-4y+2z=4$ دبۆشایێ پۆتانیدا بنوێنە.

نموونـــــە 3 بجهئینان لسەر تەکنۆلۆژیا

د ناڤ یارییێن بەربەڵاڤێن بژمێرێدا، یارییا نواندنا ڕۆلدن، کو هەر یاریکەرەك شارستانیەکێ ئاڤا دکەت ل دەستپێکێ 100 پارچەییێن زێڕی ددەنە هەر یاریکەرەکی بۆ کرینا پێتڤیان، پاشی ئەو یاریکەرە پێشبرکیێ دکەن لسەر مانا شارستانییێن وان ب شێوەیەکێ زێندی. ژ یاسایێن یاریێ، هەر نرخێ یەکەیەکا خوارنێ دووچار چەیێن زێڕییە و بهایێ یەکەیەکا داری 3 پارچێن زێڕییە و بهایێ یەکەیەکا بەری 5 پارچێن زێڕییە.

أ هاوکێشەیەکا هێڵی ب سێ گۆڕاوان بنڤیسە بۆ نواندنا ئەڤی بارەیێ.

هێمایێ f بۆ بڕێ خوارنێ و w بۆ بڕێ داری و هێمایێ s بۆ بڕێ بەری بکاربینە.

100 پارچێن زێڕی	=	نرخێ خوارنێ	+	نرخێ داری	+	نرخێ بەری
100	=	$2f$	+	$3w$	+	$5s$

ب خشتێ بەرامبەر بکاربینە بۆ دیاریکرنا بڕێ کو هەر یاریکەرەك دکڕیت.

یاریکەر	بڕێ خوارنێ	بڕێ داری	بڕێ بەری
دانا	20	10	
زانا	15	15	
خەسرەو	40	5	
پێشرەو	25	10	

دانا $2(20)+3(10)+5s=100$ $s=6$

زانا $2(15)+3(15)+5s=100$ $s=5$

خەسرەو $2(40)+3(5)+5s=100$ $s=1$

پێشرەو $2(25)+3(10)+5s=100$ $s=4$

دانا دکارت 6 یەکەیێن بەری بکڕیت و زانا دکارت 5 یەکەیێن بەری بکڕیت و خەسرو دکارت یەکەیەکا بەری بکڕیت و پێشرەو دکارت ٣ یەکەیێن بەری بکڕیت.

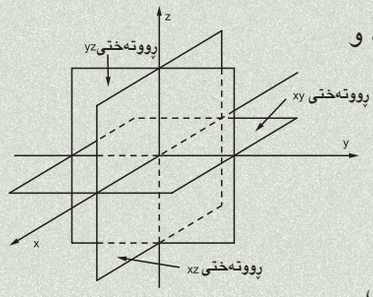
خالا چاڤدێریێ

3. ئازادی بریاردا ل دوماهیا حەفتیێ ب گەشتەکێ ب پێیان رابت. بۆ خۆ ئامادەکرنێ بۆ ئەڤێ گەشتێ، ئەڤ تشتە کڕین، چرایەك ب 500 3 دیناران و چەند کلۆرێن نانی بهایێ هەرئێکێ 500 1 دیناربوو، وچەند شووشێن ئاڤێ بهایێ هەرئێکێ 750 دینار بوو. ئازادی 500 60 دینار دان بۆ کڕینا ڤان تشتان

أ هاوکێشەیەکا هێلی ب سێ گۆڕاوان بنڤیسە بۆ نواندنا ئەڤێ باریێ.

ب ئازادی 4 چرا و 24 شووشێن ئاڤێ کڕین، ئەوی چەند کلۆرێن نانی دکڕیت؟

هزربکە و گەنگەشێ بکە



1. وەسا دانە کو خالا بنەرەت دبۆشایێ پۆتانێدا لپێش جهێ تەیە، و ئەو جهێ تو لێ راوەستیایی ل ژێر گۆشەیا رەخێ چەپێ دژۆرا پۆلا تە دایە، درێژیا یەکەیا پیڤانێ لسەر تەوەرێن پۆتانان ئێك یەکەدانە پۆتانێ جهێ سەرێ خو بخەملینە.
2. بەحسێ ڕووتەختەکی بکە بتنێ دوو ئێکدووبڕین هەبن ل گەل تەوەرێن پۆتانی
3. ب شێوەیەکی رێك و پێك ئەڤی هێلکارێ بەرامبەر بکێشە، پاشی تەمامبکە ب دیارکرنا ناڤێ هەر تەوەرەکی و هەر ڕووتەختەکی و هەر خالەکێ.

فێربە و شرۆڤە بکە

1-1 راهێنان

راهێنانێن ئاراستەکری

1 **زاراڤ** جیاوازیێ لناڤبەرا ڕووتەختێ پۆتانێ و پۆشایێ پۆتانی ڕوونبکە.

نموونە 1 هەر ئێکی ژ ئەڤان خالان دپۆشایێ پۆتانێدا بنوینە

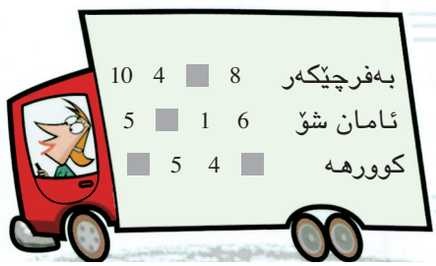
2 (−3, −2, 1) 3 (0, 0, 2) 4 (1, 4, 5) 5 (−1, 2, 4)

نموونە 2 هەر هاوکێشەیەکێ دبۆشایێ پۆتانێدا بنوێنە.

6 $x+y+z=3$ 7 $5x-2y-4z=10$ 8 $1.5x+3y-2z=-6$

نموونە 3

9 **پێنگاڤێن جۆراوجۆر** مەزنترین بارێ بارهەلگرەکا کۆمپانیا دابەشکرنا نیشتمانی ئێك تەنە. کێشا بەفر چێکەرێ 75 kg و کێشی ئامان شۆیێ 50 kg و کێشا کوورهێ (فرن) 100 kg .



أ هاوکێشەیەکا ب سێ گۆڕاوان بنڤیسە بۆ نواندنا ڤی باری.

ب خشتێ تەمامبکە ب دیارکرنا ژمارا هەرسێ جۆرێن ئامیران کو ترومبێلا بارهەلگر دشێت ڤەگوهێزیت.

ج **خەملاندن:** مەزنترین ژمارا ئامیران بخەملینە کو ترومبێلا بارهەلگر دشێت ڤەگوهێزیت.

بجهێنان

راهێنانێن ئازاد

بۆ شیکارکرنا بەرێ خۆبدە راهێنانان	نموونە
17–10	1
23–18	2
24	3

جهێ هەرخالەکێ دبۆشایێ پۆتانیدا دیاربکە

10 $(2, -4, 3)$ **11** $(-1, 1, 4)$ **12** $(3, 0, 0)$ **13** $(1, -2, 0)$

14 $(-3, -3, -3)$ **15** $(5, 0, 2)$ **16** $(0, -3, 2)$ **17** $(-4, -1, 1)$

هەر هاوکێشەیەکێ د بۆشایێ پۆتانیدا بنوێنە.

18 $x+y-z=-1$ **19** $2x-y+2z=4$ **20** $x+\frac{1}{2}y+z=-2$

21 $5x+y-z=-5$ **22** $8x+6y+4z=24$ **23** $3x-3y+2.5z=7.5$

24 **حەودێن (گوڵێن) ماسییان** هەڤالی 80 000 دینار هەنە بۆ کرینا ماسییان دا بێختە دناڤ حەودا ماسییان دا. نرخێ ماسیێ سۆر 10 000 دیناربوو و یێ ڕەش 15 000 دینار و یێ خۆلەمێشی 2 500 دینار بوو.

سور	ڕەش	خۆلەمێشی
2	2	■
3	1	■
5	■	1
■	10	2

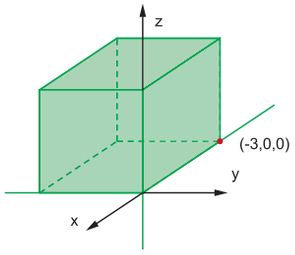
أ هاوکێشەیەکێ ب سێ گۆڕاوان بنقیسە بۆ نواندنا ئەڤی باری.

ب ئەوێ خشتێ تەمامبکە کو ژمارا وان ماسیێن هەڤال دکارت بکرێت بنوێنت.

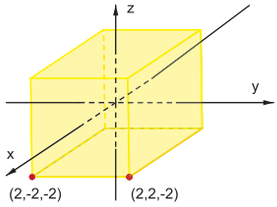
25 **وەرزش** بۆ یاریکەرێ تەپا سەبەتێ، ل دووڤ سێ جۆرێن هەلدانان بۆ کۆلکرنێ خال دهێتە تۆمارکرن، هەلدان ب خالەکێ هەلدانا سەربەخۆ و هەلدان ب دوو خالان و هەلدان ب سێ خالان. یاریکەرەکی 60 خال تۆمارکرن، 20 ژ وانە ب هەلدانێن ئێك خال بوو. ژمارا هەلدانێن دشیانیدا ژ هەردوو جۆرێن دی بهەژمێرە.

ئەندازە **خالێن سەرێ هەر شەشپالوێیەکێ دیاربکە**

26



27



28 **ئاڤاهی** ئەندازیارەکی 8 ملیۆن دینار تەرخانکرن بۆ کاشیکرنا هۆلەکێ، کو پێدڤی ب 2000 کاشیان هەبوو. ئەوی بریاردا 3 جۆرێن کاشییان بکاربینیت ، کاشیێ داری و کاشیێ سیرامیك و کاشیێ بەری. 400 کاشی ژ جۆرێ سیرامیکی کڕین. ئەرێ ئەندازیار دکارت ئەو ئەردێ ژ هۆلێ مایی ب یەکسانی لناڤبەرا کاشیێ داری و بەری کاشیبکەت؟ بەرسڤا خۆ رووبکە.

نرخێن کاشییان (کریا دەستی)

مۆزاییك: 1 500 دینار

بەر: 2 000 دینار

سیرامیك: 4 000 دینار

دار: 6 000 دینار

29 **هزرکرنەکا ڕەخنەگر:** ئەرێ لڤینا لسەر راستە هێلەکی، چۆن و هاتن لڤینەکا دووریا دووانی دنوێنت؟ بەرسڤا خۆ رووبکە.

30 **بنقیسە** هەڤالەکێ تە پەیوەندی ب تەکر داخوازی ژ تەکر بۆ وی رووبکەی چەوا بۆشایێ پۆتانی بکێشیت. چەوا دێ بۆ وی ئەڤێ رووبکەی.

31 ئەندازیار بۆشایێ پۆتانی بکاردئینن بۆ نەخشەکێشانا پرۆژەییێن ئاڤکرنێ. ئەندازیارەکی گلۆپەك ل خالا (7, 12, 10) دانا د نەخشێدا ئەردێ ئاڤاهییێ دا و ب ڕووتەختێ xy هاتیە نواندن. یەکەیا پیڤانێ لسەر تەوەرێ ئێکێ و دووێ ب پێیەکی هاتیە نواندن.

أ ئەندازیاری دوو گلۆپێن دی هلاویستن هەرئێك ژ وان ب 4 پێیان ژ گلۆپا ئێکێ یا دووربوو، یا ئێکێ ب ئاراستەیێ موجەبێ تەوەرێ ئێکێ و یا دووێ ب ئاراستەیێ موجەبێ تەوەرێ دووێ بوو. پۆتانێ خالا هلاویستنا هەرئێك ژ هەردوو گلۆپان چەندە؟

ب هەکەر جهێ هەر ئێك ژ هەردوو گلۆپان ل ژێر خالا پێڤە هاتیە هلاویستن ب ئێك پێ و نێڤێ بیت، پۆتانێ هەرگلۆپەکێ ژ وان هەردووان دیاربکە.

ج ئەندازیاری بڕیاریدا ئەو وێ ئاڤاهییێ 4 پێیان بلند بکەت، پۆتانێ نوو بۆ گلۆپا ئیکێ چەندە؟

32 **شاشییێ د شیکارکرنێ دا** ل خوارێ دوو ڕێ هەنە بۆ دیارکرنا ئێکدووبڕینا ڕووتەختێ $-5x+3z=15$ ل گەل تەوەرێ ئێکێ، ڕێیا نە دروست دیاربکە.

أ

$$-5x+3z=15$$
$$-5x+3\times 0=15$$
$$-5x=15$$
$$x=-3$$

ب

$$-5x+3z=15$$
$$-5\times 0+3z=15$$
$$3z=15$$
$$z=5$$

ئامادەکرن بۆ ئەزموونێ

33 کیژ خال ب 5 یەکەیان دکەڤیتەپشت خالا (1, 1, 4)!

أ (−4, 1, 4) ب (1, −4, 9) ج (2, 3, 6) د (6, 6, 9)

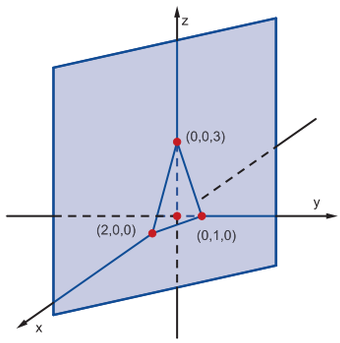
34 کیژ هاوکێشە وێنەیێ بەرامبەر دنوێنت!

أ $x+2y+3z=6$

ب $2x+y+3z=6$

ج $3x+6y+2z=6$

د $6x+3y+2z=6$



35 کیژ خال ئێکودوو بڕینا ڕووتەختێ $2x-4y+3z=-12$ لەگەل تەوەرێ دووێ دنوێنت؟

أ (0, −3, 0)

ب (0, 0, −3)

ج (0, 3, 0)

د (0, 0, 3)

36 ئێکودووبڕینا ڕووتەختێ $5x-2y-4z=-3$ ل گەل تەوەرێ سێیێ دیاربکە.

بەرهنگاری و بەرفرەهکرن

دەمێ هاوکێشەیا هێلی بتنێ دوو گۆڕاو تێدا هەبن دپۆشایێ پۆتانێدا، ئەو هاوکێشە روتەختکی تەریب دگەل تەوەرەکێ پۆتانی دنوێنت. هەر هاوکێشەیەکێ دبۆشایێدا بنوێنە.

37 $x+y=2$ 38 $y-2z=4$ 39 $x+z=3$ 40 $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y=1$

هاوکێشەیەکێ بۆ رووتەختەکی بنڤیسە ب زانینا ئێکودووبڕینا وی ل گەل تەوەرێن پۆتانی.

	دگەل تەوەرێ ئێکێ	دگەل تەوەرێ دووێ	دگەل تەوەرێ سێیێ
41	4	2	−1
42	25	50	10

پێداچوونا لوولپێچی

ناڤێ وی تەنێ ئەندازەیی بێژە ب زانینا ژمارا لایان و سەرێن وی (پۆلێن پێشتر).

43 5 سەرو 8 لا 44 6سەرو 9 لا 45 بێ سەرو بێ لا

46 **کۆمکرنا هاریکاریان:** یانەیا هاوکاری گەشتەکا سواربوونا بایسکلان رێکخست ب درێژیا 1920 km. پشکداران رۆژانە 120 kmبڕین. ئەڤێ گەشتێ چەند رۆژان قەکێشا؟ (پۆلێن پێشتر)

هەر سیستەمەکی هیلی شیکاربکە (پۆلێن پێشتر).

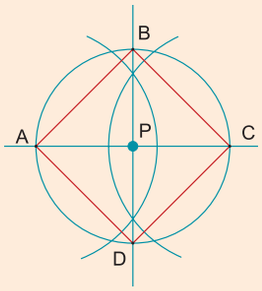
47 $\begin{cases} 5y=x \\ \frac{2}{5}x+7y=18 \end{cases}$ 48 $\begin{cases} 6x-y=5 \\ 4y-3x=1 \end{cases}$ 49 $\begin{cases} x+3y=6 \\ 2x-3y=9 \end{cases}$

چێکرنا (دروستکرنا) چەندلایێن ڕێك

Constructing regular polygons

ل ڤێ چالاکیێ دێ فێری چێکرنا چەند لایێن ڕێك بی بکارئینانا بازنان لدۆر وی چەندلایێ دای.

چالاکی 1

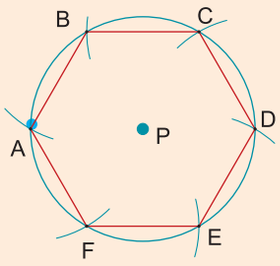


1. بازنەکێ بکێشە چەقێ وێ P بیت پاشی تیرێ $\overline{AC}$ بکێشە.
2. تەوەرێ تیرێ بازنێ $\overline{AC}$ دیاربکە و خالێن ئێکودووبڕینا وی ل گەل بازنێ دانە B و D .
3. هەرئیکی $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ و $\overline{CD}$ و $\overline{DA}$ بکێشە ،ب ڤێ چەندێ چارلایەکی لاجووت بدەست دکەڤیت و گۆشەیێن وی یەکسانن، ئەڤە چەند لایەکی ڕێکە ژ 4 لایان پێکهاتییە (چار گۆشەیە).

هەولبدە

1. ڕێیەکا دی بکاربینە بۆ وێنەکرنا چەندلایەکی ڕێك ژ 4 لایان پێکهاتبیت.
2. سەرێن چارلایێ ڕێك دکەڤنە سەر ئێك بازنێ. پەیوەندی لناڤبەرا چار لایێ و بازنێ چییە؟
3. هەشت لایێ ڕێك ئەو چەندلایە کو لایێن وی و گۆشەیێن وی جووتن بکارئێنانا لەتکەرین گۆشێن ئەوی چارلایێ دچالاکیا ئێکێدا هاتیە دروستکرن هەشت لایەکی ڕێك دروستبکە.

چالاکی 2



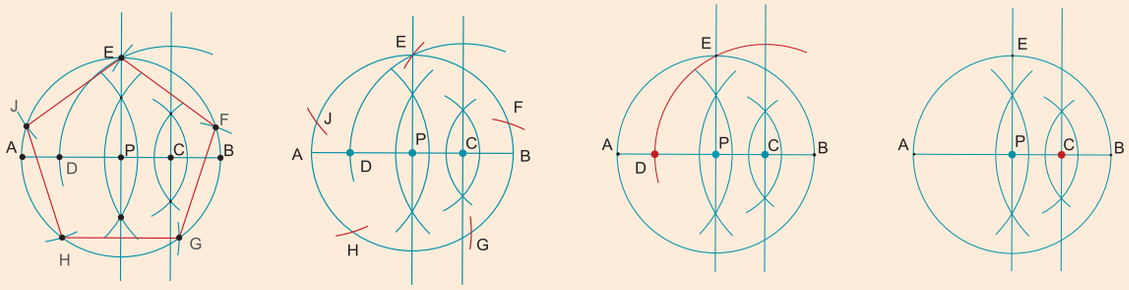
1. بازنەکێ بکێشە چەقێ وێ P بیت، خالا A لسەر چێوێ وێ دیاربکە.
2. ب پرگالی ڤەکری، ژ خالا A چەند خالێن یەکسان د دوورییدا لسەر بازنێ دیاربکە و ناڤێن وان دانە B و C و D و E و F.
3. $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ و$\overline{CD}$ و$\overline{DE}$ و $\overline{EF}$ و $\overline{FA}$ بکێشە ، شەشلایەکی لایەکسان بدەست دکەڤیت و گۆشێن وی دیەکسانن. ئەو شەشلایەکی ڕێکە.

هەولبدە

4. ب چ دزانی $ABCDEF$ شەشلایەکی ڕێکە (ڕێنما: تیرەیێن $\overline{AD}$ و$\overline{BE}$ و $\overline{CF}$ بکێشە، ئەو سێگۆشەیێن بدەست تە کەفتین چ جۆرن؟
5. **دووازدە لایێ ڕێك**: چەند لایەکە ژ 12 لاو 12 گۆشەیێن یەکسان پێکدهێت، بۆ دروستکرنا دووازدە لایێ ڕێك شەشلایەکی ڕێك بکاربینە. ڕێیا خو روونبکە

چالاکی 3

1. بازنەکێ بکێشە چەقێ وێ P بیت پشای تیرەیێ $\overline{AB}$ بکێشە.
2. تەوەرێ $\overline{AB}$ دیاربکە و ناڤێ خالەکێ ژ هەردوو خالێن ئێکودووبڕینا وی تەوەری ل گەل بازنێ دانە E.
3. ناڤەراستا $\overline{PB}$ دیاربکە و ناڤێ وێ دانە C.
4. پرگالەکێ هندی CE ڤەکە. سەرێ وی پڕگالی دانە سەر C و کڤانەکی بکێشە $\overline{AB}$ ل خالەکی دێ بریت ناڤێ وێ دانە D.
5. پرگالی هندی ED ڤەکە، و ژ خالا E دەستپێبکە و هندەك خالێن دووری لناڤبەرا وان یەکسان بن لسەر بازنێ دیاربکە و ناڤێن وان دانە F و G و H و J.
6. $\overline{EF}$ و$\overline{FG}$ و$\overline{GH}$ و$\overline{HJ}$ و $\overline{JE}$ بکێشە، پێنج لایەکی لایێن وی یەکسان دێ بدەست تە کەڤیت و گۆشەیێن وی دجووتن، ئەو پێنج لایەکی ریکە.



پێنگاڤ ژ 1 هەتا 3 — پێنگاڤا 4 — پێنگاڤا 5 — پێنگاڤا 6

هەولبدە

6. **دەھ لایێ ڕێك**: چەندلایەکی ژ 10 لاو 10 گۆشەیێن یەکسان (جووت) پێکدهێت، بکارئینانا پێنج لایێ ڕێك دەھ لایەکی دروستبکە، ڕێیا خو روونبکە.
7. پیڤانا هەموو گۆشەیێن وان چەندلایێن ڕێك ئەوێن تە دروستکرین ژ چالاکیا 1 هەتا 3 بهژمێرە، پاشی ئەڤی خشتەی تەمامبکە.

چەندلایێن ڕێك				
ژمارا لایان	3	4	5	6
پیڤانا هەرگۆشەیەکێ	60°			
سەرجەمێ پیڤانێن گۆشەیان	180°			

8. **دەستەواژەیەکێ بنڤیسە**: ڕێسایەکا گشتی بۆ هەژمارتنا سەرجەمێ پیڤانێن گۆشەیێن ژ ناڤدا یێ چەندلایەکی ڕێك ژ n لایان پێکهاتبیت بنڤیسە.
9. **دەستەواژەیەکێ بنڤیسە**: ڕێسایەکا گشتی بۆ هەژمارتنا پیڤانا هەر گۆشەیەکا ژ ناڤدا بۆ چندلایەکی ڕێك ژ n لایان پێکهاتبیت بنڤیسە.

2–1 چەندلا

Polygons

بۆچی ئەم فێڕی ڤێ دبین؟

ڕۆناهی دچیتە هاوێنا ئامیرێ وێنەگرتنێ، دناڤ کونە کێرا دبۆرت یا پێکهاتییە ژ کومەلەکا تیغان و شێوەیەکی چەندلایەکی وەردگریت. (بەرێ خو بدە نموونە 5)

ئارمانج

- پۆلینکرنا چەندلایان ل دویڤ لایێن وان و گۆشەیێن وان
- هەژمارتنا پیڤانێن گۆشەیێن زناڤدا و ژدەرڤە بۆ چەند لای و بکارئینانا وان.

زاراڤ

Vocabulary

لایێ چەندلایی
Side of a polygon

سەرێ چەندلایی
Vertex of a polygon

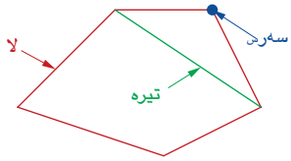
تیرە
Diagonal

چەندلایێ ڕێك
Regular polygon

ناڤچال (قۆپاو)
Concave

کومد (قۆقز)
Convex

ل بیراتەبیت چەند لا شێوەیەکی ئەندازەی گرتییە د رووتەختەکیدا، و ژ 3 پارچە راستەهێلان یان زێدەتر پێکدئێت کو دوو ژ وان پارچە راستەهێلان لسەر ئێك راستە نەبن، و ب جۆرەکی هەر پارچە راستەهێلەك بتنی ل گەل دوو پارچەهێلێن دی ئێکودوو ببڕن، و هەر ئێکی لنك سەرەکێ وی. هەر پارچە راستەهێلەك ژ وان **لایەکی Side** چەندلایێیە. هەرسەرەکێ هاوبەش دناڤبەرا دوولایاندا **سەرەکی Vertex** چەندلایێیە. ئەو پارچە راستەهێلێ دووسەرێن نەهاوسێ ژ سەرێن چەندلایی ل گەل ئێك دگەهینیت دبێژنێ **تیرە Diagonal**



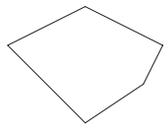
ژمارەی لا	ناو
3	سێگۆشە
4	چار لا
5	پێنج لا
6	شەش لا
7	حەفت لا
8	هەشت لا
9	نەھ لا
10	دەھ لا
11	یازدە لا
12	دووازدە لا

تو دشێی چەند لایی پێ ژمارا لایێن وی بناڤ بکەی، ئەڤ خشتە هندەك ژ وان ناڤان دیار دکەت. چەند لایێ *ABCDE* لسەری پێنج لایە.

نموونـــــە 1 جوداکرنا چەندلایان

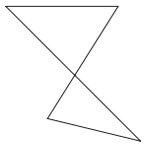
دیاربکە ئەرێ ئەڤ شێوەیێن ل خوارێ دبنە چەندلا یان نە، ئەگەر چەندلابوو ناڤێ وی بێژە.

أ



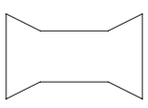
چەندلایە، پێنج لایە

ب



نەچەندلایە

ج



چەندلایە، هەشت لایە

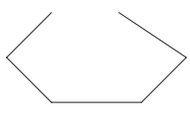
ل بیرا تە بیت

چەندلا شێوەیەکی ئەندازەیی گرتیە دروتەختەکیدا، ژ 3پارچە راستەهێلان یان زێدەتر پێکدهێت، بتنێ لنك سەرێن وان ئێکودوو دبڕن.

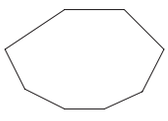
خالا چاڤدێریێ

1.دیاربکە ئەرێ شێوەیێن ل خوارێ دبنە چەند لا یان هەکەر چەند لابوو ناڤێ وی بێژە

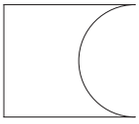
أ



ب



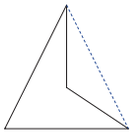
ج

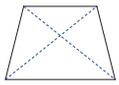


چەندلایێ ڕێك Regular polygon چەندلایەکە هەموو لایێن وی جووتن (یەکسانن ب درێژیێ) و گۆشەیێن وی جووتن (پیڤانێن وان یەکسانن).

چەندلایێ ناقچال Concave چەندلایەکە ب کێمی تیرەک هەیە هندەک خالێن وی تیرەی دکەڤنە دەرڤەی چەندلایی.

چەندلایێ کومد Convex چەندلایەکە هەموو تیرەیێن وی دکەڤنە دناڤ چەند لاییدا. چەندلایێ ڕێك هەردەم یێ کومدە

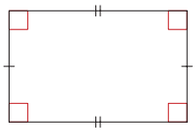

چەندلایێ قۆپاو


چەندلایێ قۆقز

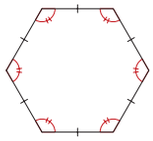
نموونـــــە 2 پۆلینکرنا چەندلایان

دیاربکە ئەرێ ئەڤ چەندلاییێن ل خوارێ دریکن یان نە، ناقچالن یان دکومدن

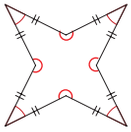
أ


نەیێ ڕێکە، کومدە

ب


ڕێکە، کومدە

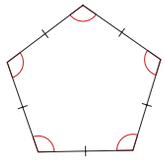
ج


نەیێ ڕێکە، ناقچالە

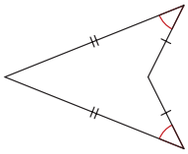
2. دیاربکە ئەرێ ئەڤ چەندلاییێن ل خوارێ دریکن یان نە، کومدن یان ناقچالن.

خالا چاڤدێریێ

أ



ب

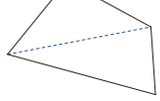


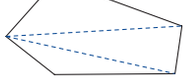
بۆ هەژمارتنا سەرجەمێ پیڤانێن کۆشەییێن ژ ناڤدا یێ چەندلایەکێ کومد، هەموو تیرەیێن وی ژ سەرەکی ژ سەرێن وی بکێشە، ب ڤێ چەندێ ژمارەکا سێگۆشەیان دێ پەیدابن، سەرجەمێ پیڤانێن گۆشەییێن ژ ناڤدایێ چەند لایی دبیتە سەرجەمێ گۆشەییێن ژناڤدا بۆ هەموسێگۆشەیێ.

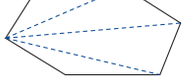
ل بیرا تە بیت

ل دویڤ سەلمیزاوا سەرجەمێ پیڤانێن گۆشەییێن ژناڤدا یێ سێگۆشەیێ ئەڤ سەرجەمە دبیتە 180 پلە.

سێگۆشە


چارلا


پێنج لا


شەشلا

چەندلا	ژمارا لایان	ژمارا سێگۆشان	سەرجەمێ پیڤانێن گۆشەییێن ژناڤدا
سێگۆشە	3	1	(1) x 180° =180°
چارلا	4	2	(2) x 180° =360°
پێنج لا	5	3	(3) x 180° =540°
شەشلا	6	4	(4) x 180° =720°
چەندلایێ n لا	n	$n-2$	(n - 2) x 180°

ل هەرچەندلایەکی دیاردبیت کو ژمارا وان سێگۆشەییێن پەیدابن ژ کێشانا تیرەیان ژ سەرەکی چەندلایی ب 2 یێ کێمترە ژ ژمارا لایان n ، و ژ ڤێ ئێکێ دیاردبیت کو سەرجەمێ پیڤانێن گۆشەییێن وان سیگۆشەیان دبیتە (n - 2) x 180°

فێربە و بڤێ بکە

سەلمینراوا 1-1 سەرجەمێ پیڤانێن گۆشەییێن ژ ناڤدا یێ چەندلا

سەرجەمێ پیڤانێن گۆشەییێن ژ ناڤدا یێ چەند لایێ کومد. کو n لا هەبن دبیتە (n - 2) x 180°

نموونـــــه 3 هەژمارتنا پیڤانێن گۆشەییێن ژ ناڤدا یێ چەند لایی و هەژمارتنا سەرجەمێ وان.

أ سەرجەمێ پیڤانێن گۆشەییێن ژ ناڤدا یێ هەشتلایێ بهەژمێرە

$(n - 2) \times 180°$ سەلمینراوا سەرجەمێ پیڤانێن گۆشەییێن ژ ناڤدا یێ

$(8 - 2) \times 180°$ چەندلایی ل جهێ n بهایێ وی دانە.

$1080°$ سادەکرن.

ب پیڤانا هەرئیكێ ژ گۆشەییێن ژ ناڤدا یێ نەهلایەکی ریك بهەژمێر.

پێنگاڤا 1 سەرجەمێ پیڤانێن گۆشەییێن ژ ناڤدا یێ نەهلایێ ریك بهەژمێر.

$(n - 2) \times 180°$ سەلمینراوا سەرجەمێ پیڤانێن گۆشەییێن ژ ناڤدا یێ چەندلایی

$(9 - 2) \times 180° = 1260°$ ل جهێ n بهایێ وی دانە

پێنگاڤا 2 پیڤانا ئێك گۆشەیا ژ ناڤدا بهەژمێرە

$\frac{1260°}{9} = 140°$ سەرجەمێ پیڤانان دابەشی 9 بکە چونکی هەموو گۆشە دجوونە.

ج پیڤانا هەرئیكێ ژ گۆشەییێن ژ ناڤدا یێ چارلایێ بەرامبەر بهەژمێرە

$(4-2)\times 180° = 360°$ سەلمینراوا سەرجەمێ پیڤانێن گۆشەییێن ژ ناڤدا یێ

$m\hat{P} + m\hat{Q} + m\hat{R} + m\hat{S} = 360°$ چەندلایی ل جهێ n بهایێ وی دانە

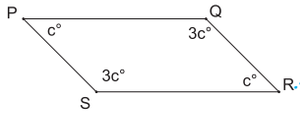
$c + 3c + c + 3c = 360$ ل جهێ دانانێ بکاربینە

$8c = 360$ رادەیێن لێکچوویی کۆمبکە

$c = 45$ هەردوولایان دابەشی 8 بکە

$m\hat{P} = m\hat{R} = 45°$

$m\hat{Q} = m\hat{S} = 3(45°) = 135°$



*** تێبینی**

مەبەست ژ پیتا m ل ڤێرێ ب رامانا پیڤانێ دئێت وەکی بێژین پیڤانا گۆشا measure of angle $P = m\hat{P}$

3. **أ** سەرجەمێ پیڤانێن گۆشەییێن ژ ناڤدا یێ 15 لایێ بهەژمێرە

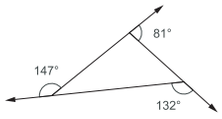
ب پیڤانا هەرئیكێ ژ گۆشەییێن ژناڤدا یێ دەهلایەکی ریك بهەژمێرە

خالا چاڤدێریێ

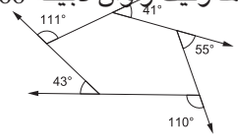
ل بیراتەبیت

ژ دەرڤە گۆشەیا سیگۆشەیێ ئەو گۆشەیە دکەڤیتە ناڤبەرا لایەکی ژ لایێن سێگۆشەیێ و لایەکی هاوسێ.

هەرئیك ژ گۆشەییێن ژ دەرڤە یێ ڤان هەردوو چەند لایێن ل خوارێ هاتە پیڤان. بەرێ خو بدێ سەرجەمێ پیڤانێن گۆشەییێن ژ دەرڤە ل هەرئیكێ ژ وان دبیتە $360°$



$147° + 81° + 132° = 360°$



$43° + 111° + 41° + 55° + 110° = 360°$

فێربە و خۆ بە سەرکەڤە

سەلمینراوا 1–2 سەرجەمێ پیڤانێن گۆشەییێن ژ دەرڤە یێ چەندلایێ

سەرجەمێ پیڤانێن گۆشەییێن ژ دەرڤە یێ چەندلایی کومد. $360°$.

نموونـــــه 4 هەژمارتنا پیڤانێن گۆشەییێن ژ دەرڤەیی چەندلایی و هەژمارتنا سەرجەمێ وان.

أ پیڤانا هەرگۆشەیەکا ژ دەرڤە یا شەش لایەکی ریك بهەژمێرە

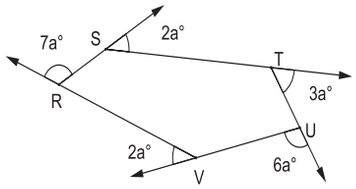
شەش لایی 6 لاو 6 سەر هەنە.

سەرجەمێ پیڤانێن گۆشەییێن ژ دەرڤە $360°$ سەلمینراوا سەرجەمێ پیڤانێن گۆشەییێن ژ دەرڤەیی چەندلایی

پیڤانا هەرگۆشەیەکا ژ دەرڤە $\triangleq \frac{360°}{6} \triangleq 60°$ دابەشێ 6 بکە 3 چونکی 6 گۆشەیێن ژ دەرڤەیێن یەکسان هەنە

پیڤانا هەرگۆشەیەکا ژ دەرڤە یا شەشلایێ ریك $60°$

ب بەهای a د چار لایێ بەرامبەردا بهەژمێرە



$7a^\circ+2a^\circ+3a^\circ+6a^\circ+2a^\circ=360^\circ$ سەلمینراوا سەرجەمێ پێڤانێن گۆشەیێن ژ دەرڤەی چەندلایێ.

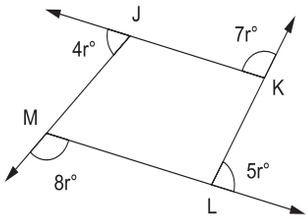
$20a=360$ رادەیێن لێکچووی کومبکە

$a=18$ هەردووەخان دابەشبکە لسەر 20

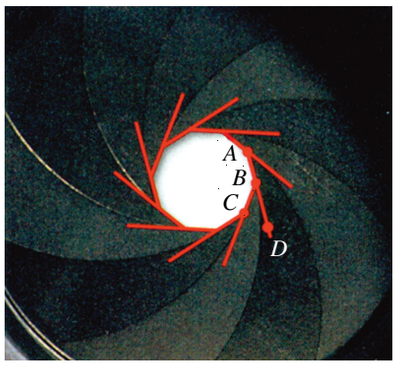
خالەکا چاڤدێریێ

4. **أ** پێڤانا هەرگۆشەیەکا ژ دەرڤەیا دووازدە لایەکی ڕێك چەندە؟

ب بەهایێ r د چەندلایێ بەرامبەردا چەندە؟



نموونـــــە 5 بجهئینان لسەر ویێنەگرتنێ



چاڤێ ئامیرێ ویێنەگرتنێ (کامیرە) ژ **10** تیغان پێکدهێت. ئەو تیغەنە بشێوەیەکی لسەر ئکێدوو هاتینە دانان کو دەھ لایەکی ڕێك پێکدئینن. پێڤانا $\widehat{CBD}$ چەندە؟

$\widehat{CBD}$ گۆشەیەکا ژ دەرڤەیە بۆ وی چەندلایی ڕێك، سەرجەمێ پێڤانێن ژ دەرڤەی چەندلایێ ڕێك 360° . ل دویڤ سەلمینراوا سەرجەمێ پێڤانێن گۆشەیێن ژ دەرڤەی چەندلایی

$m\ \widehat{CBD}=\frac{360^\circ}{10}=36^\circ$

دەھ لایێ ڕێك 10 گۆشەیێن ژ دەرڤەی یەکسان هەنە لەورا 360 دابەشی 10 بکە.

خالا چاڤدێریێ

5. **دێ چ بیت هەکەر...؟** هەکەر ژمارا تیغان 8 بیت ل جهێ 10 تیغان هەرگۆشەیەکا ژ دەرڤەی دێ بیتە چەند؟

هزربکە و گەنگەشێ بکە

1. وێنەیەکێ پێنج لایەکی کومد و پێنج لایەکی ناڤچال بکێشە، جیاوازیێ لناڤبەرا هەردوو چەندلایان ڕوونبکە.

2. چ هۆیەك ڕێگرە بۆ بکارئینانا $\frac{360^\circ}{n}$ بۆ هەژمارتنا پێڤانا گۆشەیا ژ دەرڤەی یا چەندلایەکی نارێك.

3. خشتێ ل خوارێ کۆپیبکە و تەمامبکە، د هەر خانەیەکێدا برەکی بنقیسە بۆ هەژمارتنا بەهایێ دیارکری بۆ چەندلایەکی ڕێك n لا هەبن.

فێربە و بزبەربکە

	گۆشەیێن ژ ناڤدا	گۆشەیێن ژ دەرڤە
سەرجەمێ پێڤانێن گۆشەیان		
پێڤانا هەر گۆشەیەکێ		

2–1 ڕاهێنان

ڕاهێنانێن ئاراستەکری

1 **زاراف** ئەرێ جووتبوونا لایان بەسە دا چەندلایێ ڕێك بیت؟ بەرسڤا خو روونبکە، ب نموونەیەکێ پالپشتیا بەرسڤا خو دبکە.

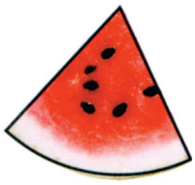
نموونە 1 دیاربکە ئەرێ هەر شێوەیەکێ ل خوارێ دبیتە چەندلا یان نە، ناڤێ شێوەیی بێژە هەکەر چەند لابیت.

2

3

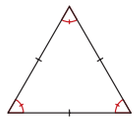
4

5

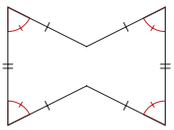


نموونە 2 دیاربکە ئەرێ چەندلایی ڕێکە یان نە، کومد یان ناڤجالە

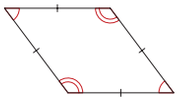
6



7



8

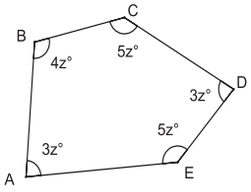


نموونە 3

9 پیڤانا هەرگۆشەیەکا ژ ناڤدا یا پێنج لایێ بەرامبەر بهەژمێرە

10 پیڤانا هەرگۆشەیەکا ژ ناڤدا یا دووازدە لایەکی ڕێك بهەژمێرە.

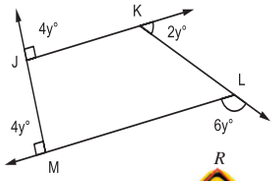
11 سەرجەمێ پیڤانێن گۆشەیێن ژ ناڤدایی 20 لایەکێ کومد بهەژمێرە.



نموونە 4

12 بەهایێ y د چەندلایێ بەرامبەردا بهەژمێرە.

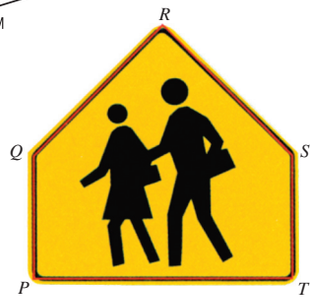
13 پیڤانا هەرگۆشەیەکا ژ دەرڤەی پێنج لایەکی ڕێك بهەژمێرە.



نموونە 5 **ئارامیا گشتی** تابلۆیێ ڕێنمایێ هاتن و چۆنێ یێ بەرامبەر بکاربینە بۆ شیکارکرنا هەردوو پرسیارێن **14** و **15**.

14 ناڤێ چەندلایی ل دووڤ لایێن وی بێژە.

15 پیڤانا $\hat{Q}$ و $\hat{S}$ بهەژمێرە هەکەر بزانی کۆ $\hat{P}$ و $\hat{R}$ و $\hat{T}$ گۆشەیێن وەستاون و $\hat{Q} \cong \hat{S}$



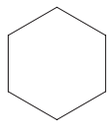
بجهئینان

ڕاهێنانێن ئازاد

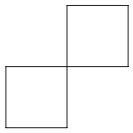
بۆ شیکارکرنا بەرێ خۆ بدە نموونە	پرسیاران
1	18–16
2	21–19
3	24–22
4	26–25
5	28–27

دیاربکە ئەرێ هەرشێوەیەکی ل خوارێ دبیتە چەندلا یان نە، ناڤێ شێوەیێ بێژە هەکەر چەندلابوو

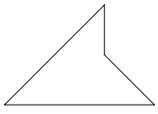
16



17

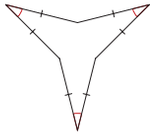


18

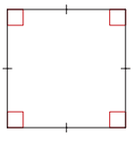


دیاربکە ئەرێ چەند لایێ ڕێکە یان نە، ناڤچالە یان کومدە

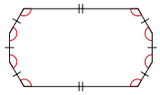
19

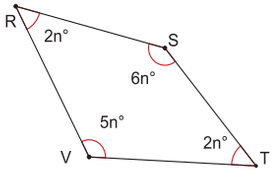


20



21





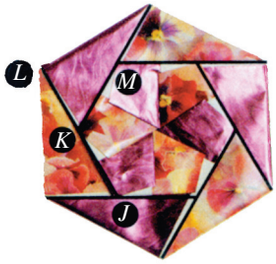
22 پێڤانا هەرگۆشەیەکا ژ ناڤدا یا چەندلایێ بەرامبەر بهەژمێرە

23 پێڤانا هەر گۆشەیەکا ژ ناڤدایا 18 لایەکی ڕێك بهەژمێرە.

24 سەرجەمێ پێڤانێن گۆشەییێن ژ ناڤدایی حەفت لایەکی بهەژمێرە.

25 پێڤانا هەرگۆشەیەکا ژ دەرڤە یا نەهلایەکی ڕێك بهەژمێرە.

26 هەکەر پێڤانێن گۆشەییێن ژ دەرڤەی پێنج لایەکی $2a°، 2a°، 10a°، 4a°، 5a°$ بن، ئەرێ بهایێ a چەندە؟

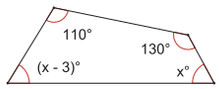


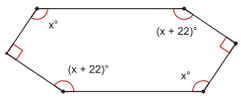
وێنەیێ بەرامبەر بۆ شیکارکرنا پرسیارییێن 27 و 28 بکاربینە.

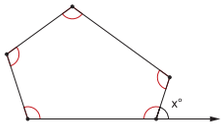
27 بهایێ $m\,\widehat{JKM}$ بهەژمێرە

28 بهایێ $m\,\widehat{MKL}$ بهەژمێرە

جەبر: **بهایێ x د هەر شێوەکیدا بهەژمێرە:**

29


30


31


ژمارا لایێن ئەوێ چەندلایێ بهەژمێرە کو یێ گونجای بیت دگەل وەسفکرنێ

32 پێڤانا هەر گۆشەیەکا ژ ناڤدا یەکسان بیت ل گەل پێڤانا هەر گۆشەیەکا ژ دەرڤە

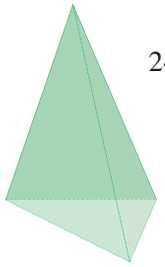
33 پێڤانا هەر گۆشەیەکا ژ ناڤدا یەکسان بیت ل گەل چارچارانێ پێڤانا هەر گۆشەیەکا ژ دەرڤە

34 پێڤانا هەر گۆشەیەکا ژ دەرڤە یەکسان بیت $\frac{1}{8}$ ی پێڤانا هەر گۆشەیەکا ژ ناڤدا

ناڤێ وی چەندلایی دیاربکە کو سەرجەمێ پێڤانێن گۆشەییێن وی ژ ناڤدا یەکسان بیت.

35 540°　**36** 900°　**37** 1800°　**38** 2520°

پێنگاڤێن جۆراوجۆر ژمارا لایان و پێڤانا گۆشەیا ژ ناڤدا بۆ وی چەنلایێ ڕێك چەندە؟ هەکەر بزانن پێڤانا گۆشەیا ژ دەرڤە یەکسان بیت:



39 120°　**40** 72°　**41** 36°　**42** 24°

43 **شاشی دشیکاریّ دا** کیژ دەرئەنجام یا شاشە؟ کانێ شاشی؟

أ وێنەیێ بەرامبەر چەندلایێ دنوێنت

ب وێنەیێ بەرامبەر چەندلایێ نا نوێنت

44 **خەملاندن:** وێنەیێ چەندلایێ بکێشە هەکەر خالێن سەرێن وی ئەڤەبن: $A(-2, -6)$ و $B(-4, -1)$ و $C(-1, 2)$ و $D(4, 0)$ و $E(3, -5)$ پێڤانا هەرگۆشەیەکا ژ ناڤدا بخەملینە، چ دبێژی دەربارەی گۆشەییێن ئەڤی چەندلای؟ گۆشە پێڤی بکاربینە بۆ پێڤانا قان گۆشان و بەرسڤێن بەرێ ساخبکە

45 ئەڤێن ل خوارێ پێداین لسەر پێڤانێن گۆشەییێن ئەوی پارچا کوارتزێ بەرامبەر

$m\,\hat{E} = m\,\hat{D} = 130°$، $m\,\hat{B} = 125°$، $m\,\hat{A} = 95°$

$m\,\hat{E} = m\,\hat{D} = m\,\hat{G}$

أ ناڤێ چەندلایێ $ABCDEFG$ بێژە

ب سەرجەمێ پێڤانێن گۆشەییێن ژ ناڤدایی چەنلایێ چەندە؟

ج $m\hat{F}$ بهەژمێرە.

46 ناڤێ چەندلایێ ڕێك دیاربكە، هەكەر چێوەیێ وی 45 m بیت و درێژیا لایەكی ژ لایێن وی 7.5 m بیت.

ویَنەیێ ئەڤان بكێشە:

47 چار لایەكی ڕێك

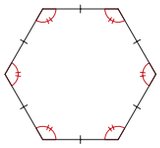
48 حەفت لایەكی ناڤچال یێ ڕێك

49 پێنج لایەكی كومد نەیێ ڕێك

50 چەندلایەك، لایێن وی یەكسان بن و گۆشەیێن وی جووت بن

51 **بنڤیسە:** زاراڤێن وانێ بكاربینە بۆ ناڤكرنا چەندلایێ بەرامبەر كو هەموو سیفەتێن گونجای بخوڤە بگریت.

52 **هزركرنا ڕەخنەگر:** بزێدەبوونا ژمارا چەندلایەكی ڕێك، ئەوچەندلایە بۆ كیژ شێوەیێ ئەندازەیی نێزیكدبت؟

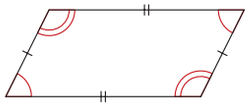


ئامادەكرن بۆ ئەزموونێ

53 شێوەیێ بەرامبەر كیژ سیفەتێن ل خوارێ بخوڤە دگرت

I چارلا　　II قوپاو　　III ڕێك

Ⓐ بتنێ I　Ⓑ بتنێ II　Ⓒ I و II　Ⓓ I و III



54 16 لایێ ڕێك كیژ سیفەتێ ل خوارێ تێدانینە

Ⓐ چەندلایەكی كومدە　　Ⓒ سەرجەمێ پیڤانێن گۆشەیێن ژ ناڤدا 2 880°

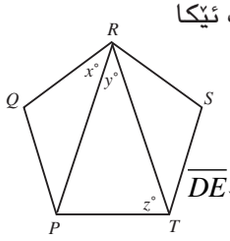
Ⓑ هەموو لایێن وی جووتن　　Ⓓ سەرجەمێ گۆشەیێن ژ دەرڤە 360°

55 د چارلایێ $ABCD$ دا $m\hat{C}$ چەندە؟ ئەگەر بزانی $m\hat{A}=45°$ و $m\hat{B}=111°$ و $m\hat{C}=2m\hat{D}$

Ⓐ 24°　Ⓑ 68°　Ⓒ 102°　Ⓓ 136°

بەرهنگاری و بەرفرەهكرن

56 پیڤانێن گۆشەیێن ژ ناڤدا یێ پێنج لایەكی كومد دبنە چەند چارانی ئێك ل دووڤ ئێكا ژمارەی بۆ ژمارە 4 ، پیڤانێن گۆشەیێن ئەوێ پێنج لایێ بهەژمێرە.



57 بهایێ x و y و z ل پێنج لایێ بەرامبەر بهەژمێرە

58 **پێنگاڤێن جۆراوجۆر** چەندلایێ $ABCDEFGHJK$ دهـ لایەكی ڕێكە هەردوولا $\overline{AB}$ و $\overline{DE}$ هاتنە دریژكرن و ل خالا L ژ دەرڤەی چەندلایێ گەهشتنە ئێكودوو $m\widehat{BLD}$ بهەژمێرە.

59 **هزركرنەكا ڕەخنەگر:** ئەرێ سەلمینراوا سەرجەمێ پیڤانێن گۆشەیێن ژ ناڤدا یێ چەندلایی یا دروستە بۆ چەندلایێ ناڤچال؟ بۆ پاڵپشتیا بەرسڤا خۆ ویَنەیێ شێوەیەكی بكێشە.

پێداچوونا لوولپێچی

بكارئینانا شیتەلكرنێ هەرهاوكێشەیەكا ل خوارێ شیكاربكە (پۆلێن پێشتر)

60 $x^2+3x-10=0$　**61** $x^2-x-12=0$　**62** $x^2-12x=-35$

ل پرسیارێن 63 هەتا 65 درێژیا دوولایێن سێگۆشەیەكێ هاتینە دیاركرن، دڤێت تو دوو ڕادەیان دیاربكەی كو درێژیا لایێ سێیێ x بكەڤتە دناڤبەرا واندا. (پۆلێن پێشتر)

63 4 ؛ 4　**64** 12 ؛ 6　**65** 7 ؛ 3

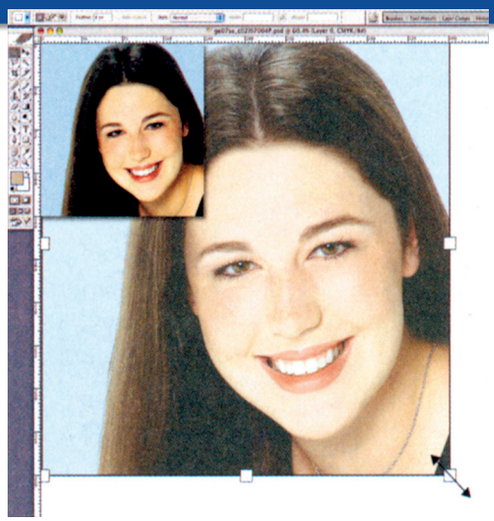
د سێگۆشەیا گۆشەوەستاودا 90 – 60 – 30، ئەڤان بهەژمێرە (پۆلێن پێشتر)

66 درێژیا ژێڕیێ وێ، هەكەر درێژیا لایێ بچووك 6 یەكەبیت.

67 درێژیا لایێ مەزن، هەكەر درێژیا ژێڕیێ 10 یەكە بیت.

3–1 هاوریژەیا ئەندازەیی

Dilation



ئامارمانج

- بجهئینانا سیفەتێن هاوشێوەبوونێ د ڕووتەختێ پۆتانی دا
- سەلماندنا هاوشێوەبوونا دوو شێوازێن ئەندازەیی بکارئینانا پۆتانان.

کێ ئەڤێ بکاردئینیت؟

پرۆگرامسازیێ کومپیوتەرێ پۆتانان بکاردئینیت بۆ مەزنکرن و بچووککرنێ

زاراڤ
Vocabulary

هاوریژەیا ئەندازەیی
Dilation

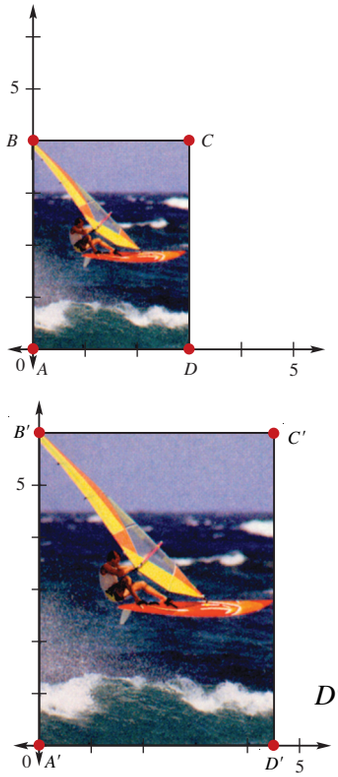
ڕێژەیا جهگۆهۆرکێ
Scale factor

گەلەك ژ وان وێنەیێن تو لسەر تۆرا ئەنتەرنێتێ دبینی پشت بەست دبن ب شێوەیێ JPEG (format) ، چونکی ئەو گۆهۆرین و ڤەگوهاستنا وێنەیان ساناهی دکەت. دەمێ تو ب ماوسی گۆشەیەکا وێنەی رادکێشی ژ شێوەیێ JPEG ب مەرەما مەزنکرن یان بچووککرنا وی، بەرنامە پیڤانێن ئەوی وێنەیێ بدەستکەفتی بکارئینانا پۆتانان و هاوشێوە بوونێ ڕێکدکەت.

هاوریژەیا ئەندازەیێ Dilation: جهگوهۆڕەکا ئەندازەییە پیڤانێن شێوەیێ ئەندازەیی دگۆهۆرت ل گەل پارستنا شێوەیێ بنەرەت. شێوەیێ بنەڕەتی و وێنەیێ وی دڤێ جهگۆهۆرکێ دا دوو شێوەیێن هاوشێوەنە،ڕێژەیا ئەڤێ **جهگۆهۆرکا ئەندازەیی Scale factor** ژمارەیەکا راستی یامووجەبە $k \neq 1$ ڕادەیێ مەزنکرن (یان بچووکرنا) وێنەیێ ل گۆر یێ بنەڕەت دیاردکەت. وێنەیێ خالا (x, y) ب هاوریژەیەکا ئەندازەیی k بیت دبیتە (kx, ky)، هاوریژەیا ئەندازەیی دێ مەزنکرن بیت هەکەر $k > 1$ و دێ بچووککرن بیت هەکەر $k < 1$.

نموونـــــە 1 بجهئینان لسەر پرۆگرامسازیا کۆمپیوتەرێ

وێنەیێ بەرامبەر جهێ وێنەیێ ژ شێوەیێ JPEG دیار دکەت، سنووریێن وێنەیێ پەیدابوویی ژ جهگۆهۆرکا وێنەیێ بنەرت ب مەزنکرنەکێ ڕێژا وێ $\frac{3}{2}$ بکێشە.



پێنگاڤا (1)ێ: پۆتانێ هەر سەرەکی بنەرەت $A(0, 0)$ ، $B(0, 4)$ ، $C(3, 4)$ ، $D(3, 0)$ ، لێکبدە $\frac{3}{2}$

لاکێشەیا	لاکێشەیا
$ABCD$	$A'B'C'D'$

$$A(0, 0) \rightarrow A'\left(0 \times \tfrac{3}{2}, 0 \times \tfrac{3}{2}\right) \rightarrow A'(0, 0)$$

$$B(0, 4) \rightarrow B'\left(0 \times \tfrac{3}{2}, 4 \times \tfrac{3}{2}\right) \rightarrow B'(0, 6)$$

$$C(3, 4) \rightarrow C'\left(3 \times \tfrac{3}{2}, 4 \times \tfrac{3}{2}\right) \rightarrow C'(\tfrac{9}{2}, 6)$$

$$D(3, 0) \rightarrow D'\left(3 \times \tfrac{3}{2}, 0 \times \tfrac{3}{2}\right) \rightarrow D'(\tfrac{9}{2}, 0)$$

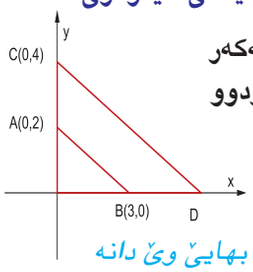
پێنگاڤا (2)ێ: خالێن $A'(0, 0)$ ، $B'(0, 6)$ ، $C'(\frac{9}{2}, 6)$ ، $D'(\frac{9}{2}, 0)$ وێنە بکە پاشی وێنەیێ لاکێشەیێ بکێشە

خالەکا چاڤدێریێ

1. **دێ چ بیت هەکەر** سنووریێ وێنەیێ پەیدابوویی ژ جهگوهۆڕەکا وێنەیێ بنەڕەت ب بچووککرنەکێ بکێشی ڕێژەیا وێ $\frac{1}{2}$ بیت.

نموونـــــه 2

هەژمارتنا پۆتانێ شێوەیەکی ئەندازەیی هاوشێوە ل گەل شێوەیەکی دیارکری.



پۆتانێ خالا D و ریژا ئەوێ هاوریژەیا ئەندازەیی بهەژمێرە هەکەر خالا B بۆ خالا D بگۆهۆریت، و جۆرێ وێ دیاربکە هەکەر هەردوو سێگوشە AOB و COD دهاوشێوەبن.

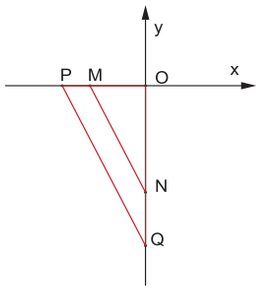
چونکی هەردوو سێگۆشە دهاوشێوەنە، ڤێجا $\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}$

$\frac{2}{4}=\frac{3}{OD}$ ل جهێ هەر پێڤانەکێ بهایێ وێ دانە

$2OD=12$ لێکدانا هەردوولایان دابەشی $(\div)$

$OD=6$ بکە.

چونکی D لسەر تەوەرێ x ڤێجا y سفرە. چونکی $OD=6$ بۆ یێ ئێکێ یەکسانە 6 ئانکو $x=6$ ، پۆتانێ D دبیتە $(6,0)$ چونکی $(3\times 2,0\times 2)=(6,0)$ ڤێجا ریژا جهگوهۆڕکێ دبیتە 2 ، و مەزنکرنە

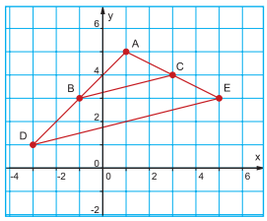


خالا چاڤدێریێ

2. هەردوو سێگۆشە MON و POQ دهاوشێوەنە دەمێ $M(-10,0)$ و $P(-15,0)$ و $Q(0,-30)$ بن. پۆتانێ N و ریژا هاوریژەیێ بهەژمێرە، پاشی جۆرێ وێ دیاربکە

نموونـــــه 3

سەلماندنا هاوشێوەبوونا دوو سێگۆشەیان ب هۆیێ پۆتانان.



پێدایی: $A(1,5)$ ، $B(-1,3)$ $C(3,4)$ $D(-3,1)$ $E(5,3)$

داخوازی: بسەلمینە هەردوو سێگۆشە ABC و ADE دهاوشێوەنە.

پێنگاڤا (1)ێ: خالان دیاربکە پاشی هەردوو سێگۆشەیان بکێشە.

پێنگاڤا (2)ێ: یاسایا دووریێ بۆ هەژمارتنا درێژیا لایان بکاربینە.

$AB=\sqrt{(-1-1)^2+(3-5)^2}$
$=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$AC=\sqrt{(3-1)^2+(4-5)^2}$
$=\sqrt{5}$

$AD=\sqrt{(-3-1)^2+(1-5)^2}$
$=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$AE=\sqrt{(5-1)^2+(3-5)^2}$
$=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

پێنگاڤا (3)ێ: رێژا هاوشێوەبوونێ بهەژمێرە.

$\frac{AB}{AD}=\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$
$=\frac{2}{4}$
$=\frac{1}{2}$

$\frac{AC}{AE}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$
$=\frac{1}{2}$

چونکی $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$ ڤێجا هەردوو سێگوشە دێ هاوشێوەبن $\widehat{BAC}\cong\widehat{DAE}$

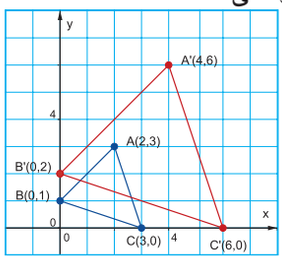
خالا چاڤدێریێ

3. **پێدایی:** $R(-2,0)$ و $S(-3,1)$ و $T(0,1)$ و $U(-5,3)$ و $V(4,3)$.
داخوازی: بسەلمینە هەردوو سێگۆشە RST و RUV دهاوشێوەنە.

نموونـــــه 4 بکارئینانا سێ لایان (لا، لا، لا) بۆ هاوشێوەبوونا سێگۆشان

سێگۆشەیا ABC بکێشە کو وێنەیە بۆ سێگۆشەیا $A'B'C'$ ب مەزنکرنەکێ ڕێژەیا وێ 2 بیت. هاوشێوەبوونا هەردووسێگۆشەیان ساخبکە

پێنگاڤا (1)ێ: بۆ هەژمارتنا پۆتانێ سەرێ سێگۆشەیان $A'B'C'$ ، پۆتانێ هەرخالەکێ لێکبدە ل 2



$$A(2,3)\rightarrow A'(2\times 2,3\times 2)\rightarrow A'(4,6)$$
$$B(0,1)\rightarrow B'(0\times 2,1\times 2)\rightarrow B'(0,2)$$
$$C(3,0)\rightarrow C'(3\times 2,0\times 2)\rightarrow C'(6,0)$$

پێنگاڤا (2)ێ: وێنەیێ سێگۆشا $A'B'C'$ بکێشە.

پێنگاڤا (3)ێ: یاسایا دووریێ بکاربینە بۆ هەژمارتنا درێژیا لایان.

$$AB=\sqrt{(2-0)^2+(3-1)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$
$$A'B'=\sqrt{(4-0)^2+(6-2)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$
$$BC=\sqrt{(3-0)^2+(0-1)^2}=\sqrt{10}$$
$$B'C'=\sqrt{(6-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$
$$AC=\sqrt{(3-2)^2+(0-3)^2}=\sqrt{10}$$
$$A'C'=\sqrt{(6-4)^2+(0-6)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

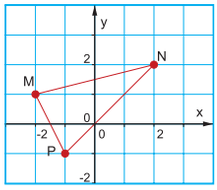
پێنگاڤا (4)ێ: ڕێژەیا هاوشێوەبوونێ بهەژمێرە.

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=2 \qquad \frac{B'C'}{BC}=\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=2 \qquad \frac{A'C'}{AC}=\frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=2$$

چونکی $\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}$ ڤێجا هەردوو سێگۆشە $A'B'C'$ و ABC د هاوشێوەنە.

خالا چاڤدێری

4. وێنەیێ سێگۆشەیا MNP ب مەزنکرنەکێ ڕێژەیاوێ 3 بیت بکێشە. پاشی ساخبکە کو سێگۆشە و وێنەیێ مەزنکرنێ د هاوشێوەنە



هزربکە و گەنگەشێ بکە

1. پۆتانێن سەرێن سێگۆشەیا JKL دبنە $J(0,0)$ و $K(0,2)$ و $L(3,0)$ و پۆتانێن سەرێن وێنەیێ ڤێ سێگۆشێ ب هاوڕێژەیا ئەندازەیی دبنە $J'(0,0)$ و $K'(0,8)$ و $L'(12,0)$

چەوا هاوڕێژەیا ئەندازەیی دێ هەژمێری؟ و چەوا جۆرێ وێ دێ دیارکەی؟

2. **ڕێکخەربە**: خشتێ ل خوارێ دووبارە بنقیسە و تەمامبکە، دەهەرچارچوقەکێدا ئەوا داخوازکری بنقیسە

فێربە و هزربکە

پێناســـــە	سیفەت
مەزنکرن و بچووککرن	
نموونـــــە	دژە نموونـــــە

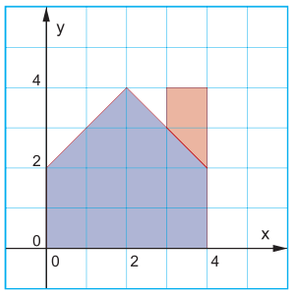
3-1 ڕاهێنان

ڕاهێنانێن ئاراستەکری

1 **زاراف:** ڕێژەی پێڤانێن وێنەیێ شێوەیەکا ئەندازەیی ب مەزنکرنێ یان بچووککرنێ دبیتە ؟ (هاوڕێژەیا ئەندازەیی، ڕێژا هاوریژەیا ئەندازەیی).

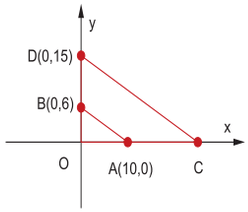
نموونـــــە 1

2 **نەخشەکێشانا وێنەیێ Graphic Design روونکرنێ**
ئەندازیارەکی نەخشا شێوەیێ بەرامبەری نەخشەکێشا دا ببیتە دروشمەك بۆ دەستگەهەکی. ڕێڤەبەرێ دەستگەهێ داخوازی ژ ئەندازیاری کر ئەوی دروشمی ب ڕێژا 2 مەزن بکەت. وێنەیێ دروشمی پشتی مەزنکرنێ بکێشە.

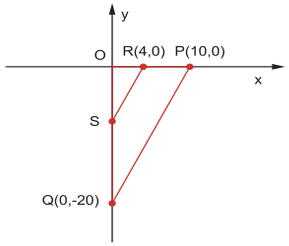


نموونـــــە 2

3 هەردوو سێگۆشە AOB و COD دهاوشێوەنە، پۆتانێ خالا C و ڕێژا هاوڕێژەیا ئەندازەی ئەوا سێگۆشەیا AOB بۆ سێگۆشا COD دگۆهۆرت بهەژمێرە، و جورێ ئەڤێ هاوریژەیا ئەندازەی چییە؟



4 هەردوو سێگۆشە ROS و POQ د هاوشێوەنە پۆتانێ خالا S و ڕێژا ئەو هاوریژەیا ئەندازەی ئەوا سێگۆشا POQ بۆ سێگۆشەیا ROS دگۆهۆرت بهەژمێرە، و جۆرێ ئەڤێ هاوریژەیا ئەندازەیی چییە؟



نموونـــــە 3

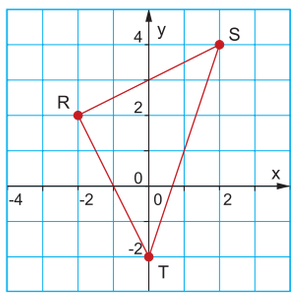
5 **پێدایی:** $A(0,0)$ و $B(-1,1)$ و $C(3,2)$ و $D(-2,2)$ و $E(6,4)$.
داخوازی: بسەلمینە هەردوو سێگۆشە ABC و ADE دهاوشێوەنە.

6 **پێدایی:** $J(-1,0)$ و $K(-3,-4)$و $L(3,-2)$ و $M(-4,-6)$ و $N(5,-3)$.
داخوازی: بسەلمینە هەردوو سێگۆشە JKL و JMN دهاوشێوەنە.

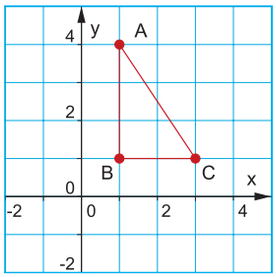
نموونـــــە 4

پێنگاڤێن جۆراوجۆر: **وێنەیێ هەرسێگۆشەیەکێ ب مەزنکرنەکێ ب ڕێژەیا دیارکری بکێشە، پاشی ساخبکە کو وێنە و سێگۆشەیا بنەڕەت دهاوشێوەنە.**

7 ڕێژە $\frac{3}{2}$



8 ڕێژە 2

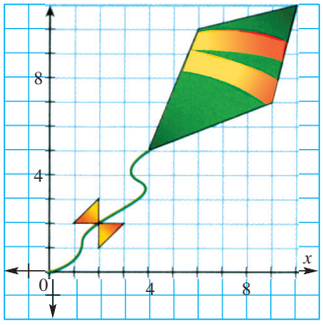


راهێنان و شیکارکرنا پرسیاران

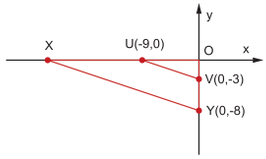
راهێنانێن ئازاد

پرسیاران	بۆ شیکارکرنا بەڕێ خو بدە نموونە
10	1
12–11	2
14–13	3
16–15	4

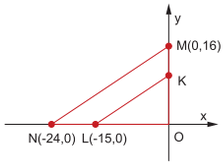
9 **ڕێکلام:** بریکارێ بەلاڤکرنا ڕێکلامێ وێنەیێ بەرامبەر بۆ دروشمێ مەها کڕین و فرۆتنێ وێنەکر، بریکاری دڤێت ئەوی دروشمی ب ڕێژەیا نیڤێ بچووك بکەت و لسەر کارتان چاپ بکەت، وێنەیێ ئەوی دروشمی پشتی بچووککرنێ بکێشە.



10 هەردوو سێگۆشە UOV و XOY دهاوشێوەنە، پۆتانێ X و ڕێژەیا ئەندازەیی ئەوا سێگۆشا UOV بۆ سێگۆشا XOY دگۆهۆرت بەهەژمێرە، و جۆرێ ئەوێ هاوڕێژەیا ئەندازیی دیاربکە.



11 هەردوو سێگۆشە MON و KOL دهاوشێوەنە، پۆتانێ K و ڕێژەیا هاوڕێژەیا ئەندازەیی ئەوا سێگۆشا MON بۆ سێگۆشا KOL دگۆهۆرت بەهەژمێرە، و جۆرێ ئەوێ هاوڕێژەیا ئەندازەیی دیاربکە.



12 **پێدایی:** $D(-1, 3)$ و $E(-3, -1)$ و $F(3, -1)$ و $G(-4, -3)$ و $H(5, -3)$

داخوازی: بسەلمینە هەردوو سێگۆشە DEF و DGH دهاوشێوەنە.

13 **پێدایی:** $M(0, 10)$ و $N(5, 0)$ و $P(15, 15)$ و $Q(10, -10)$ و $R(30, 20)$

داخوازی: بسەلمینە هەردوو سێگۆشە MNP و MQR دهاوشێوەنە.

پێنگاڤێن جۆراوجۆر: وێنەیێ هەرسێگۆشەیەکێ. پشتی جهگۆهۆرکیا وێ ب مەزنکرنێ یان ڕێژەیا دیارکری k بکێشە، پاشی ساخبکە کو وێنە و سێگۆشەیا بنەڕەت دهاوشێوەنە.

14 $J(-2, 0)$ ، $K(-1, -1)$ ، $L(-3, -2)$ ؛ $k = 3$.

15 $M(0, 4)$ ، $N(4, 2)$ ، $P(2, -2)$ ؛ $k = \frac{1}{2}$.

16 **هزرکرنا ڕەخنەگر:** ئەرێ ئەو جهگۆهۆرکاێەندازەیی ئەوا خالا (x, y) دگۆهۆرت بۆ خالا $(2x, 4y)$ دبیتە هاوڕێژەیا ئەندازەیی؟ بەرسڤا خۆ ڕوونبکە.

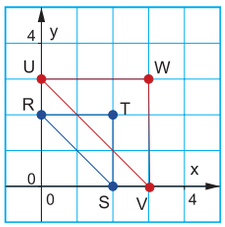
17 **شاشی دشیکارکرنێدا:** ل خوارێ دوو شیکارکرن هەنە بۆ هەژمارتنا ئەوێ ڕێژا هاوڕێژەیا ئەندازەیی کو سێگۆشەیا RST بۆ سێگۆشا UVW دگۆهۆرت، کیژ وان نەیا دروستە؟ بەرسڤا خۆ ڕوونبکە.

أ

بۆ گوهۆڕینا سێگۆشەیا RST بۆ سێگۆشا WVU پۆتانێ هەر خالەکێ لێکدایە ل $\frac{3}{2}$ ، ڕێژا هاوڕێژەیا ئەندازەیی $\frac{3}{2}$

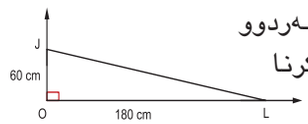
ب

ڕێژا هاوڕێژەیا ئەندازەیی دبیتە ڕێژە ل ناڤبەرا لایێن هەردوو سێگۆشان $\frac{RT}{UW} = \frac{3}{2}$ ئانکو ڕێژە دبیتە $\frac{2}{3}$



18 **بنڤیسە:** سێگۆشەیا $A'B'C$ وێنەیە بۆ سێگۆشەیا ABC ب هاوڕێژەیەکا ئەندارەیی، پەیوەندی چییە لناڤبەرا ڕێژا ئەندازەیی و ڕێژا هاوشێوەبوونا هەردوو سێگۆشان؟ بەرسڤا خۆ ڕوونبکە.

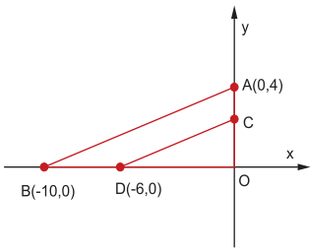
19 پۆتانێ هەردوو خالان J و L ، دیاربکە، هەکەر هەر یەکەیەك لسەر هەردوو تەوەرێن پۆتانان بەرامبەر $60\ cm$ بیت. وێنەیێ سێگۆشەیێ و مەزنکرنا وێ دروتەختێ پۆتانیدا ب ڕێژا 3 بکێشە.



20 کیژ پۆتانی بۆ خالا C دێ هەلبژێری هەتا هەردوو سێگۆشە COD و AOB دهاوشێوەبن.

أ) $(0, 2.4)$ ج) $(0, 3)$

ب) $(0, 2.5)$ د) $(0, 3.6)$



21 سێگۆشا $A'B'C'$ مەزنکرنە بۆ سێگۆشا ABC ب ڕێژا 2. هەکەر چێوەیێ ABC 60 یەکەبیت ئەرێ چێوەیێ سێگۆشەیا $A'B'C'$ چەندە؟

أ) 30 یەکە ب) 60 یەکە ج) 120 یەکە د) 240 یەکە

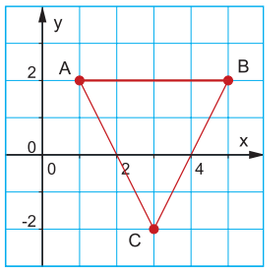
22 کیژ سێگۆشا DEF یاهاوشێوەیە بۆ سێگۆشەیا ABC .

أ) $D(1, 2)$ ، $E(3, 2)$ ، $F(2, 0)$

ب) $D(-1, -2)$ ، $E(2, -2)$ ، $F(1, -5)$

ج) $D(1, 2)$ ، $E(5, 2)$ ، $F(3, 0)$

د) $D(-2, -2)$ ، $E(0, 2)$ ، $F(-1, 0)$



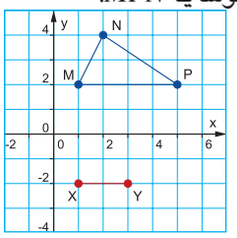
23 **بەرسڤەکا کورت:** $\overline{AB}$ ب ڕێژا 3 هاتە مەزنکرن، کو $A(3, 2)$ و $B(7, 5)$ دڕێژیا $\overline{A'B'}$ چەندە؟

بەرهنگاری و بەرفرەهکرن

24 چەند سێگۆشە هەنە کو لایەکی وان $\overline{XY}$ بیت و هاوشێوەبن بۆ MNP ؟

25 هەردوو پۆتانێن Z دیاربکە هەکەر سێگوشەیا XYZ یا هاوشێوەبیت بۆ سێگۆشەیا MPN.

26 دوولایێن لاکێشەکێ دکەڤنە سەر هەردوو تەوەرێن پۆتانێ. هەکەر سەرەکێ وێ بکەفتە سەر خالا بنەڕەت و سەرێ دی بکەفتە سەر راستە هێلێ $y = 2x$ ، بسەلمینە کو هەردوو لاکێشە یێن وان مەرجێن دیارکری ساخدکەن دێ دهاوشێوەبن.

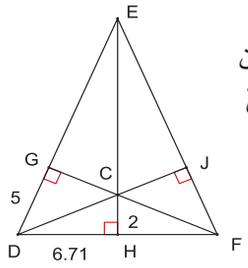


27 سەرێن سێگۆشەیا ABC ئەڤەنە $A(0, 1)$ و$B(3, 1)$ و$C(1, 3)$ دوو شێوەیان بۆ سەرێ F دیاربکە هەکەر $D(1, -1)$و$E(7, -1)$ بن دا هەر دوو سێگۆشە د هاوشێوەبن.

پێداچوونا لوولپێچی

لاسەنگەیەکێ بۆ نواندنا هەر بارەکی بنڤیسە (پۆلێن پێشتر)

28 کرێنەك ب کێماسی 250kg هەلدگریت. دوو تەن بارستایا هەر ئێك ژ وان 50kg ب هەردوور رەخێن باسکێن کرینێ ڤە هەلاویست هەکەر بارستایێ باسکێ کرینێ 5kg بیت، هێمایێ x بۆ وێ بارستایێ دشیاندا بهێتە زێدەکرن بۆ باسکی دانە. لاسەنگەیەکێ بنڤیسە کو x پاسەدان بکەت.

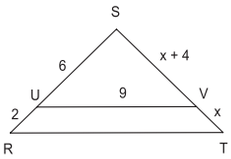


دڕێژیا هەر پارچە راستە هێلەکی بهەژمێرە هەکەر $\overline{DE} \cong \overline{FE}$

29 $\overline{HF}$ **30** $\overline{JF}$ **31** $\overline{CD}$

دڕێژیا هەر پارچە راستە هێلەکی بهەژمێرە، هەکەر هەردوو سێگۆشە RST و USV دهاوشێوەبن

32 $\overline{RT}$ **33** $\overline{VT}$ **34** $\overline{ST}$



4-1 ئاراستەبڕ

Vectors

ئارمانج

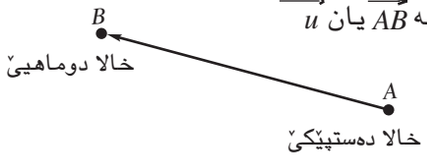
• هژمارتنا درێژ یا ئاراستەبڕی و ئاراستەیێ ئاراستەبڕی.

ئاراستەبڕان و کۆمکرنا وان بکاردئینن بۆ شیکارکرنا پرسیارێن ژیانا ڕۆژانە

کێ ئەڤی بکاردئینیت؟

ئەوێن بەریکانێ ب بەلەمان دروویاراندا دکەن، ئاراستەبڕان بکاردئینن، دا ئاراستەیێ ڕێڕەوێ ئاڤێ بەرچاڤ وەربگرن دەمێ بەریکانێ ئەنجام ددەن. (نموونە ٥).

تو دشێی ئاراستەبڕان بکاربینی بۆ نواندنا لەزێ و ئاراستەیێ تەنەکی دلڤیت. **ئاراستەبڕ Vector** برەکە ب درێژیێ و ئاراستەی دهێتە دیارکرن. تۆ دشێی ئاراستەبڕەکی ب پارچە راستە هێلەکی ئاراستەکری وێنە بکەی.بۆ نواندنا ئاراستەبڕی ل خوارێ بنڤیسە $\overrightarrow{AB}$ یان $\vec{u}$



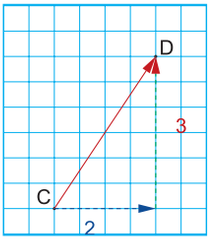
زاراڤ
Vocabulary

ئاراستەبڕ
Vector

پێکهاتێ ئاراستەبڕی
Component

درێژیا ئاراستەبڕی
Magnitude

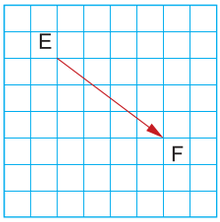
ئاڕاستەیێ ئاراستەبڕی
Direction



هەروەسا تو دشێی ناڤێ ئاڕاستەبڕی بکارئینانا پێکهاتێن وی بێژی.
هەردوو پێکهاتێن ئاراستەبڕی Components دوو ژمارەنە، یێ ئێکێ دەربرینا مەودایێ ئاسۆیی دکەت، و یێ دوو دەربرینا مەودایێ ستوونی دکەت بۆ ڤەگوهاستنێ یا ژ خالا دەستپێکێ بۆ خالا دوماهیا ئاراستەبڕی. پێکهاتیێ ئاراستەبڕی یێ ئێکێ x بیت ویێ دووێ y بیت بشێوەیێ $\langle x, y \rangle$ دئێتە نڤیسین. بۆ نموونە $\langle 2, 3 \rangle$ بۆ نواندنا $\overrightarrow{CD}$ دهێتە نڤیسین.

نموونـــــە 1 نڤیسینا ئاراستەبڕی پێ هەردوو پێکهاتێن وی

هەرئاراستەبڕەکی پێ هەردوو پێکهاتنێن وی بنڤیسە



أ ئاراستەبڕی $\overrightarrow{EF}$

بۆ ڤەگوهاستنێ ژ خالا E بۆ خالا F ، 4 یەکەیان ئاسویی بەرەڤ ڕەخێ ڕاستێ و 3 یەکەیان بەرەڤ خوارێ بلڤە. پێکهاتێ ئێکێ دبیتە 4+، و پێکهاتێ دووێ دبیتە 3− ،ئاراستەبڕێ $\overrightarrow{EF}$ دبیتە ئاراستەبڕێ $\langle 4, -3 \rangle$.

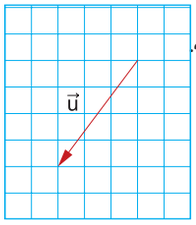
ب ئاراستەبڕێ $\overrightarrow{PQ}$ دەمێ $P(7, -5)$ و $Q(4, 3)$

پۆتانێ خالا دەستپێکێ ژ پۆتانێ خالا دوماهیێ دەربکە. ل جهێ هەر پۆتانەکێ بهایێ وی دانە

$$\overrightarrow{PQ} = \langle x_2 - x_1,\ y_2 - y_1 \rangle$$
$$\overrightarrow{PQ} = \langle 4-7,\ 3-(-5) \rangle$$
$$\overrightarrow{PQ} = \langle -3,\ 8 \rangle$$

خالا چاڤدێری

1. هەر ئاراستەبڕەکی بێ هەردوو پێکهاتێن وی بنڤیسە



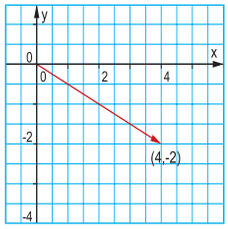
أ $\vec{u}$

ب $\overrightarrow{AB}$ دەمێ $A(-1, 1)$ ، $B(6, 2)$

درێژیا ئاراستەبڕی Magnitude ئەودوورییە کو دکەڤتە ناڤبەرا خالا دەستپێکێ و خالا دوماهیێ.
ئەڤ ژمارە دئێتە نڤیسین لسەر شێوەیێ $|\overrightarrow{AB}|$ یان $|\overrightarrow{v}|$
دەمێ ئاراستەبر بۆ نواندنا لەزا تشتەکی دلڤیت ب ئاراستەیەکی دیارکر دکاردئێت،درێژیا ئەوی ئاراستەبڕی دێ یا یەکسان بیت ب لەزا ئەوی تشتی، درێژیا ئەوی ئاراستەبڕێ لڤینا بەلەمێ دنوێنت دبیتە لەزا بەلەمێ.

نموونـــــە 2 هەژمارتنا درێژیا ئاراستەبڕی

وێنەیێ ئاراستەبڕی $\langle 4, -2\rangle$ د رووتەختێ پۆتانیدا بکێشە، درێژیا وی بهەژمێرە و بەرسڤێ بۆ نێزیکترین دەهئێك نێزیکبکە.

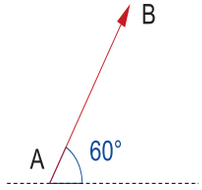


پێنگاڤا (1)ێ: وێنەیێ ئاراستەبڕێ بکێشە بکارئینانا خالا بنەرەت وەك خالا دەستپێکێ. خالا دوماهیێ $(4, -2)$

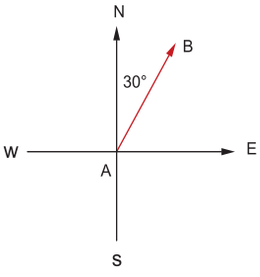
پێنگاڤا (2)ێ: درێژیا ئاراستەبڕی بهەژمێرە بکارئینانا یاسایا دووریێ
$$|\langle 4, -2\rangle| = \sqrt{(4-0)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{20} \approx 4.5$$

خالا چاڤدێریێ

2. وێنەیێ ئاراستەبڕی $\langle -3, 1\rangle$ د رووتەختێ پۆتانیدا بکێشە و درێژیا وی بهەژمێرە و بەرسڤێ بۆ نێزیکترین دەهئێك نێزیکبکە.



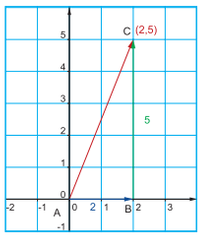
ئاراستەیێ ئاراستەبڕی Direction ئەو گۆشەیە کو دئێتە پێڤان ژ بەشێ موجەبێ تەوەرێ ئێکێ ب ئاراستەیێ بەروژڤاژیا لڤینا میلێ دەمژمێرێ.



هەروەسا دەربرین ژ ئاراستێ ئاراستەبڕێ دهێتەکرن ب دیارکرنا ئەوێ گوشا پێکدئێت ل گەل ئیکی ژ هەر چار ئارستەیان، رۆژهەلات، رۆژئاڤا، باکوور، باشوور. بۆ نموونە ئاراستێ ئاراستەبڕێ بەرامبەر $\overrightarrow{AB}$ دبیتە باکوور – 30° – رۆژهەلات.

نموونـــــە 3 هەژمارتنا ئاراستەیێ ئاراستەبڕێ

ئاراستەبڕێ $\langle 2, 5\rangle$ ئاراستەیێ لەزا بای دنوێنت، وێنەیێ ئاراستەبڕێ د رووتەختێ پۆتانیدا بکێشە، ئاراستەیێ وی بهەژمێرە و بۆ نێزیکترین پلە نێزیك بکە.



پێنگاڤا 1ێ: وێنەیێ ئاراستەبڕی درووتەختێ پۆتانیدا بکێشە بکارئینانا خالا بنەرەت وەك خالا دەستپێکێ، خالا دوماهیێ دبیتە $(2, 5)$

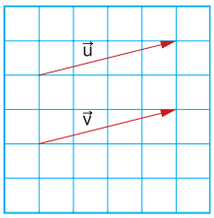
پێنگاڤا (2)ێ: ئاراستەیی بهەژمێرە، سێگۆشەیا و هستاو ABC بکێشە، ئەو گۆشا ئاراستەبڕ دگەل بەشێ موجەبێ تەوەرەێ ئێکێ پێکدهێت دبیتە $\hat{A}$
$\tan \hat{A} = \frac{5}{2}$، ژ ئەقێ دیاردبیت کو $m\hat{A} = \tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) \approx 60^\circ$

خالا چاڤدێریێ

3. ئاراستەبڕێ $\langle 7, 3\rangle$ هێزا ڕاکێشانێ بۆ ڕاکێشەرەکا دەریایێ کو گەشتەکا بارهەلگریا خراب بووی ڕادکێشت دنوێنت، وێنەیێ ئاراستەبڕێ درووتەختێ پۆتانیدا بکێشە، ئاراستەیێ وی بهەژمێرە و بۆ نێزیکترین پلە نێزیکبکە.

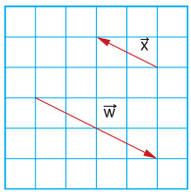
ئاگەهداریە!

بەرێ خۆ بدێ $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$ چونکی ئاراستەیێ یێ ئێکێ یا جیاوازە ژ ئاراستەیێ یێ دووێ.



دوو ئاراستەبڕ دێ **یەکسان بن** هەکەر هەردووان هەمان درێژی و هەمان ئاراستە هەبن، بۆ نموونە، $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$. ل دوو ئاراستەبڕێن یەکسان نە یا فەرە هەردووان هەمان خالا دەستپێکێ و هەمان خالا دوماهیێ هەبن.

$$|\overrightarrow{u}| = |\overrightarrow{v}| = 2\sqrt{5}$$



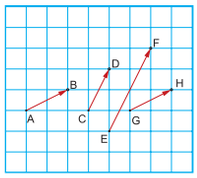
دوو ئاراستەبڕ دێ **تەریب بن** هەکەر ڕاستەهێلێن هەردووان ل گەل ئێکودوو تەریب بن، چێدبیت درێژیا دوو ئاراستەبڕێن تەریب درێژیا وان دجیاوازبن، بۆ نموونە، هەردوو ئاراستەبڕ $\overrightarrow{x}$ و $\overrightarrow{w}$ تەریبن. هەکەر دوو ئاراستەبڕ یەکسان بن، دێ دگەل ئێکدوو تەریب بن.

$$|\overrightarrow{w}| = 2\sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{x}| = \sqrt{5}$$

نموونە 4 دیارکرنا ئاراستەبڕێن یەکسان و ئاراستەبڕێن تەریب.

ل وێنەیێ بەرامبەر ئەڤان دیاربکە.



أ **ئاراستەبڕێن یەکسان**

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GH}$ *وان ئاراستەبڕێن هەمان درێژی و هەمان ئاراستە هەبن جوّدا بکە.*

ب **ئاراستەبڕێن تەریب**

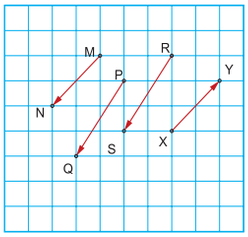
$\overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{GH}$ و $\overrightarrow{CD} \,//\, \overrightarrow{EF}$ *وان ئاراستەبڕێن هەمان ئاراستە هەبن یان ئاراستەیێن بەرۆڤاژی هەبن جوّدابکە*

خالا چاڤدێریێ

4. ل وێنەیێ بەرامبەر ئەڤان جوّدابکە

أ ئاراستەبڕێن یەکسان.

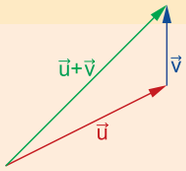
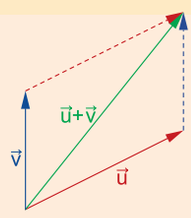
ب ئاراستەبڕێن تەریب.



بەرئەنجام Resultant ێ دوو ئاراستەبڕان، ئەو ئاراستەبڕە ئەوێ سەرجەمێ هەردووان دنوێنت. بۆ کوّمکرنا دوو ئاراستەبڕان ب ئەندازەی، تو دشێی ڕێیا ژ سەری بۆ دوماهیێ یان ڕێیا لاتەریبێ بکاربینی

فێربە و شرۆڤەبکە

کوّمکرنا ئاراستەبڕان

ڕێ	نموونە
ڕێیا ژ سەری بۆ دوماهیێ خالا دەستپێکا **ئاراستەبڕێ دووێ** لسەر خالا دوماهیا **ئاراستەبڕێ ئێکێ** دانە. **بەرئەنجام** ئەو ئاراستەبڕە ئەوێ خالا دەستپێکا وی دبیتە خالا دەستپێکا ئاراستەبڕێ ئێکێ و خالا دوماهیا وی دبیتە خالا دوماهیا **ئاراستەبڕێ دووێ**.	
ڕێیا لاتەریبێ خالەکێ وەک خالا دەستپێکێ بۆ هەردوو ئاراستەبڕان بکاربینە. لاتەریبەکێ ب زێدەکرنا لایەکی ژ هەر ئاراستەبڕەکی لنک خالا دوماهیا ئاراستەبڕێ دی. **بەرئەنجام** ئەو ئاراستەبڕە ئەوێ خالا دەستپێکا وی دبیتە خالا دەستپێکا هاوبەش بۆ هەردوو ئاراستەبڕان و خالا دوماهیا وی خالا دوماهیا تیرەیێ.	

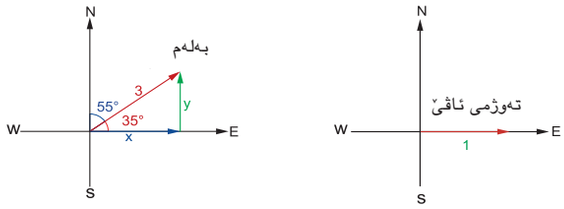
بۆ کۆمکرنا دوو ئاراستەبران ب جەبرێ، پێکهاتێن هەردووان کۆمبکە. هەکەر $\vec{u}=\langle x_1, y_1\rangle$ و $\vec{v}=\langle x_2, y_2\rangle$ دێ $\vec{u}+\vec{v}=\langle x_1+x_2, y_1+y_2\rangle$

نموونـــــه 5

بجهئینان لسەر وەرزشێ

بەلەمەك ب لەزا 3 km/h ب ئاراستەیێ باکور ـ 55° ـ رۆژهەلات ب رێکەفت. لەزا پێلا ئاڤێ (تەوژم) ب ئاراستەیێ رۆژهەلات بوو. لەزا بەلەمێ بوو چەند؟ و ئاراستەیێ وێ دێ چەوابیت؟ لەزێ نێزیکبکە بۆ نیزیکتریت دەهئیك و ئاراستەیی بۆ نیزیکترین پلە.

پێنگاڤا (1)ێ: ئەوان هەردوو ئاراستەبران بکێشە، ئەوێن لەزا بەلەمێ و لەزا پێلا ئاڤێ دنوێنن



پێنگاڤا (2)ێ: ئاراستەبرێ لڤینا بەلەمێ پێ هەردوو پێکهاتێن وی بنڤیسە. دریژیا ئەوی ئاراستەبرێ لڤینا بەلەمێ دنوێنت 3 km/h و ئەو گۆشەیەکا پیڤانا وێ 35° پێکدئینیت دگەل ئاراستێ مووجەبێ تەوەرێ ئێکێ.

$$\cos 35^\circ = \frac{x}{3} \qquad x = 3\cos 35^\circ \approx 2.5$$
$$\sin 35^\circ = \frac{y}{3} \qquad y = 3\sin 35^\circ \approx 1.7$$

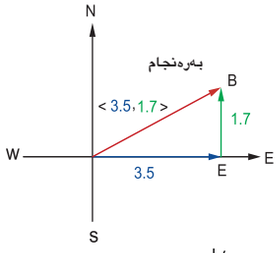
ئەو ئاراستەبرێ لڤینا بەلەمێ دنوێنت دبیتە $\langle 2.5, 1.7\rangle$

پێنگاڤا (3)ێ: ئاراستەبرێ پێلا ئاڤێ بێ هەردوو پێکهاتێن وی بنڤیسە. پێلا ئاڤێ ب لەزا **ئێك کیلومەتر** دلڤیت ب ئاراستەیێ رۆژهەلات. ڤێجا دێ یێ ئێکێ 1 بیت و پێکهاتێ دووێ دێ یەکسانی سفر بیت ئاراستەبرێ لڤینا پلا ئاڤێ دنوینت دبیتە $\langle 1, 0\rangle$

پێنگاڤا (4)ێ: بەرئەنجامێ هەردوو ئاراستەبران بهەژمێرە، و وێنەبکە. هەردوو پێکهاتێن ئاراستەبرێ ئێکێ دگەل هەردوو پێکهاتێن ئاراستەبرێ دووێ کۆمبکە.

$$\langle 2.5, 1.7\rangle + \langle 1, 0\rangle = \langle 3.5, 1.7\rangle$$

بەرئەنجامێ هەردوو ئاراستەبران دبیتە ئاراستەبرێ $\langle 3.5, 1.7\rangle$



پێنگاڤا (5)ێ: دریژیا بەرئەنجامی بهەژمێرە و ئاراستەیێ وی دیاربکە. دریژیا بەرئەنجامی دبیتە لەزا دروست یا بەلەمێ.

$$\left|\langle 3.5, 1.7\rangle\right| = \sqrt{(3.5-0)^2+(1.7-0)^2} \approx 3.9$$

لەزا دروست یا بەلەمێ دبیتە 3.9 km/h ب نێزیکی. ئاراستەیێ بەرئەنجامی دبیتە ئەو گۆشا دهێتە پێکئینان دگەل بەشێ مووجەبێ تەوەرێ ئێکێ $\tan \hat{A} = \frac{1.7}{3.5}$ ژ ئەڤێ پەیدا دبیت کو $m\hat{A} = \tan^{-1}\left(\frac{1.7}{3.5}\right) \approx 26^\circ$ ئاراستەیێ بەرئەنجامێ دبیتە باکوور 64° ـ رۆژهەلات ب نێزیکی چونکی

$90^\circ - 26^\circ = 64^\circ$

ل بیراتە بت

نڤیسینا ئاراستەبڕی پێ هەردوو پێکهاتێن وی هاریکاریێ دکەت بۆ دیارکرنا مەودایێ لڤینا ئاسۆیی و ستوونی، بۆ ڤەگوهاستنێ ژ خالا دەستپێکێ بۆ خالادوماهیێ.

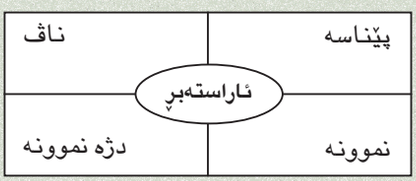
خالا چاڤدێریێ

5. **دێ چ بیت هەکەر ... ؟** بەلەم ب لەزا 4 km/h ب ئاراستەیێ باکوور -55°- ڕۆژهەلات ب ڕێکەفت. لەزا دروست یا بەلەمێ چەندە؟ و ئاراستێ لڤینا وێ چەندە؟ لەزا وێ نێزیکبکە بۆ نێزیکترین پلە.

هزربکە و گەنگەشێ بکە

1. ڕوونبکە بۆچی ئەو پارچە راستەهێلێ هەردوو سەرێن وی(0, 0) و(1, 4) نابیتە ئاراستەبڕ.
2. هەکەر تو هەردوو پێکهاتێن ئاراستەبڕی بزانی. چەوا دریژیا وی دێ هەژمێرێ بێی بکارئینانا دووریێ؟
3. ڕوونبکەوە چەوا دوو ئاراستەبڕان ب جەبرێ کۆمدکەی؟
4. ڕێکخەربە، هێلکارێ بەرامبەر کۆپیبکە پاشی تەمامکە.

فێربە

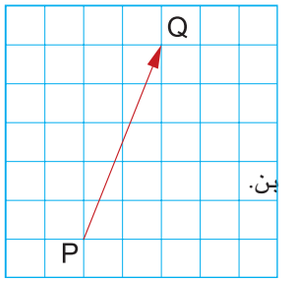


4-1 ڕاهێنان

ڕاهێنانێن ئاراستەکری

زاراڤ: **زاراڤێن وانەیێ بۆ بەرسڤدانا هەر پرسیارەکێ بکاربینە.**

1. هەکەر دوو ئاراستەبڕان هەمان درێژی و هەمان ئاراستە هەبن ___؟___ (یەکسانن، تەریب بن).
2. هەکەر دوو ئاراستەبڕان هەمان ئاراستە هەبن یان بەرۆڤاژی بن د ئاراستەی دا ___؟___ (یەکسانن، تەریب بن).
3. ___؟___ ئاراستەبڕێ نیشانا مەزناتیا وی دیاردکەت (درێژی ، ئاراستە).



نموونە 1 **هەر ئاراستەبڕەکی پێ دوو پێکهاتێن وی بنڤیسە.**

4. ئاراستەبڕێ $\overrightarrow{AC}$ کو $A(1, 2)$ و $C(6, 5)$
5. ئەو ئاراستەبڕێ خالا دەستپێکا وی $M(-4, 5)$ وخالا دوماهیا وی $N(4, -3)$ بن.
6. ئاراستەبڕێ $\overrightarrow{PQ}$ یێ بەرامبەر.

نموونە 2 **هەر ئاراستەبڕەکی د رووتەختێ پۆتانێدا وێنەبکە، درێژیا وی بۆ نێزیکترین دەهئیێ بهەژمێرە.**

7. $\langle 1, 4 \rangle$
8. $\langle -3, -2 \rangle$
9. $\langle 5, -3 \rangle$

نموونە 3 **هەر ئاراستەبڕەکی د رووتەختێ پۆتانێدا وێنەبکە، ئاراستەیێ وی بۆ نێزیکترین پلە بهەژمێرە.**

10. ئاراستەبڕێ $\langle 4, 6 \rangle$ ئەوێ پێلا ئاڤا رووبارەکی دنوێنت.
11. ئاراستەبڕێ $\langle 5, 1 \rangle$ ئەوێ لڤینا فرۆکەکێ دنوێنت.
12. ئاراستەبڕێ $\langle 6, 3 \rangle$ ئەوێ لڤینا تیرەکێ دنوێنت.

نموونـه 4

هەر ئێکی ژ ئەڤانێن ل خوارێ جوّدابکە.

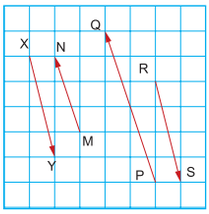
13 ئاراستەبرێن یەکسان دوێنەیێ 1 دا.

14 ئاراستەبرێن تەریب دوێنەیێ 1 دا.

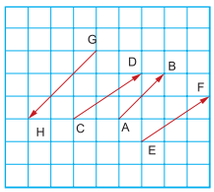
15 ئاراستەبرێن یەکسان دوێنەیێ 2 دا.

16 ئاراستەبرێن تەریب دوێنەیێ 2 دا.

وێنەیێ 1



وێنەیێ 2



راهێنان و بجهئینان

راهێنانێن ئازاد

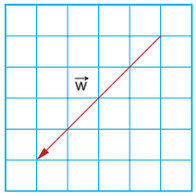
بۆ شیکارکرنا پرسیاران	بەرێ خوبدە نموونە
19–17	1
22–20	2
25–23	3
29–26	4
30	5

هەر ئاراستەبرەکی پێ هەردوو پێکهاتێن وی بنڤیسە.

17 $\overrightarrow{JK}$ هەکەر $J(-6, -7)$ و $K(3, -5)$

18 $\overrightarrow{EF}$ هەکەر $E(1.5, -3)$ و $F(-2, 2.5)$

19 $\overrightarrow{W}$ (ل وێنەیێ بەرامبەر)



وێنەیێ هەر ئاراستەبرەکی د رووتەختێ پۆتانیدا وێنەبکە، درێژیا وی بۆ نێزیکترین دەهئیك بهەژمێرە.

20 $\langle -2, 0 \rangle$ 21 $\langle 1.5, 1.5 \rangle$ 22 $\langle 2.5, -3.5 \rangle$

وێنەیێ هەر ئاراستەبرەکی د رووتەختێ پۆتانیدا وێنە بکە،ئاراستەیێ وی بۆ نێزیکترین پلە بهەژمێرە.

23 ئاراستەبرێ $\langle 4, 1.5 \rangle$ کو لڤینا بەلەمەکێ دنوێنت.

24 ئاراستەبرێ $\langle 3.5, 2.5 \rangle$ کو لڤینا ژێر دەریایەکێ (غواصة) دنوێنت.

25 ئاراستەبرێ $\langle 2, 5 \rangle$ کو لڤینا مووشەکەکێ دنوێنت.

هەرئێك ژ ئەڤێن ل خوارێ جوّدابکە.

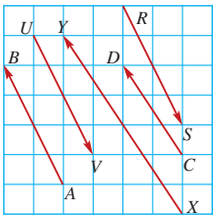
26 ئاراستەبرێن یەکسان د وێنەیێ 1 دا.

27 ئاراستەبرێن تەریب د وێنەیێ 1 دا.

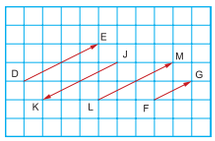
28 ئاراستەبرێن یەکسان د وێنەیێ 2 دا.

29 ئاراستەبرێن تەریب د وێنەیێ 2 دا.

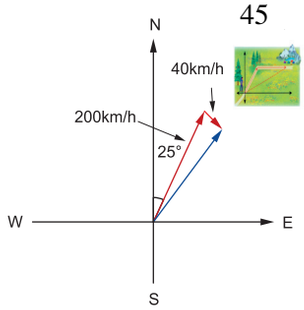
وێنەی 1



وێنەی 2



30 **فرۆکەڤانی:** فرۆکەڤانی فرۆکەیا خو یا تایبەت ب لەزەکا نەگۆر 200 km/h ب ئاراستەیێ باکوور ـ 25° ـ رۆژهەلات هاژوت. فرۆکە تووشی بایەکی بوولەزا وی 40 km/h ب ئاراستەیێ بـ ـ 45° ـ رۆژهەلات بوو. لەزا دروست یا فرۆکێ چەندە؟ ئاراستەیی دروست یێ فرۆکێ چەندە؟ لەزێ نێزیکبکە بۆ نێزیکترین دەهئیك. و ئاراستەیی بۆ نێزیکترین پلە نێزیکبکە.



کۆمبکە.

31 $\langle 1, 2 \rangle + \langle 0, 6 \rangle$ 32 $\langle -3, 4 \rangle + \langle 5, -2 \rangle$

33 $\langle 0, 1 \rangle + \langle 7, 0 \rangle$ 34 $\langle 8, 3 \rangle + \langle -2, -1 \rangle$

35 **هزرکرنا رەخنەگر** ئەرێ کۆمکرن دئاراستەبراندا ئالوگۆرە؟ ئانکو ئەرێ هەردوو ئاراستەبرێ $\vec{v}+\vec{u}$ و $\vec{u}+\vec{v}$ یەکسانن؟ رێیا ژ سەری بۆ دوماهیێ بۆ کۆمکرنا ئاراستەبران بکاربینە ب مەرەما رووڤکرنا ئەقێ بەرسڤێ.

هەر ئاراستەبڕەکی ب هەردوو پێکهاتێن وی بنڤیسە، بۆ نێزیکترین دەهئێك نێزیکبکە.

36 دریژی 15 : ئاراستە 42°

37 دریژی 7.2 : ئاراستە 9°

38 دریژی 12.1 : ئاراستە باکوور 57° ـ ڕۆژهەلات

39 دریژی 5.8 : ئاراستەی باکوور 22° ـ ڕۆژهەلات.

40 **فیزیا:** ژۆرا پۆلەکێ پەنجەرەیەك تێدا هەیە و یا نێزیکە بۆ بانێ ژۆرێ، دارەك دئێتە بکارئینان بۆ داخستنا وێ:

أ هۆژینێ دارەك ب دەست خو گرت ئاراستەیێ 45° دگەل ئەردێ ژۆرێ پێکئینا. هێزەك بکارئینا بڕێ وی $\mp\mp$ نیوتن (N) بوو، بۆ پالدانا رەخێ سەری یێ پەنجەرێ. پێکهاتێ ستوونی. بۆ ئاراستەبڕێ هێزا پالدانا رەخێ سری یێ پەنجەرێ دنوینت بهەژمێرە. بەرسڤێ بۆ نێزیکترین دەهئێك نێزیکبکە

ب نەشمیلێ دار ب دەست خوگرت ئاراستەیێ 75° دگەل ئەردێ ژۆری پێکئینانا و هێزەك بڕێ وی 44 نیوتن (N) بوو، بۆ پالدانا ڕەخێ سەری یێ پەنجەرێ بکارئینا. پێکهاتێ ستوونی یێ ئاراستەیێ نواندنا هێزا پالدانا رەخێ سەری یێ پەنجەرێ بهەژمێرە. بەرسڤێ بۆ نێزیکترین دەهئێك نێزیکبکە.

ج کیژ هەردوو قوتابیان تووشی زەحمەتەکا کێمتر دبیت بۆ داخستنا پەنجەرێ؟ (پێکهاتێ ستوونی یێ پالدانا کیژ هەردووان مەزنترە؟)

41 **ئەگەر:** دلّسۆزێ ژمارەیێن 1 و 2 و 3 و 4 لسەر چەند پارچێن کاغەزان نڤیسین و دانانا دناڤ تویرکەکیدا. بهەرەمەکی پارچەکا کاغەزێ راکێشا، و وەسا دانە کو ئەڤە پێکهاتێ ئاسۆیی بۆ ئاراستەبڕەکی دنوێنت، و کاغەزەکا دی راکێشا بێی ڤەگەڕاندنا کاغەزا ئێکێ بۆ تویرکی، و وەسا دانە کو ئەڤە پێکهاتێ ستوونێ بۆ هەمان ئاراستەبڕێ دنوێنت.

أ ئەگەر چەندە کو ئەو ئاراستەبڕە $\langle 1, 2\rangle$ بیت؟

ب ئەگەر چەندە کو ئەو ئاراستەبڕە یێ تەریب بیت دگەل ئاراستەبڕێ $\langle 1, 2\rangle$؟

42 **خەملاندن:** ئاراستەبڕێ $\langle 4, 6\rangle$ بۆ تەمامکرنا هەرئێکی بکاربینە:

أ وێنەیێ ئاراستەبڕی لسەر تورا چارگۆشەیان وێنەبکە.

ب خەملاندنا ئاڕاستەیێ ئاراستەبڕی بۆ نێزیکترین پلە نێزیکبکە.

ج پیڤانا وێ گۆشا ئاراستەبڕ دگەل ڕاستەهێلێ ئاسویێ پێکدئینت دیاربکە بکارئینانا گۆشەپیڤی.

د ئاراستەیێ ئاراستەبڕی بهەژمێرە بکارئینانا هەردوو پێکهاتێن وی.

هـ بەراوردیێ بکە ل ناڤبەرا ئەوێ خەملاندنا تە ئەنجام دایی ل لقێ (ب) و ئەوێ پیڤانا تە ل لقێ (ج) دیارکری و ئەوێ هەژمارتنا تە ل لقێ (د) ئەنجام دایی.

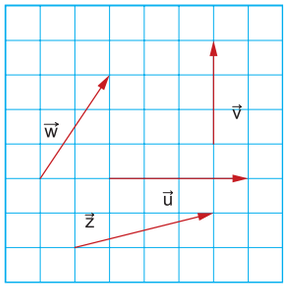
پێنگاڤێن جۆراوجۆر: دریژیا هەرئاراستەبڕەکی بهەژمێرە، و ئاراستەیێ وی دیاربکە، و دریژیا وی بۆ نێزیکترین دەهئێك و ئاراستەیێ وی بۆ نێزیکترین پلە نێزیکبکە.

43 $\vec{u}$

44 $\vec{v}$

45 $\vec{w}$

46 $\vec{z}$



بۆ هەر ئاراستەبڕەکی ئاراستەبڕەکی دی دیاربکە کو هەمان درێژی هەبیت لێ ئاراستەیێ وی یێ جیاوازبیت، پاشی ئارستەبڕەکی دیاربکە کو هەمان ئاراستە هەبیت لێ درێژیا وی یا جیاوازبیت.

47 $\langle 2, 0 \rangle$

48 $\langle -3, 6 \rangle$

49 $\langle 12, 5 \rangle$

50 $\langle 8, -11 \rangle$

پێنگافێن جۆراوجۆر: هەردوو ئاراستەبڕان کومبکە، پاشی درێژیا بەرئەنجامی و ئاراستەیێ وی بهەژمێرە. درێژیا وی بۆ نێزیکترین دەهئێك و ئاراستەیێ وی بۆ نێزیکترین پلە نێزیکبکە.

51 $\vec{u} = \langle 1, 2 \rangle$ و $\vec{v} = \langle 2.5, -1 \rangle$

52 $\vec{u} = \langle -2, 7 \rangle$ و $\vec{v} = \langle 4.8, -3.1 \rangle$

53 $\vec{u} = \langle 6, 0 \rangle$ و $\vec{v} = \langle -2, 4 \rangle$

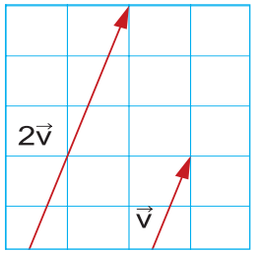
54 $\vec{u} = \langle -1.2, 8 \rangle$ و $\vec{v} = \langle 5.2, -2.1 \rangle$

دەروازەیەك

لەسەر مێژووی بیرکاری

موبیوس بەو پەتەی لەوێنەکەدا دیارە ناوبانگی دەرکرد کە بریتییە لە شێوەیەکی ئەندازەیی سێ دووری یەك ڕوو و یەك لای هەیە.

55 **مێژوویا بیرکاریێ:** زانایێ بیرکاریێ ئۆگەست موبیوس ل ساڵا 1827 August Möbius پەرتووکەك بەلاڤکر، تێدا بەحسێ پارچە راستەهێلێن ئاراستەکری کربوو، ئیرۆ ئەم دبێژینە وان ئاراستەبڕ. ئەڤی زانایی دپەرتووکا خۆدا بەحسێ لێکدانا ئاراستەبڕەکی دگەل ژمارەکا راست کربوو، بۆ نموونە: هەکەر ئاراستەبڕێ $\vec{v}$ لڤینا ترومبێلەکێ بنوێنت، ئاراستەبڕێ $2\vec{v}$ دێ لڤینا ترومبێلەکادی نوێنت کو ب هەمان ئاراستە ب ڕێڤەبچیت و لەزا وێ دووجارانێ لەزا ترومبێلا ئێکێ بیت.



أ هەردوو پێکهاتێن هەردوو ئاراستەبڕان $\vec{v}$ و $2\vec{v}$ بنڤیسە.

ب درێژیا هەرئێك ژ هەردووئاراستەران بهەژمێرە، و بەراوردیێ لناڤبەراهەردوو درێژیان بکە.

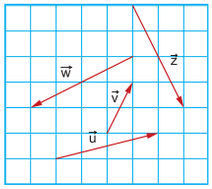
ج ئاراستەیێ هەرئێك ژ هەردوو ئاراستەبڕان بهەژمێرە، و بەراوردیێ لناڤبەرا هەردوو ئاراستەیان بکە.

د ڕوونبکە چەوا هەروو پێکهاتێن ئاراستەبڕێ $\overrightarrow{kv}$ دێ دیارکەی، دەمێ k ژمارەیەکا راستی بیت و هەردوو پێکهاتێن $\vec{v}$ بزانی.

هـ ئاراستەبڕێ لێکبدە ب $k = -1$ بۆ نڤیسینا دژێ $\vec{v}$ پێ هەردوو پێکهاتێن وی

56 **هزرکرنا ڕەخنەگر:** ئاراستەبڕێ $\vec{u}$ کو درێژیا وی u یە ب ئاراستەیێ ڕۆژئاڤایە، و ئاراستەبڕێ $\vec{v}$ کو درێژیا وی v یە ب ئاراستەیێ ڕۆژهەلاتە.
بەحسێ هەرسێ ئەنجامێن کۆمکرنا ڤان هەردوو ئاراستەبڕان بکە.

57 **بنڤیسە:** بەراوردیێ لناڤبەرا پارچە راستەهێل و تیشك و ئاراستەبڕی بکە.



58 کیژ ئەڤان ئاراستەبڕان یێ تەریبە دگەل $\langle 2, 1\rangle$ ؟

أ) $\vec{u}$ ج) $\vec{w}$

ب) $\vec{v}$ د) $\vec{z}$

59 ئاراستەبڕێ $\langle 7, 9\rangle$ لڤینا هیلیکۆپتەرەکی دنوێنت، ئاراستەیێ ئەوی ئاراستەبڕێ بۆ نێزیکترین پلە چەندە؟

أ) $38°$ ب) $52°$ ج) $128°$ د) $142°$

60 ئاراستەبڕێ $\langle 5, 11\rangle$ لڤینا بەلەمەکێ دنوێنت. دریژیا ئاراستەبڕی بۆ نێزیکترین یەکە نێزیکبکە:

أ) 6 ب) 8 ج) 12 د) 16

61 **بەرسڤ بتنێ:** (6 ,3–) خالا دەستپێکێیە بۆ ئاراستەبڕێ $\overrightarrow{A}$ ، و(2– ,5–) خالا دوماهیێیە. دریژیا $\overrightarrow{AB}$ بۆ نێزیکترین دەهئێك نێزیکبکە.

بەرهنگاری و بەرفرەهکرن

ل بیراتەبێت ئەو گۆشەیا ئاراستەیێ ئاراستەبڕی دیاردکەت، دئێتە پیڤان ژ بەشێ مووجەبێ تەوەرێ ئێکێ ب بەرۆڤاژیا میلێ دەمژمێرێ. ئاراستەیێ هەر ئاراستەبڕەکی بەهژمێرە و بۆ نزیکترین پلە نێزیکبکە.

62 $\langle -2, 3\rangle$ **63** $\langle -4, 0\rangle$ **64** $\langle -5, -3\rangle$

65 **گەمیڤانی:** گەمیڤانێ پاپۆرەکی پلانەکێ ددانیت، دا بچیتە دناڤ دەڤەرەکا ئاڤێدا، لەزا پێلا ئاڤا دەریایێ ل وێ دەڤەرێ 4 km/h بوو ب ئاراستەیێ رۆژ هەلات. ئاراستەیێ لڤینا پاپۆرێ و لەزا وێ بهەژمێرە دا لەزا دروست یا پاپۆرێ ببیتە 10 km/h و ئاراستەیێ وێ یێ دروستی ببیتە باکوو $-75°$ رۆژهەلات (پێلا ئاڤا دەریایێ بەرچاڤ هاتبوو وەرگرتن). لەزا وێ بۆ نێزیکترین دەهئێك و ئاراستەیێ وێ بۆ نێزیکترین پلە نێزیکبکە.

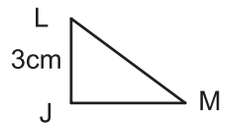
66 دا بگەهتە باغچێ گشتی. شڤان دووریا 3 km ب ئاراستەیێ باکوور°30 رۆژهەلات پاشی 6 km ب ئاراستەیێ زۆژهەلات پاشی 4 km ب ئاراستەیێ باکوور°80 رۆژهەلات بڕێڤەچوو. دریژیا وی ئاراستەبڕێ ڤەگوهاستنا شڤانی ژ مال بۆ باغچێ گشتی دنوێنت چەندە؟ ئاراستەیێ وی چەندە؟ دریژیا وی بۆ نێزیکترین دەهئێك و ئاراستەیێ وێ بۆ نێزیکترین پلە نێزیکبکە.

پێداچوونا لوولپێچی

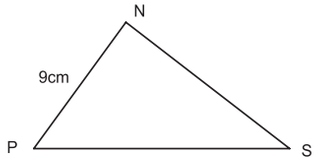
هەر سیستەمەکی هاوکێشەیێن هێلی ب وێنەیێ روونکرنێ شیکاربکە (پۆلێن پێشتر)

67 $\begin{cases} x-y=-5 \\ y=3x+1 \end{cases}$ **68** $\begin{cases} x-2y=0 \\ 2y+x=8 \end{cases}$ **69** $\begin{cases} x+y=5 \\ 3y+15=2x \end{cases}$

هەردوو سێگۆشە *JLM* و *NPS* دهاوشێوەنە، چێوەیێ سێگۆشا *JLM* 12cm و ڕووبەرێ وێ $6\ cm^2$ بوو، پیڤانا داخوازکری بهەژمێرە (پۆلێن پێشتر)



70 چێوێ سێگۆشا *NPS*



71 ڕووبەرێ سێگۆشا *NPS*

بەشێ 1

ئەزموونا نیڤا بەشی

ئەزموونا نیڤا بەشی ژ وانەیا 1-1 هەتا 4-1.

1–1 بۆشاییێ پۆتانی

هەرخالەکا ل خوارێ دبۆشاییێ پۆتانیدا بنوێنە.

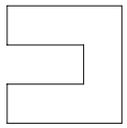
1 $(-3, 2, 1)$ 2 $(2, -3, -2)$ 3 $(3, 1, -3)$

د بۆشاییێ پۆتانیدا وێنەیێ هەر ڕووتەختەکی هێلی ل خوارێ بکێشە.

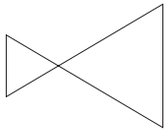
4 $2x-2y+4z=8$ 5 $2x+y-2z=-4.5$ 6 $x+5y+3z=15$

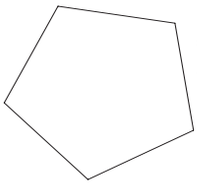
2–1 چەندلا

دیاربکە ئەرێ شێوە جەندلایە، هەکەر وەسابوو ناڤێ وێ بێژە.

7 

8

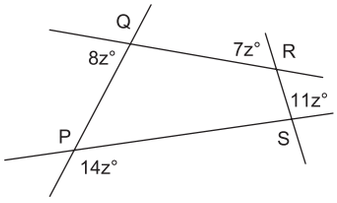
9 

10 

11 سەرجەمێ پیڤانێن گۆشەیێن ژ ناڤدا یێ 16 لایەکی ناڤچال بهەژمێرە.

12 ستوونەك بنکەیێ وێ شەشلایەکی ڕێکە، پیڤانا هەرگۆشەیەکا ژ ناڤدا چەندە؟

13 وێنەیێ بەرامبەر هێلکاری باغچەکی پەرژینکری دیاردکەت. پیڤانا هەرگۆشەیەکا ژ دەرڤە بهەژمێرە.



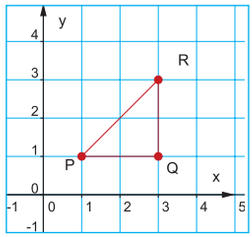
14 پیڤانا هەرئێك ژ گۆشەیێن ژ دەرڤە یێ دەهلایەکی ڕێك بهەژمێرە.

3–1 هاوڕێژەیا ئەندازەیی

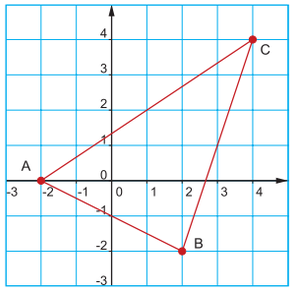
15 $A(-1, 2)$، $B(-3, -2)$، $C(3, 0)$، $D(-2, 0)$، $E(1, 1)$، بسەلمینە کو هەردوو سێگۆشە ABC و ADE دهاوشێوەنە.

وێنەیێ هەر سێگۆشەیەکێ ب هاوڕێژەیەکا ئەندازەیی ڕێژا وێ دیارکری بکێشە. ساخبکە سێگۆشەیا بنەڕەت و وێنەیێ وێ د هاوشێوەنە.

16 ڕێژا مەزنکرنێ 3 بیت.



17 ڕێژا مەزنکرنێ 1.5 بیت.



4–1 ئاراستەبڕ

وێنەیێ هەرئاراستەبڕەکی دروتەختێ پۆتانیدا بکێشە.دریژیا وی بۆ نیزیکترین دەهئێك بهەژمێرە.

18 $\langle 3, 1 \rangle$ 19 $\langle -2, -4 \rangle$ 20 $\langle 0, 5 \rangle$

وێنەیێ هەرئاراستەبڕەکی دروتەختێ پۆتانێدا بکێشە. لایێ وی بۆ نیزیکترین پلە بهەژمێرە:-

21 لەزا بایی ب ئاراستەبڕێ $\langle 2, 1 \rangle$ هاتیە نواندن.

22 پێلا ئاڤا ڕووبارەکی ب ئاراستەبڕێ $\langle 5, 3 \rangle$ هاتیە نواندن.

23 هێزا سپرینگەکی ب ئاراستەبڕێ $\langle 4, 4 \rangle$ هاتیە نواندن.

5–1 ڕووبەڕێ بازن و چەندلایێن ڕێك

Area of circles and regular polygons

ئارمانج

- دیارکرنا یاسایەکێ بۆ هەژمارتنا ڕووبەڕێ بازنێ و یاسایەکێ بۆ هەژمارتنا چێوەیێ وێ و بکارئینانا وان.
- دیارکرنا یاسایەکێ بۆ هەژمارتنا ڕووبەڕێ چەندلایان و بکارئینانا وێ.

کی ئەقێ بکاردئینیت؟

دهۆل قوت بۆ دەستکەفتنا دەنگێن دیارکری،دهولێن پیڤان جیاواز بکاردئینن. ئەو دنگێن دهۆل ددەت یێ بەندە لسەر ڕووبەڕێ ڕوویێ وێ بازنێ. (نموونەیا 2).

زاراڤ
Vocabulary

بازن
Circle

چەقێ بازنێ
Center of a circle

نیڤتیرەیێ بازنێ
Radius of a circle

تیرەیێ بازنێ
Diameter of a circle

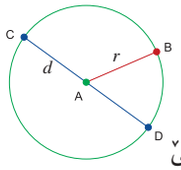
چەقێ چەندلایێ ڕێك
Center of a regular polygon

ستوونکێ چەندلایێ ڕێك
Apothem of regular polygon

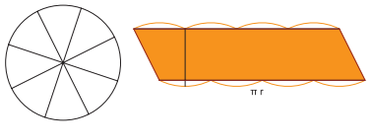
چەقە گۆشە د چەندلایێ ڕێکدا
Central angle of a regular polygon

بازن Circle کۆمەلەکا خالانە د ڕووتەختیدا دوریيا هەرئێك ژ وان ژ خالەکا دیارکری دبێژنێ **چەقی بازنێ** یا یەکسانەب **نیڤتیرەیێ بازنێ**. درێژیا **تیرەیێ بازنێ** دوو جارانی نیڤتیرێ وێیە. د وێنەیێ بەرامبەر، A چەقێ بازنێیە و نیڤتیرەیێ وی $r = AB$ و تیرەیێ وێ $d = CD$.

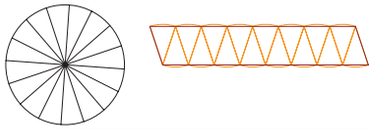
ڕێژا چێوەیێ بازنێ C بۆ درێژیا تیرەیێ وێ d ژمارەیەکا نەگۆرە د هەموو بازناندا، و ئەو ڕێژە یا نەگۆر ژمارەیەکا ناڕێژەییە π یە (دهێتە خواندن پای).



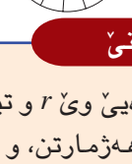
تو دشێی بنڤیسی $\pi = \frac{C}{d}$. هەکەر C پێ d بهەژمێری، دێ ڕێسایا هەژمارتنا چێوەیێ بازنێ ب ڤی شێوەی بیت $C = \pi d$ یان $C = 2\pi r$ چونکی $d = 2r$. تو دشیی چێوەیێ بازنێ بکاربینی بۆ هەژمارتنا ڕووبەڕێ وێ، ب دابەشکرنا بازنێ بۆ پارچان، و وان پارچان ڕێکبێخی لسەر شێوەیەکی کو ئەو شێوە وەك لاتەریبەك دیاربیت وەکی د وێنەیێ بەرامبەردا.



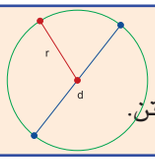
بنکێ لاتەریبێ هندی نیڤا چێوەیێ بازنێیە بنێزیکی ئانکو πr . و بلندایا وێ هندی نیڤاتیرەیێ بازنێیە بنێزیکی، ژ ڤێ دیاردبیت ڕووبەڕێ بازنێ بنێزیکی $A \approx \pi r \times r = \pi r^2$



هەر چەند ژمارا پارچەیان زێدەترین، ڕووبەڕێ لاتەریبێ دێ نێزیکتربیت بۆ ڕووبەڕێ بازنێ، و بەهایێ وێ یێ نێزیککری دێ نێریکتربیت بۆ بەهایێ وێ یێ دروست

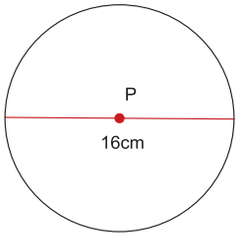


چێوە و ڕووبەڕێ بازنێ



چێوەیێ بازنا نیڤتیرەیێ وێ r و تیرەیێ وێ d و چێوە c ب یاسایا $C = \pi d$ یان $C = 2\pi r$ دئیتە هەژمارتن، و ڕووبەڕێ وێ ب یاسایا $A = \pi r^2$ دئیتە هەژمارتن.

نموونـــــە 1 هەژمارتنا چێوە و ڕووبەڕێ بازنێ



داخوازیێ هەژماربکە.

أ ڕووبەڕێ بازنا بەرامبەر بهەژمێرە.

$A = \pi r^2$ یاسایا ڕووبەڕێ بازنێ.

$A = \pi(8)^2$ بۆ هەژمارتنا نیڤتیرەی، تیرەی دابەشی 2 بکە، پاشی ل جهێ نیڤتیرەی (2) دانە و سادە بکە.

$A = 64\pi$

ڕووبەڕێ بازنێ $A = 64\pi \text{ cm}^2$

ب نیقتیرەیێ بازنەکێ چێوەیێ وێ 24π m بیت بهەژمێرە.

$C = 2\pi r$ یاسایا چێوەیێ بازنێ.

$24\pi = 2\pi r$ ل جهێ چێوەی بەهایێ وی دانە.

$24 = 2r$ هەردووڕەخان لسەر π دابەشبکە.

$r = 12$ هەردووڕەخان لسەر 2 دابەشبکە.

ج چێوەیێ بازنەکێ رووبەرێ وێ $9x^2\pi$ بیت پێ π و x بهەژمێرە.

پێنگاڤا 1ێ: نیقتیرەیێ r پێ x بهەژمێرە.

$A = \pi r^2$ یاسایا رووبەرێ بازنێ

$9x^2\pi = \pi r^2$ ل جهێ A دانە

$9x^2 = r^2$ هەردووڕەخان دابەشبکە لسەر π

$3x = r$ ڕەگێ دووجای هەردووڕەخان وەربگرە.

پێنگاڤا (2)ێ: چێوەیێ بازنێ بهەژمێرە بکارئینانا بەهایێ نیقتیرەیێ وێ.

$C = 2\pi r$ یاسایا چێوەی

$C = 2\pi(3x)$ ل(3x) جهێ r دانە

$C = 6x\pi$ سادە بکە.

خالا چاڤدێرییێ

1. ڕووبەرێ بازنەکێ پێ π بهەژمێرە هەکەر چێوەیێ وێ $(4x-6)\pi$ cm بیت.

نموونـــــە 2 بجهێنان لسەر میۆزیکێ

جاز ژ سێ دهۆلان پێکدهێت، تیرەیێن وان 10ئینچ، 12ئینچ، 14ئینچ، رووبەرێ هەردهۆلەکێ بهەژمێرە.

لەبیرت بێت

کلیلکا π د بژمێرا رووبکرنێدا باشترین نێزیککرنە بۆ بەهایێ π ، چاڤەرێبە هەتا هەژمارتنێ تەمام دکەی پاشی ئەوێ نێزیکبکەی.

تیرە 10ئینچ

$r = \frac{10}{2} = 5$ $A = \pi(5)^2$

$A \approx 78.5$

رووبەر دبیتە 78.5 ئینچێ دووجایی.

تیرە 12ئینچ

$r = \frac{12}{2} = 6$ $A = \pi(6)^2$

$A \approx 113.1$

رووبەر دبیتە 113.1 ئینچێ دووجایی

تیرە 14ئینچ

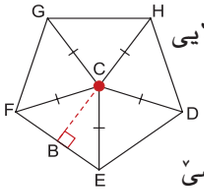
$r = \frac{14}{2} = 7$ $A = \pi(7)^2$

$A \approx 153.9$

رووبەر دبیتە 153.9 ئینچێ دووجایی.

خالا چاڤدێرییێ

2. چێوەیێ هەر دهۆلەکێ ل نموونە 2 بهەژمێرە.



چەقێ Center چەندلایێ خالەکا دناڤ چەندلایێ دایە، و دووریێن وێ ژ سەرێن چەندلایی (یەکسانن).

ستونکێ Apothem چەندلایێ ڕێك دووریا لناڤبەرا چەقی و لایەکی چەندلایێ. ئەو گۆشەیا سەرێ وێ بکەفتە د چەقێ چەندلایێدا، و هەر دوو لایێن وێ د دووسەرێن هاوسێ ڕابوٚرن دبێژنێ **چەقگۆشەیا Central angle** چەندلایێ ڕێك.

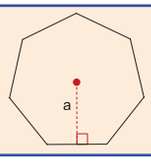
هەموو چەقگۆشەیێن چەندلایێ ڕێك پێقانێن وان هندی ئێکدوونە، و پێقانا هەرئێك ژ وان دبیتە $\frac{360^\circ}{n}$، کو n ژمارا لایێن چەندلایێ ڕێکە.

بۆ هەژمارتنا رووبەرێ چەندلایەکی کو ژمارا لایێن وێ n و درێژیا ستوونکێ a و درێژیا لایەکی s بیت، ئەوی چەندلایێ دابەشبکە بۆ n سێگۆشەیێن دوولایەکسان رووبەرێ هەرسێگۆشەکێ ژ وان دبیتە $\frac{1}{2}as$. ڕووبەرێ چەندلایێ $A = n\left(\frac{1}{2}as\right) = \frac{1}{2}a(ns)$ یان $A = \frac{1}{2}ap$ $p = ns$ هێمایە بۆ چێوەیێ چەندلایێ ڕێك.

فێربە و شرۆڤەبکە

ڕووبەرێ چەندلایێ ڕێك

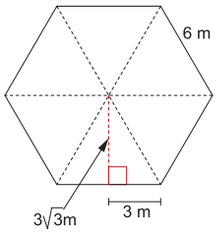
ڕووبەرێ چەندلایەکی ڕێك کو چێوەیێ وێ p و ستوونکێ وێ a بیت ب یاسایا $A = \frac{1}{2}ap$ دهێتە هەژمارتن.



نموونـــــه 3 هەژمارتنا ڕووبەرێ چەندلایێ ڕێك

ڕووبەرێ هەرچەندلایەكی بهەژمێر، بەرسڤا خۆ بۆ نێزیكترین دەهئیك نێزیكبكە.

أ **شەشلایەكی ڕێك دریژیا لایێ وی 6 m بیت.**

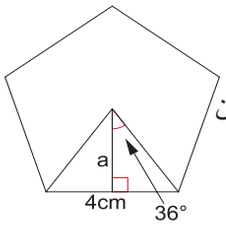


چێوەیێ چەندلایێ دبیتە 36 m (6×6). شەشلایێ ڕێك دابەش دبیت بۆ 6 سێگۆشەیێن ڕێك، دریژیا هەرلایەكی دبیتە 6 m . و ژ ئەقێ دەرئەنجام دبیت كو دریژیا ستوونكێ وێ دبیتە $3\sqrt{3}$

$A=\frac{1}{2}ap$	*یاسایا ڕووبەرێ چەندلایێ ڕێك.*
$A=\frac{1}{2}3\sqrt{3}\times 36$	*لجهدانانێ بكاربینە.*
$A=54\sqrt{3}\approx 93.5$	*سادەبكە و نێزیكبكە بۆ نێزیكترین دەهئیك.*

ڕووبەرێ شەشلایێ ڕێك بنێزیكی دبیتە $93.5\ m^2$

ب **پێنج لایەكی ڕێك دریژیا لایەكی وی 8 cm بیت.**



پێنگاڤا (1)ێ: وێنەیێ پێنجلایەكی بكێشە، سێگۆشەیەكا دوولایەكسان بكێشە سەرێ وێ چەقێ چەندلایی بیت و بنكێ وێ ئێك ژ لایێن پێنجلایی بیت. پیڤانا چەقەگۆشەیا پێنجلایێ دبیتە $\frac{360°}{5}=72°$. لەتكەرێ چەقەگۆشێ بكێشە دا سێگۆشەیەكا وەستاو بدەست تە بكەڤیت.

پێنگاڤا (2)ی: ڕێژا سێگۆشەی tan بكاربینە بۆ هەژمارتنا ستوونكی a.

$\tan 36°=\frac{4}{a}$	*پێناسا ڕێژەیا سێگۆشەی tan*
$a=\frac{4}{\tan 36°}$	*بەهایێ a بهەژمێرە.*

پێنگاڤا (3)ێ: دریژیا ستوونكی و لایەكی بكاربینە بۆ هەژمارتنا ڕووبەرێ 5 لایێ ڕێك.

$A=\frac{1}{2}ap$	*یاسایا ڕووبەرێ چەندلایێ ڕێك.*
$A=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{\tan 36°}\right)(5\times 8)$	*لجهدانانێ بكاربینە.*
$A\approx 110.1$	*سادەبكە و نێزیكبكە بۆ نێزیكترین دەهئیك*

ڕووبەرێ پێنج لایێ ڕێك دبیتە $110.1\ cm^2$

لەبیرت بێت

د سێگۆشەیا گۆشە وەستاودا، تانجنتێ گۆشی دریژیا لایێ بەرامبەر / دریژیا تەنیشتێ

خالا چاڤدێریێ **3.** ڕووبەرێ هەشتلایەكی ڕێك بهەژمێرە كو دریژیا لایەكی وێ 4 m بیت.

هزر بكە و گەنگەشێ بكە

1. پەیوەندیا ل ناڤبەرا π وچێوەیێ بازنێ ڕوونبكە.
2. بەحسێ چاواتیا هەژمارتنا چەقەگۆشەیا چەندلایەكی ڕێك بكە ژ n لایان پێكهاتبیت.
3. ڕێكخەرە: ئەقێ خشتێ كۆپیبكە و تەمامبكە.

فێربە و شرۆڤە بكە

چەندلایێ ڕێك دریژیا لایەكی وی 1 بیت					
چەندلا	ژمارا لایان	چێوە	پیڤانا چەقەگۆشەیێ	ستوونك	ڕووبەر
سێگۆشە					
چارگۆشە					
شەشلا					

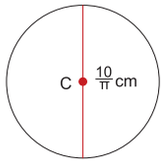
5–1 ڕاهێنان

ڕاهێنانێن ئاراستەکری

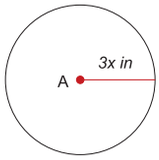
1 **زاراف:** چەوا دریژیا ستوونکێ چارگۆشەیەکی دێ هەژمێری هەکەر دریژیا لایی وێ 5یەکە بیت؟

نموونە 1 بهەژمێرە.

2 چێژەیێ بازنا ل خوارێ.



3 ڕووبەرێ ئەڤێ بازنا ل خوارێ.



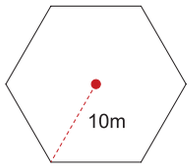
4 چێژەیێ بازنەکێ ڕووبەرێ وێ 36π m^2

نموونە 2

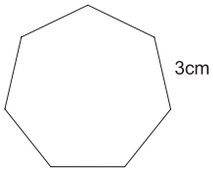
5 **خوارن:** خوارنگەها فورات سێ قەبارەیێن جیاواز ژ پێتزایێ پێشکێشدکەت، تیرەیێن وان ئێك ل دووڤ ئێکێ 15 cm و 25 cm و 40 cm . ڕووبەرێ هەر پیتزایەکێ بهەژمێرە بۆ نێزیکترین دەهئێك.

نموونە 3 ڕووبەرێ هەرئیك ژ ئەڤان چەندلاییێن ڕێك بهەژمێرە بۆ نێزیکترین دەهئێك

6



7



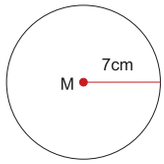
8 سێگۆشەیەکا ڕێك ستوونکێ وێ 2 cm بیت.

9 بازنەك چێژەیێ وێ 5 m بیت.

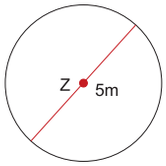
ڕاهێنان و بجهئینان

ئەڤان ئەنجامان پێ π بهەژمێرە.

10 ڕووبەرێ ئەڤی بازنێ



11 چێژەیێ ئەڤی بازنێ



12 تیرەیێ بازنەکێ چێژەیێ وێ 10 m بیت.

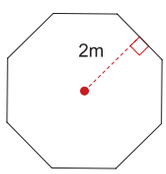
13 **وەرزش:** ڕاهێنەرەکی هەسپان سێ حەلەبێن جیاواز بکاردئینت، تیرەیێن وان ئێك ل دووڤ ئێکێ 7 m و 10 m و 13 m . ڕووبەرێ هەر حەلەبەکێ بهەژمێرە بۆ نێزیکترین دەهئێك.

ڕاهێنانێن ئازاد

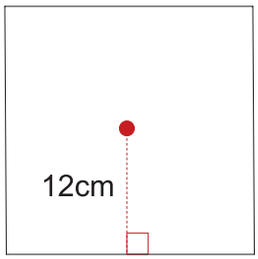
بۆ شیکارکرنا پرسیاران	بەرێ خو بدە نموونە
12–10	1
13	2
17–14	3

ڕووبەرێ هەر چەند لایەکی ڕێك ل خوارێ بهەژمێرە بۆ نێزیکترین دەهئێك.

14



15



16 نەهلایەکی چێژەیێ وێ 144 m بیت.

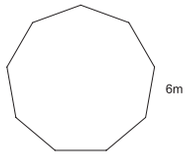
17 پێنجلایەکی ڕێك ستوونکێ وێ 2 km بیت.

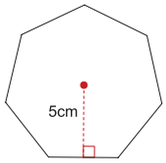
چەقە گۆشەیا هەر چەند لایەکی ل خوارێ بهەژمێرە:

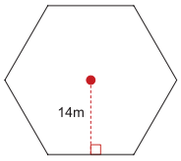
18 سێگۆشەیەکا ڕێك 19 چارگۆشە 20 پێنجلا 21 شەشلا

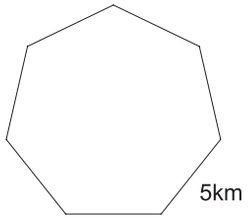
22 حەفتلا 23 هەشتلا 24 نەهلا 25 دەهلا.

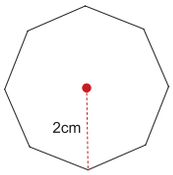
ڕووبەرێ هەر چەندلایەکی ل خوارێ بۆ نێزیکترین دەهیك بهەژمێر

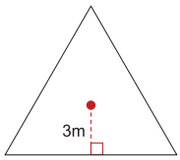
26 

27 

28 

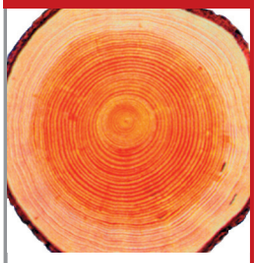
29 

30 

31 

دەروازەیەك

لسەر زێندەزانی



زانایێن ڕووەك ناسی لێکۆلینێ لسەر ئەلقەییێن داران دکەن بۆ دەرئەنجامکرنا ئەوان گوهۆڕینێن لسەر شێوازێن ساماپلان ئەنجام داین.

32 **زێندەزانی:** تو دشێی ژیێ دارەکێ بخەملینی بکارئینانا یاسایا $a=\frac{r}{w}$. کو r هێمایێ نیڤتیرەیێ داریّ بیت بێی تیڤلێ وێ و (w) هێمایێ ناڤەندێ ستووریا ئەلقەییێن داریّ بیت. ژیێ دارا (سندیان) بخەملینە هەکەر چێوەیێ وێ $150\ cm$ و ستووریا تیڤلێ وێ $0.2\ cm$ و پانیا ئەلقەییێن وێ $0.5\ cm$ بیت.

33 **شاشی د شیکارنێدا** دوو قوتابیان ڕووبەرێ بازنەکا چێوەیێ وێ $2\pi m$ ب هەردوو شێوەییێن ل خوارێ هەژمارتن. کیژ وان هەردووان شاشی کر؟ و ل کوێدەرێ؟

أ نیڤتیرەیێ بازنێ $2m$ چونکی چێوەیێ وێ $2\pi m$ بوو، و ڕووبەرێ وێ دبیتە $A=\pi(2^2)=4\pi$ مەتر دووجا.

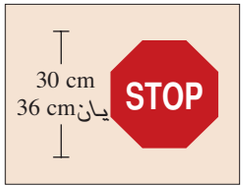
ب نیڤتیرەیێ بازنێ $1m$ چونکی چێوەیێ وێ $2\pi m$ و ڕووبەرێ وێ دبیتە $A=\pi(1^2)=4\pi$ مەتر دووجا

پیڤانێن نەدیار پێ π بهەژمێرە.

	تیرە	نیڤتیرە	ڕووبەر	چێوە
34	6	■	■	■
35	■	■	100	■
36	■	17	■	■
37	■	■	■	36π

38 **پێنگاڤێن جوڕا و جۆر:** سالار نەخشەیەکێ بۆ باغچەکی دکێشیت کو ئەو باغچەیی دەوردایيە ب گۆلەکا (حەوزەکا) ئاڤێ و لسەر شێوەیێ شەشلایەکی ڕێکە دڕێژیا لایەکی وێ $60\ m$. هەکەر باغچە لسەر شێوەیێ بازنێ بیت و ب $10\ m$ یێ دووربیت ژهەر سەرەکی ژ سەرێن گۆلا ئاڤێ، ڕووبەرێ باغچەیی چەندە؟ بەرسڤا خو بۆ نێزیکترین دەهئێك نێزیکبکە.

39 نیشانا ڕاوەستاندنێ ل یاسایا هاتن و چۆنێ لسەر شێوەیێ هەشتلایەکی ڕێکە ب دوو جۆرێن پیڤانان $30\ cm$ و $36\ cm$



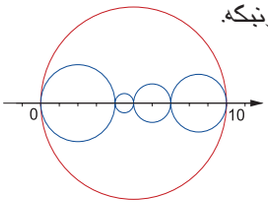
أ ڕووبەرێ نیشانا ئێکێ بۆ نێزیکترین دەهئێك بهەژمێرە.

ب ڕووبەرێ نیشانا دووێ بۆ نێزیکترین دەهئێك بهەژمێرە.

ج ڕێژەیا سەدی بۆ ڕووبەرێ زێدە ژ کانزایێ پێدڤی بۆ چێکرنا جۆرێ دووێ ل جهێ جۆرێ ئێکێ چەندە؟

40 **پیڤان** هندەك ژ ئەندازیاران تایرەکێ ل دۆر تەوەرەکی د زڤڕیت بکاردئینن بۆ پیڤانا دوورییان، ب زڤڕاندنا تایری و هەژمارتنا جارێن زڤڕاندنا ئەوی تایری. تیرەیێ ئەڤی تایرێ بهەژمێرە، بۆ زانین چێوەیێ وێ $(1\ m)$.

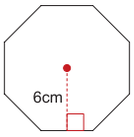
41 **هزرکرنا ڕەخنەگر** کیژ ئەڤان هەردوو میژەیان، پترترین ژمارا مروڤان دشێن ل دۆرێ ڕوبنن خوارێ؟ میژەیەکێ لاکێشەیی د ڕێژەیا وی 6 m وپانیا وی 4 m بیت یان میژەیەکی بازنەی تیرەیێ وی 6 m بیت. چەند مروڤ ب نێزیکی ل دۆر هەر میژەکی دێ ڕوبننا خوارێ؟ بەرسڤا خۆ ڕوونبکە.



42 **بنڤیسە:** چەقێ هەر بازنەکێ ل وێنەیێ بەرامبەر دکەڤیتە سەر تەوەرێ ژمارێن. پەیوەندیا لناڤبەرا بازنا مەزن و چێوەیێ هەر ئێک ژ بازنێن دی ڕوونبکە.

ئامادەکرن بۆ ئەزموونێ

43 چێوەیێ هەشت لایەکی ڕێکی بەرامبەر بۆ نێزیکترین سانتیمەتر چەندە؟



أ) 5 ب) 40 ج) 20 د) 68

44 کیژ ئەڤان ڕێژەیێن ل خوارێ π دنوێنت، ئەگەر C چێوەیێ بازنێ بیت و d تیرەیێ وێ بیت.

أ) $\frac{C}{d}$ ب) $\frac{4C}{d^2}$ ج) $\frac{d}{C}$ د) $\frac{d}{2C}$

45 ئاراسی میژەکی بازنەیی هەیە تیرەیێ وێ 2 m . ئەوی دڤێت لسەر ڕوویێ وی وێنەیێ لاکێشەکێ بکێشت دریژیا وی 2 m وپانیا وی 1 m بیت و چارگۆشەکێ دریژیا لایێ وێ $\frac{1}{2}$ m بیت بکێشت.
کیژ ئەڤێن ل خوارێ یا ستەمە ئاڕەزوێیێ ئاراس دەربڕیت:

أ) پشتی کێشانا وێنەیێ لاکێشێ هیچ جهەك نامینیت.

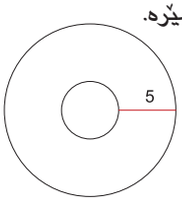
ب) ئاراس نەشێت وێنەیێ لاکێشەکێ لسەر ڕووێ میژێ بکێشیت کو دریژیا وێ 2 m بیت.

ج) ئەو نەشێت وێنەیێن چارگۆشان بکێشیت.

د) هیچ جهەك لسەر ڕووێ میژێ نامینت بۆ کێشانا 4 چوار گۆشەیان دریژیا لایێ هەر ئێکێ ژ وان $\frac{1}{2}$ m بیت.

بەرهنگاری و بەرفرهکرن

46 وێنەیێ بەرامبەر دوو بازنێن ئێك چەق هەین دنوێنت، نیڤتیرەیێ بازنا مەزن بـ 5 cm زێدەترە ژ نیڤتیرەیێ بازنا بچووك، جیاوازیێ ل ناڤبەرا چێوەیێ هەردوو بازنان پێ π بهەژمێرە.



47 **جەبر:** یاسایەکێ بۆ هەژمارتنا ڕووبەرێ بازنێ پێ چێوەیێ وێ بهەژمێرە.

48 **هزرکرنا ڕەخنەگر:** ڕوونبکە کو ڕووبەرێ ئەوێ چەندلایێ ڕێکێ ژمارا لایێن وێ n دێ نێزیك بیت بۆ ڕووبەرێ بازنێ هەر چەند ژمارا لایان n زێدەبکەن.

پێداچوونا لوولپێچی

ئەوێ نەخشەیا هیلی کو هەر خشتەیەك دنوێنت بنڤیسە. (پۆلێن پێشتر)

49

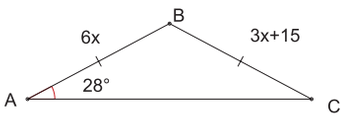
x	−2	0	5	10
y	−19	−13	2	17

50

x	−3	0	4	9
y	2	−1	−5	−10

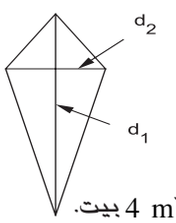
ئەڤان بهەژمێرە. (پۆلێن پێشتر)

51 $m\hat{B}$ **52** AC



ئەڤان بهەژمێرە. (پۆلێن پێشتر)

53 d_2 هەکەر بزانی $d_1 = 20$ و ڕووبەرێ وێ $A = 14$.



54 ڕووبەرێ نیمچە لاتەریبەکێ بنکەیێن وێ ئێك ل دوو ئێك 3 m و 6 m و بلندایا وێ 4 m بیت.

6–1

هندەك ژ ياسايێن بۆشايىٚ

Formulas in 3 dimensions

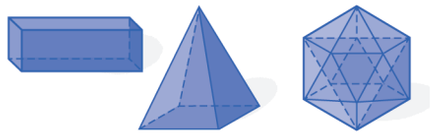
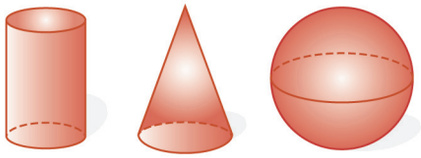
كى ئەڤىٚ بكاردئينيت؟

مەلەڤانكەرێن ژێر ئاڤىٚ پۆتانێن بۆشايىٚ بكاردئينن بۆ هەژمارتنا دووريىٚ لناڤبەرا دوو خالێن ژێر ئاڤ (نموونە 5)

ئارمانج

- ياسايا ئۆلەر بكاردئێت بۆ هەژمارتنا ژمارا سەر ولا و رووييێن چەند رووبەكى.
- پيتە پێدان ب ياسايا دووريىٚ دبۆشاييدا ددەن و بكاردئينن.
- پيتە پێدان ب ياسايا هەژمارتنا پۆتانىٚ ناڤەراستا پارچەراستەهێلى د بۆشاييدا ددەن و بكاردئينن.

چەندروو Polyhedron ژ چار رووياں يان زێدەتر پێكدهێت كو بتنىٚ د لايەكيدا ئێكو دوو دبن. پوازك و هەرەم چەند رووبنە، لىٚ لوولەك و قوچەك نە چەند رووبنە.

ئەڤ شێوەيێن ئەندازەيى چەند رووبنە	ئەڤ شێوەيێن ئەندازەى چەند رووبنين
	

پەيوەندىيەك هەيە ژمارا سەران و ژمارا لايان و ژمارا رووياں د چەند روٚيدا پێكڤە گرێددەت.

زاراف
Vocabulary

چەندروو
Polyhedron

ياسايا ئۆلەر Euler's formula

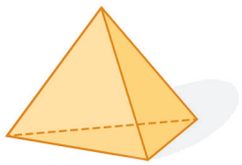
هەكەر V ژمارا سەران و E ژمارا لايان، و F ژمارا رووييێن چەند رووبەكى بن دێ:

$$V - E + F = 2$$

نموونە 1 بكارئينانا ياسايا ئۆلەر

ژمارا سەران و لايان و رووياں بهەژمێرە، و وان بكاربينە بۆ ساخكرنا ياسايا ئۆلەر.

أ



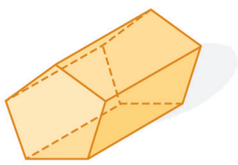
$V = 4 \quad E = 6 \quad F = 4$

$2 \overset{?}{=} 4 - 6 + 4$

$2 = 2$ ✓

ياسايا ئۆلەر بكاربينە ساناهيبكە.

ب



$V = 10 \quad E = 15 \quad F = 7$

$2 \overset{?}{=} 10 - 15 + 7$

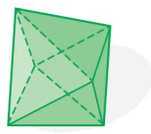
$2 = 2$ ✓

ياسايا ئۆلەر بكاربينە ساناهيبكە.

خالا چاڤدێرىٚ

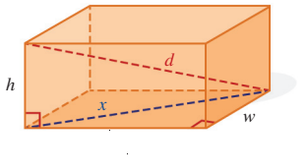
1. ژمارا سەران و لايان و رووياں بهەژمێرە، و بۆ ساخكرنا ياسايا ئۆلەر بكاربينە.

أ



ب

تیرەیێ چەند ڕوویی ئەو پارچەراستەهێلە، کو دوو سەران ب ئێکودوو دگەهینت و ناکەڤیتە د هیچ ڕوویەکیدا ژ ڕوویێن چەند ڕوویی.
وێنەیێ بەرامبەر تیرەیەك ژ تیرەییێن لاکێشە تەریبێ d دیاردکەت. بۆ هەژمارتنا دریژیا تیرەیی سەلمینراوا فیساگۆرس دوو جاران بکاربینە.
$d^2 = h^2 + x^2$ و $x^2 = \ell^2 + w^2$ پاشی ل جهێ x^2 بەهایێ دەرکەفتی دانە کو $d^2 = h^2 + \ell^2 + w^2$



فێربە و شرۆڤەبکە

تیرەیێ لاکێشە تەریبێ

دریژیا تیرەیێ لاکێشە تەریبەکێ، کو دریژیا وێ ℓ و پانیا وێ w و بلندیا وێ h بیت دبیتە.

$$d = \sqrt{h^2 + \ell^2 + w^2}$$

نموونـــــە 2 بکارئینانا سەلمێنراوا فیساگۆرس د بۆشایێدا.

ئەڤان بەهەژمێرە:

أ دریژیا تیرەیێ ئەوێ لاکێشە تەریبێ بەهەژمێرە کو دریژیا وێ **3 cm** و پانی **4 cm** و بلندیا وێ **5 cm**

بەهایێن ℓ و w و h ل جهێ وان دانە.
سادەبکە.

$$d = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}$$
$$= \sqrt{9 + 16 + 25}$$
$$= \sqrt{50} \approx 7.1$$

دریژیا تیرەیی وێ 7.1 cm ب نێزیکی

ب بلندیا لاکێشە تەریبەکێ بەهەژمێرە کو دریژیا وێ **12 m** و پانی **8 m** و دریژیا تیری **18 m** بیت.

بەهایێن ℓ و w و h ل جهێ وان دانە.
هەردوو لایان دووجا بکە.
سادەبکە
بەهایێ h^2 بهەژمێرە.
ڕەگێ دووجایێ هەردوو ڕەخان وەربگرە.

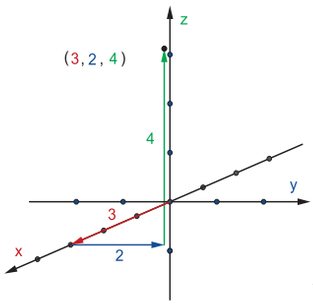
$$18 = \sqrt{8^2 + 12^2 + h^2}$$
$$(18)^2 = 8^2 + 12^2 + h^2$$
$$324 = 64 + 144 + h^2$$
$$h^2 = 116$$
$$h = \sqrt{116} \approx 10.8$$

بلندیا لاکێشە تەریبێ 10.8 m بنێزیکی.

خالا چاڤدێریێ

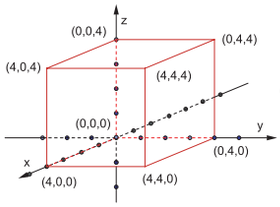
2. دریژیا تیرەیێ شەشپالوێیەکێ بەهەژمێرە هەکەر دریژیا لایەکی وێ 5 cm بیت.

ل بیرا تەبیت، بۆ دیارکرنا جهێ خالەکێ لسەر ڕووتەختێ پۆتانێ تە پێدڤی ب دوو پۆتانان هەیە، و بۆ دیارکرنا جهێ خالەکێ دبۆشایێدا تە پێدڤی ب سێ پۆتانان هەیە. هەروەسا ل بیرا تەبیت کو بۆشایێ پۆتانێ پێدڤی ب 3 تەوەران هەیە وەکی ل وێنەیێ بەرامبەر دیار. هەر ڕێکخستیەکی سێیانی (x, y, z) بتنێ خالەکێ دیاردکەت د بۆشایێ پۆتانیدا. هەروەسا هەر خالەك دبۆشایێ پۆتانیدا ڕێکخستیەکی سێیانی دیاردکەت. بۆ دیارکرنا خالا $(3, 2, 4)$ ژ خالا بنەڕەت سێ یەکەیان بەرەڤ پێش بلقە لسەر تەوەرێ ئێکێ، پاشی دوو یەکەیان بۆ لایێ ڕاستێ تەریبی تەوەرێ دووێ، پاشی 4 یەکەیان بۆ سەری تەریبی تەوەرێ سێیێ بلقە.



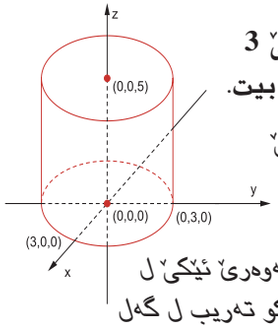
نموونـــــه 3 ویٚنەکێشانا تەنەکی د بۆشایێ پۆتانیدا

أ **شەشپالوٚیەکێ (خشتەکەکێ) بکێشە دریژیا لایێ وێ 4 یەکە بیت و پۆتانێن سەریٚن وێ دسالب نەبن.**



شەشپالوٚیێ 8 سەر هەنە کو پێکهاتینە ژ ڤان خالان $(0,0,0)$، $(0,4,0)$، $(0,0,4)$، $(4,0,0)$، $(4,4,0)$، $(4,0,4)$، $(0,4,4)$، $(4,4,4)$

ب **لوولەکەکێ بکێشە بلنداهیا وێ 5 یەکە و نیڤتیرەیێ بنکەیێ وێ 3 یەکە بیت و چەقێ بنکەیێ وێ یێ خوارێ خالا بنەڕەت $(0,0,0)$ بیت.**

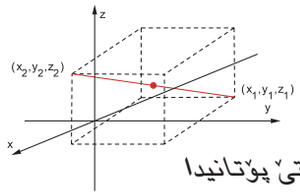


چەقێ بنکەیێ خوارێ وێنەبکە $(0,0,0)$ ، ژبەر کو بلنداهیا لوولەکێ 5 یەکەیە، دێ چەقێ بنکەیێ سەری بیتە $(0,0,5)$ ـە .
ئەڤێ خالێ وێنەبکە. ل رەخەکی دی ژبەر کو نیڤتیرەیێ بنکەیێ وێ 3 یەکەیە، ئانکو بنکێ خوارێ تەوەرێ دووێ ل خالا $(0,3,0)$ دبڕیت و تەوەرێ ئێکێ ل خالا $(3,0,0)$ دبڕیت. بنکەیێ خوارێ بکێشە پاشی بنکەیێ سەری کو تەریب ل گەل بنکەیێ خوارێ بکێشە، ناڤبەرا هەردوو بنکەیان بگەهینە.

خالا چاڤدێریێ

3. وێنەیێ قووچەکەکا بازنەیی یا وەستاو بکێشە کو بلنداهیا وێ 7 یەکە و نیڤتیرەیێ بنکەیێ وێ 5 یەکە و چەقێ وێ خالا بنەڕەت $(0,0,0)$ بیت.

بۆ هەژمارتنا دووریێ ل ناڤبەرا هەردوو خالان $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ د بۆشایێدا وێنەیێ لاکێشە تەریبەکێ بکێشە ئێک ژ تیرەییێن وێ $\overline{AB}$ بیت. یاسایا هەژمارتنا دریژیا تیرەی بکاربینە.



هەروەسا تو دشێی یاسایەکا هاوشێوە بۆ یاسایا دووریێ دروتەختێ پۆتانیدا بکاربینی. هەروەسا بۆ هەژمارتنا پۆتانێن خالا ناڤەراستا پارچەراستەهێلەکی د بۆشایدا، تو دشێی یاسایەکا هاوشێوە بۆ یاسایا پۆتانێ خالا ناڤەراستا پارچەراستەهێلی د رووتەختێ پۆتانیدا بکاربینی.

فێربە و شرۆڤەبکە

یاسایا دووریێ و پۆتانێن خالا ناڤەراست د بۆشایی پۆتانیدا

یاسایا $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ بکاربینە بۆ هەژمارتنا دووریێ لناڤبەرا هەردووخالان $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$.

ناڤەراستا ئەوێ پارچەراستەهێل سەرێن وی هەردوو خال $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ دبیتە $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$

نموونـــــه 4 هەژمارتنا دووریێ و پۆتانێن ناڤەراستێ د بۆشایێ پۆتانیدا

دووریێ ل ناڤبەرا هەر دوو خالان A و B و پۆتانێن ناڤەراستا $\overline{AB}$ بهەژمێرە. بەرسڤا خو بۆ نیزیکترین دەهێکێ نیزیکبکە.

أ **$B(3, 4, 12)$ ، $A(0, 0, 0)$**

دووری

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$
$$=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2+(12-0)^2}$$
$$=\sqrt{9+16+144}$$
$$=\sqrt{169}=13$$

پۆتانێن ناڤەراستێ

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$
$$M\left(\frac{0+3}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{0+12}{2}\right)$$
$$M(1.5, 2, 6)$$

ب $B(7, 12, 15)$ ، $A(3, 8, 10)$

دووری

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$
$$= \sqrt{(7-3)^2 + (12-8)^2 + (15-10)^2}$$
$$= \sqrt{16+16+25}$$
$$= \sqrt{57} \approx 7.5$$

پۆتانێن ناڤەڕاستێ

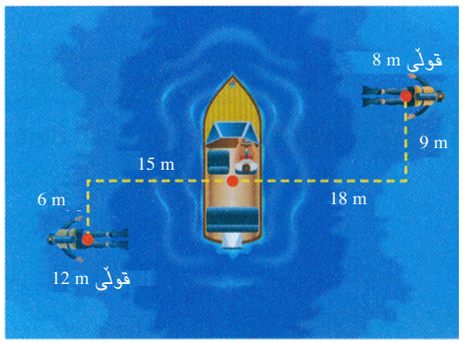
$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$
$$M\left(\frac{3+7}{2}, \frac{8+12}{2}, \frac{10+15}{2}\right)$$
$$M(5, 10, 12.5)$$

خالا چاڤدێریێ

4. دووریێ لناڤبەرا هەردوو خالان A و B و پۆتانێن ناڤەڕاستا $\overline{AB}$ بهەژمێرە، بەرسڤا خو بۆ نێزیکترین دەهئیک نێزیکبکە.

أ $A(0, 9, 5)$ ، $B(6, 0, 12)$ ب $A(5, 8, 16)$ ، $B(12, 16, 20)$

نموونـــــە 5 بجهێنان



دوو مەلەڤانکەرێن ژێر ئاڤ بەرەڤ دوو جهێن وەکی ل ویێنەیێ بەرامبەر دیار جوّن. دووری لناڤبەرا وان چەندە؟

وەسا دێ دانیین کو جهێ بەلەما وان خالا بنەرەتە $(0, 0, 0)$ ، جهێ هەردوو مەلەڤانکەرێن ژێر ئاڤ هەردوو خالن $(18, 9, -8)$ و $(-15, -6, -12)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$
$$= \sqrt{(-15-18)^2 + (-6-9)^2 + (-12+8)^2}$$
$$= \sqrt{1330} \approx 36.5$$

دووری ل ناڤبەرا هەردوو مەلەڤانکەرێن ژێر ئاڤ 36.5 m بنێزیکی.

خالا چاڤدێریێ

5. دێ چ **بیت هەکەر** هەردوو مەلەڤانکەرێن ژێر ئاڤ ب ریّك سەرکەفتنە سەر رووێ ئاڤێ. دووری ل ناڤبەرا وان دێ چەند بیت؟

هزربکە و گەنگەشێ بکە

فیزیە و بیرکاری

1. چەوا دووریێ لناڤبەرا دوو خالان دبۆشایێ پۆتانیدا د هەژمێری.

2. ریّکخەربەر. ئەڤێ خشتێ کوّپیبکە و پاشی تەمامبکە.

	پوازکێ وەستاوێ بنکە لاکێشە	هەرەما وەستاوا بنکە لاکێشە
ژمارا سەران		
ژمارا لایان		
ژمارا رووبان		
$V - E + F$		

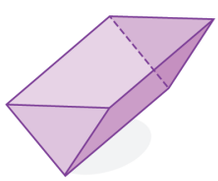
6-1 ڕاهێنان

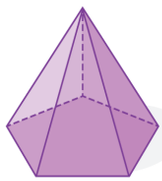
ڕاهێنانێن ئاراستەکری

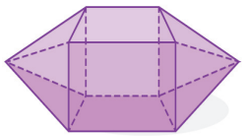
1 **زاراف** ڕوونبکە بۆچی لوولەك ب چەند ڕوویێ ناهێتە دانان

بەرێ خۆ بدە نموونە 1

ژمارا سەران و لایان و ڕوویان بهەژمێرە و بکاربینە بۆ ساخکرنا دروستیا یاسایا ئۆلەر.

2 

3 

4 

بەرێ خۆ بدە نموونە 2

پیڤانێن ل خوارێ بۆ نێزیکترین دەهئیك بهەژمێرە.

5 تیرەیێ لاکێشە تەریبەکێ دریژیا وێ 8 cm وپانیا وێ 4 cm و بلندایا وێ 12 cm بیت.

6 بلندایا لاکێشە تەریبەکێ دریژیا وێ 10 cm و پانیا وێ 6 cm وتیریێ وێ 13 cm بیت.

7 تیرەیێ پوازکەکا دەستا و بنکەیێ وێ چارگۆشەی، هەکەر دریژیا لایەکی بنکەیێ وێ 12 cm و بلندایا وێ 10 cm بیت.

بەرێ خۆ بدە نموونە 3

وێنەیێ ئەڤێن ل خوارێ بکێشە

8 قووچەکەکێ بلندایا وێ 4 یەکە و نیڤتیرەیێ بنکەیێ وێ 8 یەکە و چەقێ بنکێ وێ خالا(0, 0, 0) بیت.

9 لوولەکەکێ بلندایا وێ 4 یەکە و نیڤتیرەیێ هەردوو بنکەیێن وێ 3 یەکە و چەقێ بنکەیێ خوارێ خالا (0, 0, 0) بیت.

10 شەشپالوێەك دریژا لایەکی وی 7 یەکە و سەرەکی وێ خالا بنەڕەت(0, 0, 0) بیت.

بەرێ خۆ بدە نموونە 4

دووریێ ل ناڤبەرا هەردوو خالێن A و B و پۆتانێن ناڤەڕاستا $\overline{AB}$ بهەژمێرە و بەرسڤێ بۆ نێزیکترین دەهئیك نێزیکبکە.

11 $A(0, 0, 0)$ ، $B(9, 5, 10)$

12 $A(0, 3, 8)$ ، $B(7, 0, 14)$

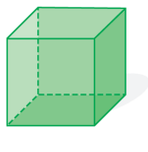
13 $A(4, 6, 10)$ ، $B(9, 12, 15)$

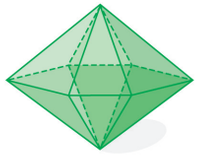
بەرێ خۆ بدە نموونە 5

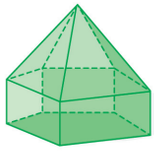
14 **بۆخۆشیێ:** پشتی روژەکێ ژ ئەنجامێ وەرزشا ریڤەچوونێ ل چیایی، تیمێ خیڤەتەك ڤەدا بۆ بهێنڤەدانێ کو 3 km بەرەڤ ڕۆژهەلات و 7 km بەرەڤ باکوور یا دووربوو ژ خالا دەستپێکێ و دکەڤتە سەر بلندایەکێ کو ب 0.6 km بلندتر بوو ژ خالا دەستپێکێ، دووریی لناڤبەرا خالا دەستپێکێ و خیڤەتێ چەندە؟

بجهئینان

ژمارا سەران و لایان و ڕوویان بهەژمێرە و بکاربینە بۆ ساخکرنا دروستیا یاسایا ئۆلەر:-

15 

16 

17 

پیڤانێن ل خوارێ بۆ نێزیکترین دەهئیك بهەژمێرە.

18 تیرەیێ لاکێشە تەریبەکێ هەکەر دریژیا وێ 7 cm و پانیا وێ 8 cm و بلندایا وێ 16 cm بیت.

19 بلندایا لاکێشە تەریبەکێ هەکەر دریژیا وێ 15 cm و پانیا وێ 6 cm وتیرەیێ وێ 17 cm بیت.

20 دریژیا لایێ شەشپالویەکێ هەکەر تیرەیێ وێ 8 cm بیت.

راهێنانێن ئازاد	
بۆ شیکارکرنا بەرێ خۆ پرسیاران	بدە نموونە
1	17–15
2	20–18
3	23–21
4	26–24
5	27

وێنەیێ ئەڤان بکێشە.

21 لوولەکەك بلندااهیا وێ 3 یەکە و نیڤتیرەیێ بنکەیێ وێ یێ بازنەیی 5 یەکە بیت و چەقێ بنکەیێ خوارێ خالا بنەڕەت$(0, 0, 0)$ بیت.

22 قووچەکەك بلندااهیا وێ 4 یەکە و نیڤتیرەیێ بنکە یێ وێ یێ بازنەیی 2 یەکە و چەقێ بنکەیێ وێ خالا بنەڕەت$(0, 0, 0)$ بیت.

23 پوازکەکا وەستاوا بنکە چارگۆشەیی، سەرەکێ وێ خالا بنەڕەت $(0, 0, 0)$ بیت و دریژیا لایەکێ بنکەیێ وێ 5 یەکە و بلندااهیا وێ 3 یەکە بیت.

دووریا ل ناڤبەرا هەردوو خالێن A و B و پۆتانێن ناڤەڕاستا $\overline{AB}$ بهەژمێرە، بەرسڤا خو بۆ نیزیکترین دەهئیك نیزیکبکە.

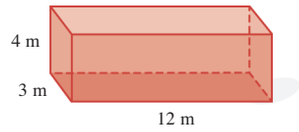
24 $A(0, 0, 0)$ ، $B(4, 4, 4)$

25 $A(2, 3, 7)$ ، $B(9, 10, 10)$

26 $A(2, 5, 3)$ ، $B(8, 8, 10)$

27 **بارێ کەش و هەوایی:** بلندااهیا عەورەکی 6500 پێیە ئەو بارانا عەور دبارینیت 700 پێیە بەرەڤ سەمتا باشووری چۆ و 500 پێیان ب بەرەڤ سەمتا روژهەلات چۆ بەری ئەو بگەهیتە سەر ئەردی. ئەو دووریا بارانێ بڕی ژ عەوری بۆ سەر رووییێ ئەردی چەندە؟

28 **پێنگاڤێن جۆرا و جۆر** دریژیا تیرەیێ لاکێشە تەریبا بەرامبەر بهەژمێرە. دەرئەنجامێ دوو جاران کرنا دریژی و پانیی و بلندااهیا لاکێشە تەریبێ لسەر دریژیا تیرەیێ وێ چیبە؟



ئەوێ نەدیار بهەژمێرە، و وێنەیێ ئەوی شێوەیێ ئەندازەیی بکێشە کو ئەو سەر ولا و ڕووهەبن:

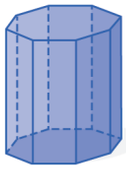
	چەند ڕوو	ژمارا ڕوویان	ژمارا لایان	ژمارا سەران
		5	8	5
29			12	8
30		5	9	
31		7		7

دەروازەیەك

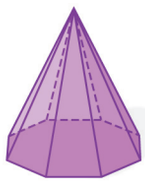
لسەر سەقای

پاراستایێ هندەك پەلە عەورێن ڕەش دگەهیتە نیزیك 635 هەزار تەن کو ژ کێشا 100 هزار فیلان زێدەترە.

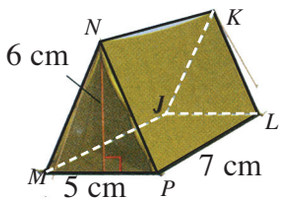
32 **جەبر** هەر بنکەیەك ژ هەردوو بنکەیێن پوازکا بەرامبەر چەند لایەکە n لا هەنە، پێ n وان بڕان بنڤیسە کو ژمارا سەرێن پوازکێ و ژمارا لایێن وێ و ژمارا ڕوویێن وێ بنوێنن. ئەوان ئەنجامێن بدەست تە کەفتین بکاربینە بۆ ساخکرنا راستیا یاسایا ئۆلەر.



33 **جەبر** بنکەیێ هەرەما بەرامبەر چەندلایەکە n لا هەنە، ئەوان بڕان پێ n بنڤیسە کو ژمارا سەرێن هەرەمێ و ژمارا لایێن وێ و ژمارا ڕوویێن وێ بنوێنن. ئەوان ئەنجامێن بدەست تە کەفتین بکاربینە بۆ ساخکرنا دروستیا یاسایا ئۆلەر.



34 خیڤەتا بەرامبەر پوازکەکە بنکەیێ وێ سێگۆشەیەکا وەستاوە کو $\overline{KJ} \cong \overline{KL} \cong \overline{MN} \cong \overline{NP}$



أ خیڤەت بشێوەیەکی ڤەدا کو سەرێ J خالا بنەڕەت $(0, 0, 0)$ بیت و سەرێ M خالا $(7, 0, 0)$ بیت پۆتانێن سەرێن دی بهەژمێرە.

ب ئەوێ خیڤەت ڤەدایی دقێت دووریێ لناڤبەرا K و P بزانت دا تێلەکێ زێدەبکەت بۆ پالپشتیا خیڤەتێ. KP بهەژمێرە، بەرسڤا خو بۆ نیزیکترین دەهئیك نیزیکبکە.

پیڤانا نەدیار بۆ هەر لاکێشە تەریبەکێ بهەژمێرە بەرسڤان لسەر شێوەیێ ڕەگەکێ سادە بنڤیسە.

	دریژی ℓ	پانی w	بلندایی h	تیرە d
35	6	6	6	■
36	24	■	60	65
37	12	18	■	24
38	■	2	3	4

وێنەیێ ئەڤان بکێشە

39 لوولەکەك بلندایا وێ 5 یەکە و چەقێ بنکەیێ بازنا خوارێ (1, 2, 5)و نیڤتیرەیی وێ 4 یەکە بیت.

40 قووچەکەك بلندایا وێ 7 یەکە و چەقێ بنکەیێ وێ (3, 3, 6) و نیڤتیرەیێ وێ 3 یەکە بیت.

41 شەشپالوێیەك (خشتەك) دریژیا لایەکێ وێ 6 یەکە و چەقێ وێ خالا (4, 2, 3) بیت.

42 لاکێشە تەریبەك سەرێن وێ (4, 2, 5)، (4, 6, 5)، (4, 6, 8)، (8, 6, 5)، (8, 2, 5) .
(8, 6, 8) (4, 2, 8) (8, 2, 8)

43 قووچەکەك سەرێ وێ (4, 7, 8) و چەقێ بنکەیێ وێ یێ بازنەیی (4, 7, 1) و نیڤتیرەیێ وێ 4 یەکە بیت.

44 لوولەکەك نیڤترەیێ بنکەیێ وێ یێ بازنەیی 5 یەکەیە د چەقێ هەردوو بنکەیێن وێ هەردوو خالن (2, 3, 7) و (2, 3, 15) .

$\overline{AB}$ بکێشە پاشی دریژی و پۆتانێن ناڤەڕاستێ بهەژمێرە. بەرسڤێ بۆ نێزیکترین دەهئیك نێزیکبکە.

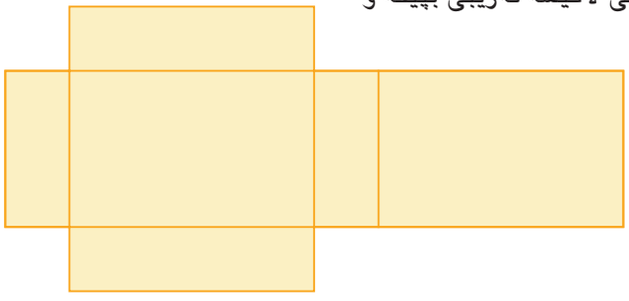
45 $A(1, 2, 3)$، $B(3, 2, 1)$ 46 $A(4, 3, 3)$، $B(7, 4, 4)$ 47 $A(4, 7, 8)$، $B(3, 1, 5)$

48 $A(0, 0, 0)$، $B(8, 3, 6)$ 49 $A(6, 1, 8)$، $B(2, 2, 6)$ 50 $A(2, 8, 5)$، $B(3, 6, 3)$

51 **پێنگاڤێن جوڕا و جوڕ**
بەهایێ z بهەژمێرە، هەکەر بزانی دووری لناڤبەرا $R(6, -1, -3)$ و $S(3, 2, z)$ دبیتە 13 یەکە.

52 وێنەیێ شێوەیەکی ئەندازەی بکێشە 6 سەر و 6 روو هەبن.

53 **خەملاندن:** دووریێن روویێ ئەڤێ لاکێشە تەریبێ بپیڤە و دریژیا تیرەیێ وێ بخەملینە..



54 **دەستەواژەیەکێ دابڕێژە:** ل دویڤ بۆچوونێن تە کیژ پارچەڕاستەهێلی ئەوێ هەردوو سەرێن وێ دکەڤنە سەر لاکێشە تەریبێ دریژترە؟ دەستەواژەیا خۆ ساخبکە بکارئینانا 3 پارچە ڕاستەهێلان کو سەرێن وان بکەڤنە سەر لاکێشە تەریبا $ABCDEFGH$ کو $A(0, 0, 0)$ و $B(1, 0, 0)$ و $C(1, 2, 0)$ و $D(0, 2, 0)$ و $E(0, 0, 2)$ و $F(1, 0, 2)$ و $G(1, 2, 2)$ و $H(0, 2, 2)$

55 **هزکرنا ڕەخنەگر:** خالێن $A(3, 2, -3)$ و $B(5, 8, 6)$ و $C(-3, -5, 3)$ سێگۆشەیەکێ دنوێنن، ئەوێ سێگۆشێ ل دویڤ لا و گۆشان پۆلینبکە.

56 **بنڤیسە:** نیڤتبرەیێ لوولەکەکێ 4 cm و بلندایا وێ 6 cm، دریژیا دریژترین پارچە راستەهێلی چەندە کو سەرێن وی لسەر لوولەکێ بن؟ جهێ هەردوو سەرێن وی پارچەڕاستەهێلێ دیاربکە.

57 ژمارا سەران و لایان و ڕوویێن هەرەمەکا بنکەیێ وێ شەشلا چەندە؟

أ) 6 ڕوو، 10 لا، 6 سەر.
ج) 7 ڕوو، 10 لا، 7 سەر.
ب) 7 ڕوو، 12 لا، 7 سەر.
د) 8 ڕوو، 18 لا، 12 سەر.

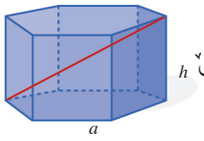
58 کێژ ئەڤانێن ل خوارێ نیزیکترە بۆ تیرەیێ ئەوێ لاکێشە تەریبا دریژیا وێ 12 m و پانیا وێ 8 m و بلندایا وێ 6 m.

أ) 6.6 m
ب) 44 m
ج) 15.6 m
د) 244.0 m

59 دووریا لنافبەرا هەر دوو خالان $A\,(7,14,8)$ و $B\,(9,3,12)$ چەندە؟ بەرسڤا خۆ بۆ نێزیکترین دەهێكێ نێزیکبکە.

أ) 10.9
ب) 11.9
ج) 119.0
د) 141.0

بەرهنگاری و بەرقرەهکرن



60 **پێنگاڤێن جوڕا و جۆر:** بنکەیێن پوازکا بەرامبەر شەشلایەکی ڕێکە، دریژیا لایەکێ وێ a یەکەیە، د ڕێژەیا تیرەیێ سۆر پێ دریژیا لایێ a و بلندایێ h بهەژمێرە.

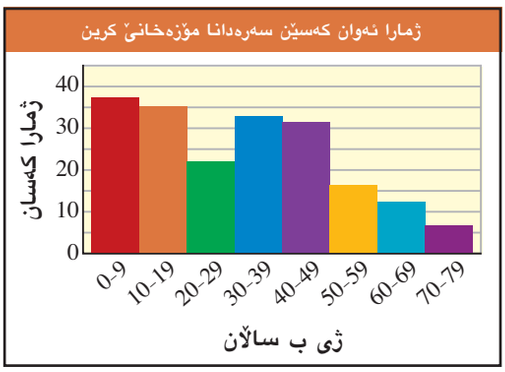
61 ئەرێ خالێن $A(-1,\,2,\,4)$ و $B(1,\,-2,\,6)$ و $C(3,\,-6,\,8)$ لسەر ئێك راستەهێلن؟

62 **جەبر:** پۆتانان و یاسایا دووریێ بکاربینە بۆ سەلماندنا یاسایا پۆتانێن ناڤەراستێ.
پێدایی: خال $A(x_1,\,y_1,\,z_1)$ و $B(x_2,\,y_2,\,z_2)$ و $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.
$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\,\frac{y_1+y_2}{2},\,\frac{z_1+z_2}{2}\right)$
داخوازی: هەرسێ خال دێ کەڤنە سەر ئێك ڕاستەهێل و AM: MB

63 **جەبر** پۆتانان بکاربینە بۆ سەلماندنا ئەوێ ئێکێ کو تیرەیێن لاکێشە تەریبێ جووتن و ئێکودوو لەت دکەن دناڤەراستێدا.
پێدایی: پوازکەکا وەستاوا بنکە لاکێشەی سەرێن وێ $A(0,\,0,\,0)$ و $B(a,\,0,\,0)$ و $C(a,\,b,\,0)$ و $D(0,\,b,\,0)$ و $E(0,\,0,\,c)$ و $F(a,\,0,\,c)$ و $G(a,\,b,\,c)$ و $H(0,\,b,\,c)$.
داخوازی: $\overline{AG}$ و $\overline{BH}$ جووتن و ئێکودوو لەت دکەن.

پێداچوونا لوولپێچی

ویَنەیێ ڕوونکرنا بەرامبەر ژمارا وان کەسێن سەرەدانا مۆزەخانا نیشتمانی کرین ل دووڤ ژیێ وان دنوێنت ئەڤان بهەژمێرە. (پۆلێن پێشتر)



64 55 ژمارا وان کەسێن سەردانا مۆزەخانێ کرین و ژیێ وان دناڤبەرا 10 سال و 29 سال دا.

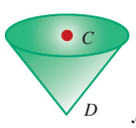
65 9-0 چەشنا ئەوی ژیێ کو پترترین سەر دان کری.

یاسایەکێ بۆ هەژمارتنا ڕووبەرێ هەر شێوەیەکی ئەندازەی پشتی گۆهۆرینێ ئەنجامدای بنڤیسە. (پۆلێن پێشتر)

66 لاتەریبەك دریژیا بنکەیێ وێ b و بلندایا وێ h بیت پشتی دووجارانکرنا بلندایا وێ.

67 نیڤچە لاتەریبەك بلندایا وێ h و هەردوو بنکەیێن وێ b_1 و b_2 بن پشتی لێکدانا b_1 دگەل $\frac{1}{2}$.

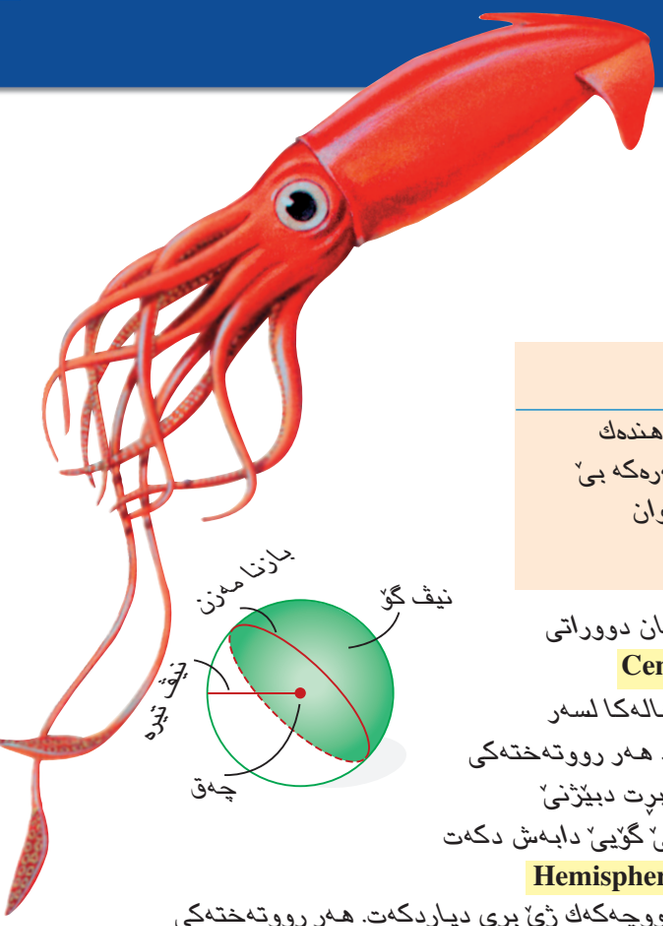
68 بازنەك نیڤتیرەیێ وێ r بیت پشتی سێ جارانکرنا نیڤتیرەیێ وێ.



ویَنەیێ بەرامبەر بکاربینە بۆ شیکارکرنا پرسیاران ژ 69 هەتا 71 (وانەیا 1-2)

69 شێوەی پۆلینبکە.
70 ناڤێ لایان بێژە.
71 ناڤێ بنکەیێ وێ بێژە.

7-1 گـــــۆ
Sphere



ئارمانج
- ل بیر ئینانا یاسایا قەبارەیێ گۆیی و بکارئینانا وێ
- ل بیر ئینانا یاسایا رووبەرێ گۆیێ و بکارئینانا وێ.

کی ئەقێ بکاردئینت؟
زانایێن زیندەزانی لێکۆلینێن دکەن لسەر چاڤێن هندەک گیاندارێن ل کووراتییێن دەریایان دژین، وەکی مەرەکە بێ مەزن، ب مەرەما دەستکەفتنا زانیاریان لسەر ئەوان کووراتیان. (نموونە 2)

زاراڤ
Vocabulary

گۆ
Sphere

چەقێ گۆیێ
Center of a sphere

نیڤتیرەیێ گۆیێ
Radius of a sphere

نیڤا گۆیی
Hemisphere

بازنا مەزن
Great circle

قەبارە
Volume (v)

لوولەك
Cylinder

قووچەك
Cone

گۆ Sphere کۆمەلەکا خالا نە د بۆشاییدا کو هەمان دووراتی هەنە ژ خالەکا دیارکری دبێژنێ **چەقێ گۆیێ Center** هەر پارچەراستەهێلەکی ناڤبەرا چەقێ گۆیێ و خالەکا لسەر گۆیێ بگەهینت دبێژنێ **نیڤتیرەیێ گۆیی Radius** . هەر روویتەختەکی د چەقێ گۆیێ را ببورت ئەوێ گۆیێ ل بازنەکێ دبرێت دبێژنێ **بازنا مەزن Great circle** هەروەسا ئەو روویتەختێ گۆیێ دابەش دکەت بۆ دوو بەشان، دبێژنە هەر ئێکی ژ وانا **نیڤ گۆ Hemisphere** ئەڤ ویێنەیێ ل خوارێ نیڤ گۆیەکێ و لوولەکا قووچەکا ژێ بڕی دیاردکەت. هەر روویتەختەکی تەریبی بنکەیێ لوولەکێ و تەریبی بازنا مەزنا گۆیێ، دێ لوولەکێ و گۆیێ د دوو برگەیان دا برێت (ئەو هەردوو برگە ب رەنگێ کەسك دد یارن و روویەرێ هەردووان دێ یەکسان بن. ژ ئەقێ دیاردبیت کو نیڤ گۆ و لوولەکا قووچەك ژ وێ هاتیە برین قەبارێ وان یەکسانن. پێ ڕێسایا کاڤالیرا Cavalier's Principle . یەکسانبوونا هەر دوو ڕووبەران دێ هێتە سەلماندن ل پرسیارا (39) ێ.

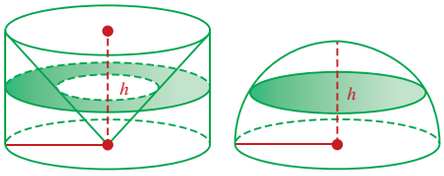
V (Hemisphere) = V (Cylinder) - V (Cone)

V (نیڤ گویێ) = V (لوولەکێ) – V (قوچەکێ)

$= \pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{2}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{2}{3}\pi r^2 (r) = \frac{2}{3}\pi r^3$

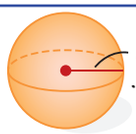


بلنداهیا لوولەکێ یەکسانە ب نیڤتیرەیێ گویێ

ژ ئەقێ دەرئەنجام دکەین کو قەبارەیێ گۆیەکا نیڤتیرەیێ وێ r دبیتە $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ چونکی قەبارەیێ گۆیێ یەکسانە ب دوو جارانی قەبارەیێ نیڤ گۆیێ.

فیزیە و ژیانا ڕۆژانە

قەبارێ گۆیێ

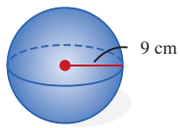


قەبارەیێ گۆیەکا نیڤتیرەیێ وێ r بیت ب یاسایا $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ دهێتە هەزمارتن.

نموونـــــە 1 هەژمارتنا قەبارەیێ گۆیێ

پێ π بهەژمێرە.

أ قەبارەیێ گۆیا بەرامبەر



بهایێ نیڤتیرەی ل جهێ وی دانە و سادەبکە

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$V = \frac{4}{3}\pi (9)^3 = 972\pi$

$V = 972\pi$

قەبارەیێ گۆیێ دبیتە $972\pi\ cm^3$

ب تیرەیێ گۆیەکێ قەبارەیێ وێ $972\pi\ cm^3$ بیت.

$v = \frac{4}{3}\pi r^3$ و ل جهێ v دانە

$$972\pi = \frac{4}{3}\pi r^3$$

هەردوو رەخان دابەشبکە لسەر $\frac{4}{3}\pi$

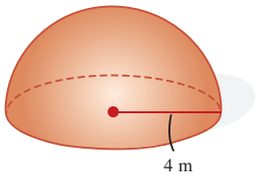
$$729 = r^3$$

$$r = 9$$

$$d = 2 \times r = 2 \times 9 = 18$$

تیرەیێ گۆیێ دبیتە 18 m

ج قەبارەیا نیڤ گۆیا بەرامبەر



$$V = \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi(4)^3 = \frac{128\pi}{3}$$

قەبارێ نیڤ گۆیێ دبیتە $\frac{128\pi}{3}\ m^3$

خالا چاڤدێریێ

1. نیڤ تیرەیێ گۆیەکێ بهەژمێرە هەکەر قەبارەیێ وێ $2304\pi\ cm^3$ بیت.

نموونـــــە 2 بجهئینان لسەر زێندەزانی

مەرەکەبە گیاندەرەکی دەریاییە ل کووراتیێن دەریایێ دژیت. مەرەکەبە پێدڤی ب چاڤێن فرەھ هەیە دا بشێت ل ئەوێ ڕۆناهیا کێم یا ل کووراتیێن دەریایان نێچیرا خو ببینت. تیرەیێ چاڤێ مەرەکە بەیێ گەلەك مەزن دبیتە 25 cm دەمێ تیرەیێ چاڤێ مرۆڤی 2.5 cm ب نێزیکی. ئەرێ قەبارەیێ چاڤێ مەرەکەبەیێ گەلەك مەزن چەند جارانی قەبارەیێ گۆیا چاڤێ مرۆڤییە؟

قەبارەیێ گۆیا چاڤێ مرۆڤی

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi(1.25)^3$$

قەبارەیێ گۆیا چاڤێ مرۆڤی دبیتە $8.18\ cm^3$ بنێزیکی.

قەبارەیێ گۆیا چاڤێ مەرەکەبەیێ گەلەك مەزن

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

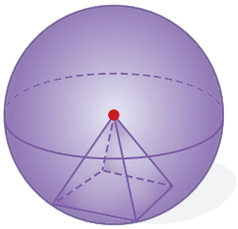
$$V = \frac{4}{3}\pi(12.5)^3$$

قەبارەیێ گۆیا چاڤێ مەرەکەبەیێ گەلەك مەزن. دبیتە $8181.23\ cm^3$.

قەبارەیێ چاڤێ مەرەکەبەیێ گەلەك مەزن 1000 جارانی قەبارەیێ چاڤێ مرۆڤییە.

خالا چاڤدێریێ

2. تیرەیێ گۆیا چاڤێ بالێندەیێ طنان 0.6 cm بنێزیکی. قەبارەیێ گۆیا چاڤێ مرۆڤی دبیتە چەند جارانی قەبارەیێ گۆیا چاڤێ وی بالێندەیی؟



ل ویێنەیێ بەرامبەر سەرێ هەرەمێ دکەفتە د چەقێ گۆیدا. بلندا هیا هەرەمێ یەکسانە نیڤتیرەیێ گۆیێ ب نێزیکی. وەسادانە کو ئەو گۆیە هاتە پرکرن ب (n) هەرەمان روویەرێ بنکەیێ هەر ئێك ژ وان B و بلندا هیا وێ r بیت.

قەبارەیێ گۆیێ یەکسانە سەرجەمێ قەبارەیێن هەرەمان ب نێزیکی.

$$V(\text{Sphere}) = \frac{1}{3}Br + \frac{1}{3}Br + ... + \frac{1}{3}Br$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = n\left(\frac{1}{3}Br\right)$$

هەردوو ڕەخان دابەشی $\frac{1}{3}r$ بکە.

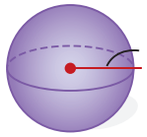
$$4\pi r^2 = nB$$

هەکەر هەرەمان گۆ پرکرن، سەرجەمێ ڕووبەرێ بنکەییێن وان دێ یەکسانێ ڕووبەرێ رووییێ گۆیێ بیت بنێزیکی، ئانکو $S = 4\pi r^2$ هەر چەند ژمارا هەرەمان زێدەبیت، سەرجەمێ ڕووبەرێ بنکەییێن وان دێ نێزیك بیت بۆ ڕووبەرێ رووییێ گۆیێ.

فێربە و شرۆڤەبکە

ڕووبەڕێ ڕوویی گۆیێ

ڕووبەڕێ ڕوویی گۆیەکا نیڤتیرەیێ وێ r بیت ب یاسایا $S = 4\pi r^2$ دهێتە هەژمارتن.



نموونـــــە 3 هەژمارتنا ڕووبەڕێ ڕوویی گۆیێ

پێ π ئەڤان بهەژمێرە:

أ **ڕووبەڕێ ڕوویی گۆیەکێ تیرەیێ وێ 10 cm بیت.**

$$S = 4\pi r^2 = 4\pi(5)^2 = 100\pi$$

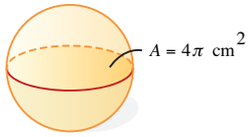
ڕووبەڕێ ڕوویێ گۆیێ دبیتە 100π cm^2

ب **قەبارێ گۆیەکێ ڕووبەڕێ وێ 144π cm^2**

$$S = 4\pi r^2$$
$$144\pi = 4\pi r^2$$
$$6 = r$$
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(6)^3 = 288\pi$$

قەبارێ گۆیێ دبیتە 288 cm^3

ج **ڕووبەڕێ ڕوویێ گۆیەکێ هەکەر ڕووبەڕێ بازنا مەزن 4π cm^2 بیت.**

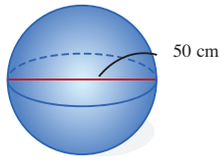


$$\pi r^2 = 4\pi$$
$$r = 2$$
$$S = 4\pi r^2 = 4\pi(2)^2 = 16\pi$$

ڕووبەڕێ ڕوویێ گۆیێ دبیتە 16π cm^2

خالا چافدێریێ

3. ڕووبەڕێ ڕوویێ گۆیا بەرامبەر بهەژمێرە.



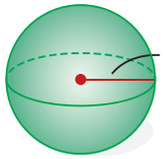
نموونـــــە 4 دیارکرنا کارتێکرنا گوهۆڕینا پیڤانان لسەر قەبارە و ڕووبەڕێ ڕوویێ گۆیێ

نیڤتیرەیێ گۆیەکێ ل 3 دا، بەحسێ کارتێکرنا وێ لسەر ڕووبەڕێ ڕوویێ گۆیی بکە.

گۆیا بنەڕەت

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$= \frac{4}{3}\pi(3)^3$$
$$= 36\pi$$

گو پشتی مەزنکرنا نیڤتیرەیێ وێ



$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$= \frac{4}{3}\pi(9)^3$$
$$= 972\pi$$

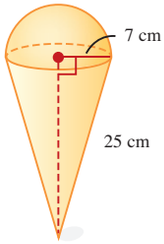
بەرێ خو بدێ کو $972\pi = 27(36\pi)$. ئانکو دەمێ نیڤتیرەیێ وێ ل 3 بدەی، قەبارەیێ وێ دگەل 27 ێ دهێتە لێکدان. [(تێبینیێ بکە 27 سێجایێ 3 یە)

خالا چافدێریێ

4. چەوا قەبارەیێ گۆیەکێ دهێتە گۆهۆڕین ئەگەر نیڤتیرێ وێ دابەشێ 3 بکەن؟

نموونـــــه 5 هەژمارتنا قەبارە و ڕووبەرێ تەنێن (لەشێن) ئاوێتە

ڕووبەرێ ڕوویی و قەبارێ تەنێ بەرامبەر پێ π بهەژمێرە.



ڕووبەرێ ڕوویی ئەڤی تەنێ ئاوێتە یەکسانە سەرجەمێ ڕووبەرێ گۆیێ و ڕووبەرێ تەنیشتا قووچەکی.

$$S(\text{نیڤ گۆیی}) = \frac{1}{2}(4\pi r^2) = 2\pi(7)^2 = 98\pi \text{ cm}^2$$

$$S(\text{قووچەکی}) = \pi r G = \pi(7)(25) = 175\pi \text{ cm}^2$$

$$S(\text{تەنێ ئاوێتە}) = 98\pi + 175\pi = 273\pi \text{ cm}^2$$

ڕووبەرێ ڕوویێ ئاوێتە دبیتە 273π cm^2

دەستپێبکە ب هەژمارتنا بلندایا قووچەکێ.

$$h = \sqrt{25^2 - 7^2}$$

$$h = \sqrt{576} = 24 \text{ cm}$$

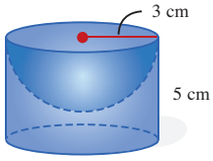
قەبارێ ڤی تەنێ ئاوێتە یەکسانە سەرجەمێ قەبارەیێ نیڤ گۆیێ و قووچەکێ

$$V(\text{نیڤ گۆیێ}) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{2}{3}\pi(7)^3 = \frac{686\pi}{3} \text{ cm}^3$$

$$V(\text{قووچەك}) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(7)^2(24) = 392\pi \text{ cm}^3$$

$$V(\text{تەنێ ئامێنە}) = \frac{686\pi}{3} + 392\pi = \frac{1862\pi}{3} \text{ cm}^3$$

قەبارەیێ تەنێ ئاوێتە دبیتە $\frac{1862\pi}{3}$ cm^3.



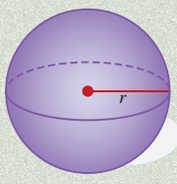
خالا چاڤدێریێ

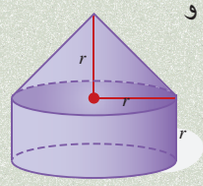
5. ڕووبەرێ ڕوویی و قەبارەیێ ئەڤی تەنێ ئاوێتەیێ بەرامبەر بهەژمێرە.

هزربکە و گەنگەشێ بکە

1. چەوا ڕووبەرێ گۆیەکێ دێ هەژمێری ئەگەر ڕووبەرێ بازنا مەزن بزانی؟

2. بەراوردیێ لناڤبەرا قەبارەیێ گۆیا بەرامبەر و قەبارەیێ تەنێ ئاوێتەیێ ب ڕەخڤە بکە.





فێربە و هزربکە

3. ڕێکخەربەر ئەڤی هێلکاری کۆپیبکە و تەمامبکە.

هەکەر نیڤتیرەیێ گۆیێ r بیت.

- قەبارەیێ گۆیێ دبیتە .....
- ڕووبەرێ ڕوویێ گۆیێ دبیتە .....
- ڕووبەرێ بازنا مەزن دبیتە .....

7-1 ڕاهێنان

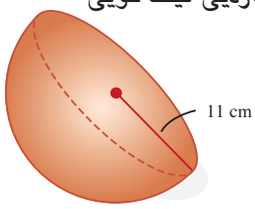
ڕاهێنانێن ئاراستەکری

1 **زاراف:** بەحسێ نیڤتیرەیێ بازنێ و هەردوو سەرێن وی بکە.

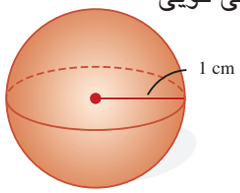
بەرێ خۆ بدە خوونە 1

1 پێ π بهەژمێرە.

2 قەبارەیێ نیڤ گۆیێ



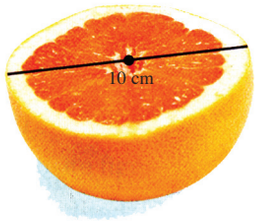
3 قەبارەیێ گۆیێ

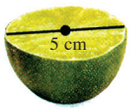


4 نیڤتیرەیێ گۆیەکێ قەبارەیێ وێ 288π cm^3 بیت.

بەرێ خۆ بدە خوونە 2

5 **خوارن:** قەبارەیێ پرتەقالێ دبیتە چەند جارانێ قەبارەیێ لەیموونی؟

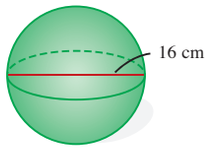




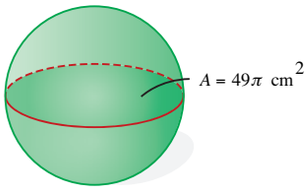
بەرێ خۆ بدە خوونە 3

3 پێ π بهەژمێرە.

6 ڕووبەرێ ڕوویێ گۆیی



7 ڕووبەرێ گۆیێ.

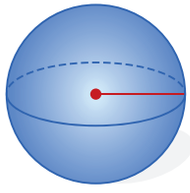


8 قەبارەیێ گۆیەکێ ڕووبەرێ ڕوویێ وێ 6724π m^2 بیت.

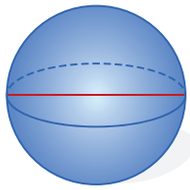
بەرێ خۆ بدە خوونە 4

بەحسێ کارتێکرنا هەر گوهۆڕینەکێ لسەر پیڤانا پێدای بکە.

9 ڕووبەرێ ڕوویێ گۆیەکێ پشتی دوو جارانکرنا نیڤتیرەیێ وێ.



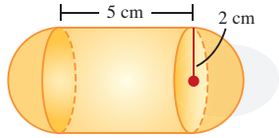
10 قەبارەیێ گۆیەکێ پشتی بچووکرنا تیرەیێ وێ بۆ چارێکێ وی.



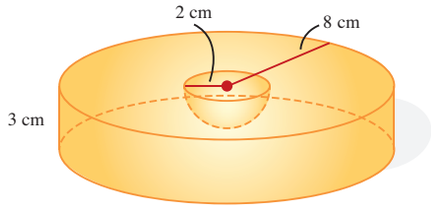
بەرێ خۆ بدە خوونە 5

ڕووبەرێ ڕوویی و قەبارێ هەر تەنەکی ئاوێتە بهەژمێرە.

11



12



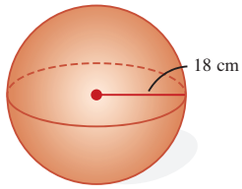
بجهئینان

راهێنانێن ئازاد

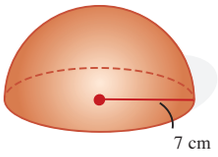
بۆ شیکارکرنا پرسیاران	بەرێ خۆ بدە نموونە
15–13	1
16	2
19–17	3
21–20	4
23–22	5

پێ π بهەژمێرە.

13 قەبارێ گۆیێ

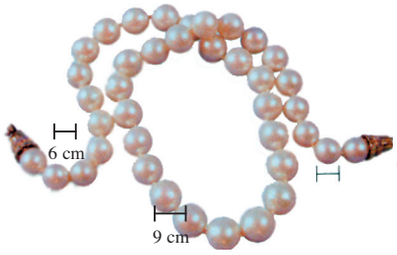


14 قەبارەیێ نیڤ گۆیێ



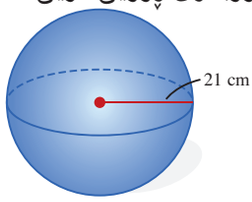
15 تیرەیێ گۆیەکێ قەبارەیێ وێ $7776\pi\,\text{cm}^3$ بیت.

16 **گەوهەر:** پیڤانێ مروارى (لؤلؤ) ب دریژیا تیرەیێ وى ب ملیمەتران د هێتە دیارکرن. قەبارەیێ مرواریەکى تیرەیێ وێ 9 mm بیت چەند جاران مەزنترە ژ قەبارەیێ مرواریەکى تیرەیێ وى 6 mm بیت.

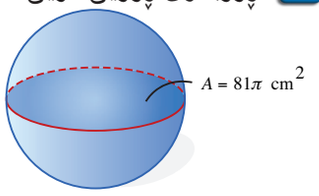


پێ π بهەژمێرە.

17 ڕووبەرێ ڕوویێ گۆیێ



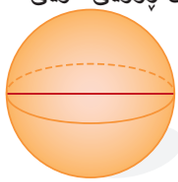
18 ڕووبەرێ ڕوویێ گۆیێ



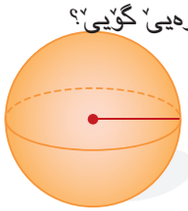
19 قەبارەیێ گۆیەکێ ڕووبەرێ وێ $625\pi\,\text{m}^2$ بیت.

بەحسێ کارتێکرنا هەر گوهۆڕینەکێ لسەر پیڤانێ پێدای بکە.

20 کارتێکرنا لێکدانا نیڤتیرەی ل $\frac{1}{5}$ لسەر ڕووبەرێ ڕوویێ گۆیێ؟

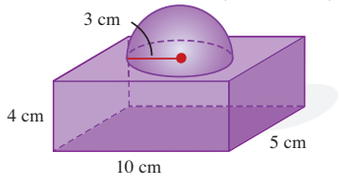


21 کارتێکرنا لێکدانا تیرەی ل 6 لسەر قەبارەیێ گۆیێ؟

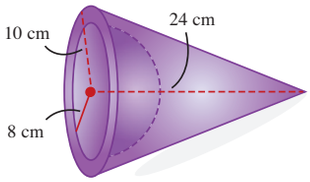


قەبارە و ڕووبەرێ ڕوویێ هەر تەنەکی ئاوێتە بهەژمێرە.

22



23



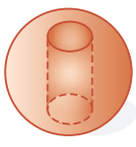
24 نیڤتیرەیێ گۆیەکێ بهەژمێرە هەکەر قەبارەیێ وێ $144\pi\ \text{cm}^3$ بیت.

25 چێوەیێ بازنا مەزن یا گۆیەکێ بهەژمێرە هەکەر ڕووبەرێ ڕوویێ وێ $60\pi\ \text{cm}^2$ بیت.

26 قەبارەیێ گۆیەکێ بهەژمێرە هەکەر چێوەیێ بازنا مەزن $36\pi\ \text{cm}$ بیت.

27 ڕووبەرێ ڕوویی و قەبارێ ئەوێ گۆیێ بهەژمێرە کو چەقێ وێ دکەڤتە سەر خالا بنەڕەت $(0, 0, 0)$ دبۆشایێ پۆتانیدا و دخالا $(2, 3, 6)$ را دبوّرت.

28 **خەملاندن** مرواریەکی (لؤلؤة) لسەر شێوەیێ گۆیێ تیرەیێ وێ 8 mm هاتە کۆلان ب شێوێ لوولەکەکا بازنەیی تیرەیێ وێ 2 mm ژناڤدا. ڕووبەرێ ڕوویی و قەبارەیێ مرواریا هاتیە دروستکرن ب کۆلانێ بخەملینە.



وەرزش پیڤەرێ نەدیار بۆ هەر تەپەکێ ژ تەپێن هندەك یاریێن وەرزشێ دیاربکە.

	وەرزش	تەپە	تیرە	چێوەیێ بازنەیا مەزن	ڕووبەر	قەبارە
29	گۆلف		4.27 cm	■	■	■
30	کریکت		■	22.86 cm	■	■
31	تێنس		6.35 cm	■	■	■
32	بۆلینگ		74 mm	■	■	■

دەروازەیەك

بۆ زانستی زێندەیێ دەریایی

ژێرئاڤا باتسفیر گەهشتە کووراتیا 923 m ل سالا 1934 پەستانێ ئاڤێ لسەر وێ گەهشتە 34 یەکەیێن پەستانێ کەشی.

33 **زیندەزانی** ژێر ئاڤا باتسفیر ئێکەمین ژێر ئاڤ بوو بۆ لێکۆلینێن دەریایی. ئەو ل سالا 1930 هاتە چێکرن لسەر شێوەیێ گۆیی. تیرەیێ ئەڤێ ژێر ئاڤێ ژ ناڤدا 137 cm بوو بنێزیکی، و ستووریا پوولایێ پێ هاتیە چیکرن 3.8 cm بوو. ئەڤێ ژێر ئاڤا دەریایی 3 پەنجەرێن بازنەیی هەبوون، تیرەیێ هەر ئێك ژ وان نێزیکی 30 cm بوو، قەبارەیێ وی پوولایێ بکارهاتی بۆ چکرنا ڤێ ژێر ئاڤا دەریایی بهەژمێرە.

34 **جوگرافیا** نیڤتیرەیێ گۆیا ئەردی 6437 km . ب نێزیکی. ئاڤێ $\frac{2}{3}$ ی ڕووبەرێ ئەردی داپۆشکریە ب نێزیکی. ڕووبەرێ ئەردێ هشك بخەملینە.

گەردوون خشتەیێ بەرامبەر بکاربینە بۆ شیکارکرنا پرسیاران ژ 35 هەتا 38

هەسارە	تیرە ب میلان
عەتارد	3032
زوهرە	7521
ئەرد	7926
مەریخ	4222
مشتەری	88846
زوحەل	74898
ئورانوس	31763
نبتون	30775
بلوتو	1485

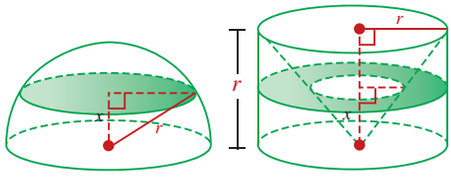
35 قەبارەیێ مشتەری چەند جارانی قەبارەیێ ئەردییە؟

36 کیژ هەسارە قەبارەیێ وێ دبیتە سەرجەمێ هەردوو قەبارەیێن زوهرە و مەریخێ بنێزیکی؟

37 کیژ وان مەزنترە، ڕووبەرێ زوحەل یان سەرجەمێ هەردوو ڕووبەرێن ئورانوس و نبتون؟

38 ڕووبەرێ عەتارد چەند جارانی ڕووبەرێ بلوتۆیە؟

39 **هزرکرنا رەخنەگر:** ل ویتنەیێ بەرامبەر لوولەکێ و نیڤ گۆیی هەمان نیڤتیرە هەنە ڕوونبکە کو هەر دوو برگەیێن ڕەنگگری هەمان ڕووبەر هەنە.



40 **بنڤیسە** وەسا دانە گۆیەکێ و شەشپالویێ هەمان ڕووبەر هەنە هاوکێشەکێ بنڤیسە پەیوەندیێ لناڤبەرا نیڤتیرەیێ ئەڤێ گۆیێ r و لایێ شەشپالوویێ s بنوێنە.

41 کارگەهەکا شەربەتا پرتەقالێ ئامانێن لسەر شێوەیێ پڕتەقالێ بکاردئینیت بۆ داگرتنا بەرهەمێ خۆ، ڕووبەرێ هەر ئامانەکا لسەر شێوەیێ گۆیێ $324.5\ cm^2$ بنێزیکی.

أ قەبارەیێ ئەڤێ ئامانێ چەندە؟ بەرسڤێ بۆ نێزیکترین دەهئێك نێزیکبکە.

ب کارگەهێ بریاردا نیڤتیرەیێ ئامانا لسەر شێوەیێ گۆیێ زێدەبکەت ب ڕێژا 10% قەبارەیێ ئامانا نوو چەندە؟

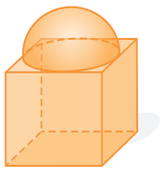
42 شەشپالۆیەك یا دەوردایە ب گۆیەکێ نیڤتیرەیێ وێ 8 cm ، ڕێژا قەبارێ شەشپالۆیێ بۆ قەبارەیێ گۆیێ چەندە؟

أ) $2:\frac{1}{3}\pi$ ب) $2:3\pi$ ج) $1:\frac{4}{3}\pi$ د) $1:\frac{2}{3}\pi$

43 ڕووبەرێ ڕوویێ گۆیێ چەندە؟ هەکەر قەبارەیێ وێ $10\frac{2}{3}\pi\ \text{cm}^3$ بیت.

أ) $8\pi\ \text{cm}^2$ ب) $10\frac{2}{3}\pi\ \text{cm}^2$ ج) $16\pi\ \text{cm}^2$ د) $32\pi\ \text{cm}^2$

44 کیڕ بڕ قەبارەیێ تەنێ ئاوێتەیێ بەرامبەر دنوێنت کو ژ نیڤ گۆیەکێ نیڤتیرەیێ وێ r و شەشپالویەکێ دریژیا لایێ وێ $2r$ بیت پێکدهێت.



أ) $\left(\frac{2}{3}\pi+8\right)r^3$ ج) $2(2\pi+12)r^2$

ب) $\frac{4}{3}\pi r^3+2r^3$ د) $\frac{4}{3}\pi r^3+8r^3$

بەرهنگاری و بەرفرەهکرن

45 **خوارن** ئامیرێ بەلاڤکرنا بەنیشتی ژ گۆیەکێ پکدهیت، تیرەیێ وێ 18 cm ئەوی ئامیری 1 300 بەنیشتێن لسەر شێوەیێ گۆیێ تێدا هەنە و 57% ژ قەبارەیێ گۆیێ بخۆڤەدگریت، تیرەیێ هەر بەنیشتەکی لسەر شێوەیێ گۆیێ بهەژمێرە.

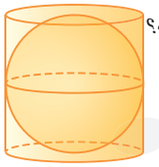
46 تو دشێی ڕووبەرێ ڕوویێ گۆیێ بۆ هەژمارتنا قەبارەیێ وێ بکاربینی.

أ یاسایا ڕووبەرێ ڕوویێ گۆیی بکاربینە بۆ هەژمارتنا نیڤ تیرەیێ وی r پێ ڕووبەرێ وێ S

ب د یاسایا قەبارا گۆیدا ل جهێ r ئەوی بەهایێ تە ل پرسیارا پێشتر دیارکری دانە

ج ویێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ ئەوێ نەخشێ بکێشە کو قەبارەیێ گۆیێ پێ ڕووبەرێ ڕوویێ گۆیێ دەردبڕیت. بەحسێ ویێنەیێ ڕوونکرنێ بکە.

ویێنەیێ بەرامبەر بکاربینە بۆ شیکارکرنا هەردوو پرسیاران 47 و 48 .



47 پەیوەندی ل ناڤبەرا قەبارەیێ گۆیێ و قەبارەیێ لوولەکێ چیيە؟

48 پەیوەندی ل ناڤبەرا ڕووبەرێ گۆیێ و ڕووبەرێ تەنیشتا لوولەکێ چیيە؟

پێداچوونا لوولپێچی

نەخشەکێ بنڤیسە کو ویێنەیێ ڕوونکرنا وێ د ڤان خالانڕا ببوریت. (پۆلێن پێشتر)

بۆ ڕوونکرنێ

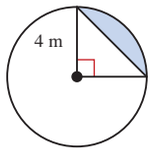
ئەرێ تو دشێی نەخشێ بیبینی ئەگەر خالێن وێ بزانیی.

49 $\{(0,1),(1,2),(-1,2),(2,5),(-2,5)\}$

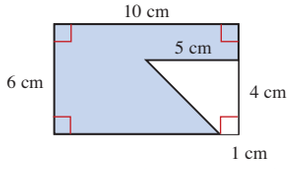
50 $\{(-1,9),(0,10),(1,11),(2,12),(3,13)\}$

ڕووبەرێ بەشێ ڕەنگکری بهەژمێرە و بەرسڤێ بۆ نیزیکترین دەهێك نیزیکبکە. (پۆلێن پیشتر)

51



52



بەحسێ کارتێکرنا هەر گۆهۆڕینەکێ لسەر قەبارەی بکە. (پۆلین پشتر)

53 قەبارەیێ شەشپالوویەکێ پشتی لێکدانا لایێ وێ ل $\frac{3}{4}$

54 قەبارەیێ پوازکێ پشتی لێکدانا هەر ئێك ژ بلندایێ و ڕووبەرێ بنکەی ل 5.

8-1 کەرتێن بازنەیی و کڤانە.

Sector and arcs

ئارمانج
- هەژمارتنا رووبەرێ کەرتێ بازنەیی
- هەژمارتنا درێژیا کڤانان.

کی ئەڤێ بکاردئینت؟
جوتیار نیڤتیرەیێ بازنەیێ بکاردئینن بۆ هەژمارتنا رووبەرێ ئەوێ دەڤەرا ئاڤدەن. (نموونە 3)

زاراڤ
Vocabulary

کەرتێ بازنەیی
Sector of a circle

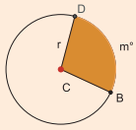
پارچەیا بازنەیی
Segment of a circle

درێژیا کڤانی
Arc length

رووبەرێ کەرتێ بازنەیی بەشەکە ژ رووبەرێ وێ بازنا کەرت دناڤدا. بۆ هەژمارتنا کەرتێ بازنەیێ گۆشەیا وێ m° بیت رووبەرێ بازنێ لێکبدە ل $\frac{m^\circ}{360^\circ}$.

فێربە و بێ بەرپکە

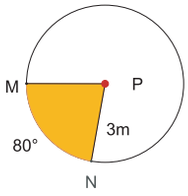
کەرتێ بازنەیی

پیناسە	ناڤکرن	وێنە	رووبەر
کەرتێ بازنەیی Sector of a circle بەشەکێ دیارکرییە ژ بازنەکێ ب دوو نیڤتیران و ب کڤانێ ب هەردوو نیڤتیران سنووردای دهێتە دیارکرن	کەرتێ BCD		$A=\pi r^2\left(\frac{m^\circ}{360^\circ}\right)$

نموونە 1 هەژمارتنا رووبەرێ کەرتێ بازنەیی

رووبەرێ هەر کەرتەکی بازنەیی پێ π بهەژمێرە و ئەنجامێ بۆ نیزیکترین بەش ژ سەدی نیزیکبکە.

أ کەرتێ MPN



یاسایا رووبەرێ کەرتێ بازنەیی ل جهێ نیڤتیرەیی و پیڤانا گۆشەیێ بهایێن وان دانە.

ساده‌بکه.

رووبەرێ کەرتێ

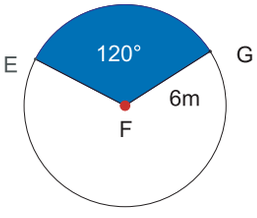
$A=\pi r^2\left(\frac{m^\circ}{360^\circ}\right)$

$A=\pi(3)^2\left(\frac{80^\circ}{360^\circ}\right)$

$A=2\pi$

$2\pi\ \text{m}^2 \approx 6.28\ \text{m}^2$

ب کەرتی GFE



یاسایا رووبەرێ کەرتێ بازنەیی ل جهێ نیڤتیرەی و پیڤانا گۆشەیێ بهایێن وان دانە.

ساده‌بکه.

$A=\pi r^2\left(\frac{m^\circ}{360^\circ}\right)$

$A=\pi(6)^2\left(\frac{120^\circ}{360^\circ}\right)$

$A=12\pi\ \text{cm}^2$

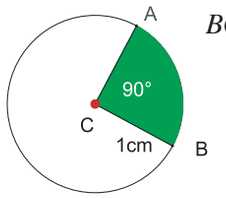
رووبەرێ وی کەرتێ دبیتە $12\pi\ \text{cm}^2 \approx 37.70\ \text{cm}^2$

ئاگەهداریە!

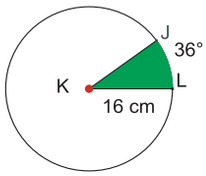
هێمایێ پلە ل پشت m ژ یاسایێ بنڤیسە دا ل بیراتەبت کو پیڤانا کڤانا تە هاتیە بکارئینان نەك درێژیا وی.

1. ڕووبەڕێ ڤان کەرتێن بازنەیی بەهەژمێرە، پاشی بۆ نێزیکترین بەش ز سەدێ نێزیکبکە.

أ کەرتێ BCA



ب کەرتێ JKL



نموونـــــە 2 بجهئینان لسەر چاندنێ

تیرەیێ بازنا ئاڤدانێ 120m ڕووبەڕێ ئەوێ کەرتێ بازنەیی ئەوێ ئامیرێ ئاڤدانێ ئاڤددەت دەمێ $50°$ بزڤرێت بهەژمێرە. و بەرسڤا خو بۆ نێزیکترین مەترێ دووجایی نێزیکبکە.

یاسایا ڕووبەڕێ کەرتێ بازنەیی $A=\pi r^2\left(\frac{m^\circ}{360^\circ}\right)$

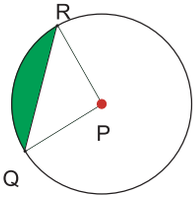
$A=\pi(60)^2\left(\frac{50^\circ}{360^\circ}\right)$ $r=360\ cm$

سادەبکە. $A=500\pi$

ڕووبەڕێ کەرتێ دبیتە $571\ m^2$ ابنێزیکی.

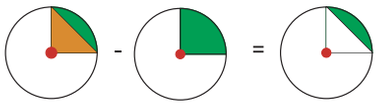
2. ئەو ڕووبەر چەندە دەمێ ئەو ئامیرە نیڤ خولێ بزڤرێت؟

پارچەیا بازنەیی **segment of a Circle** ئەو دەڤەرا سنووردایيە ب ژیێ بازنەیێ و وی کڤانێ هەردوو سەرێن ژێ گەهاندینەئێکودوو د بازنێدا.



فێربە و شرۆڤەبکە

ڕووبەرێ پارچەیا بازنەیی

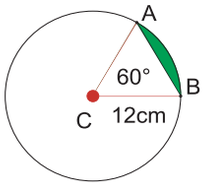


ڕووبەرێ پارچەیا بازنەیی = ڕووبەرێ کەرتێ بازنەیی – ڕووبەرێ سێگۆشەیێ

نموونـــــە 3 هەژمارتنا ڕووبەرێ پارچەیا بازنەیی

ڕووبەرێ پارچەیا بازنەیی ACB بۆ نێزیکترین بەش ژ سەدی بهەژمێرە

پێنگاڤا 1ێ: ڕووبەرێ کەرتێ بازنەیی ACB بهەژمێرە.



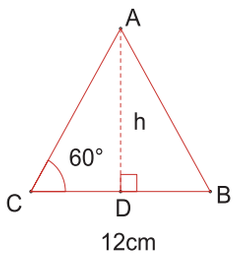
یاسایا ڕووبەرێ کەرتێ بازنەیی $A_1=\pi r^2\left(\frac{m^\circ}{360^\circ}\right)$

$A_1=\pi(12)^2\left(\frac{60^\circ}{360^\circ}\right)$

سادەبکە. $=24\pi\ cm^2$

پێنگاڤا 2ێ: ڕووبەرێ سێگۆشەیا ACB بهەژمێرە

بلندهایا سێگۆشێ $\overline{AD}$ بکێشە.



$A_2=\frac{1}{2}bh=\frac{1}{2}(12)(6\sqrt{3})$

$A_2=36\sqrt{3}\ cm^2$

ل بیرا تەبیت

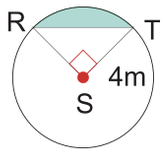
د سێگۆشەیا وەستاودا 90 – 60 – 30دا، درێژیا لایێ بەرامبەری گۆشەیا $60°$پەیدابوویە ژ لێکدانا تەنیشتی دگەل $\sqrt{3}$ پەیدابوویە

پێنگافا 3ێ: ڕووبەرێ پارچەیی = ڕووبەرێ کەرتی − ڕووبەرێ سێگۆشەیی

$A = 24\pi - 36\sqrt{3} \approx 13.04$

ڕووبەرێ کەرتی^2 13.04 cm بنێزیکی.

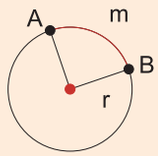
3. ڕووبەرێ پارچەیا بازنەیی بۆ نێزیکترین بەش ژ سەدی بهەژمێرە.



کاچەوا کەرتێ بازنەیی بەشەکە ژ ڕووبەری بازنەیێ هەروەسا دریژیا کفانێ وێ ژی بەشەکە ژ چێوەیێ وێ.

فێربە و شرۆڤەبکە

دریژیا کڤانی

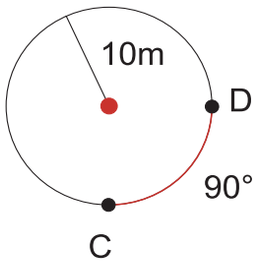
پێناسە	وێنە	دریژی
دریژیا کڤانی Arc length دریژیا ئەوێ داڤا دەزییە ئەوێ نووسیایی ب کڤانێڤە و ناڤبەرا هەردوولایێن کڤانێ دگەهینت.		$L=2\pi r\left(\frac{m^\circ}{360^\circ}\right)$

* تێبینی بەرێ خو بدێ کو دریژیا کڤانێ و نیڤتیرەیێ بازنێ هەمان یەکەیا دریژیێ هەنە

نموونـــــە 4 هەژمارتنا دریژیا کڤانێ

دریژیا هەرکڤانەکی پێ π بهەژمێرە، پاشی بۆ نێزیکترین بەش ژ سەدی نێزیکبکە

أ $\widehat{CD}$



$L=2\pi r\left(\frac{m^\circ}{360^\circ}\right)$

$L=2\pi(10)\left(\frac{90^\circ}{360^\circ}\right)$

$L=5\pi \approx 15.71$

دریژیا کڤانی 15.71 m نێزیکبکە.

ب **د بازنەکێدا نیڤتیرەیێ وێ 3 m و پیڤانا کڤانێ وێ 35° .**

$L=2\pi r\left(\frac{m^\circ}{360^\circ}\right)$

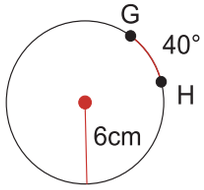
$L=2\pi(3)\left(\frac{35^\circ}{360^\circ}\right)$

$L=\frac{7}{12}\pi \approx 1.83$

دریژیا کڤانێ دبیتە 1.83 m بنێزیکی.

خالا چاڤدێریێ

4. دریژیا هەر کڤانەکی پێ π بهەژمێرە باشی بۆ نێزیکترین بەش ژ سەدی نێزیکبکە.



أ د بازنەکێدا پیڤانا کڤانێ وێ 40° و نیڤتیرێ وی 6 cm بیت.

ب د بازنەکێدا پیڤانا کڤانێ وی 135° و نیڤتیرێ وی 4 cm بیت.

هزربکە و گەنگەشیێ بکە

1. جیاوازی لناڤبەرا دریژیا کڤانێ و پیڤانا وێ چییە؟
2. دەمێ پیتزایەکێ دابەشدکەی بۆ چەند کەرتێن یەکسان. هەرئێك ژ وان دبیتە کەرتەکی بازنەیی. چ زانیاری بۆ تە دڤێن بۆ هەژمارتنا رووبەرێ پارچەکێ ژ پارچەییێن پیتزایێ.
3. رێکخەربە. ڤێ خشتێ ل خوارێ بنڤیسە و تەمامبکە.

	یاسا	وێنە
رووبەرێ کەرتێ بازنەیی		
رووبەری پارچەییێ بازنەیی		
دریژیا کڤانەیی		

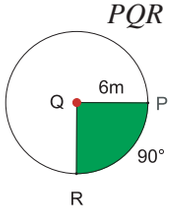
8–1 ڕاهێنان

ڕاهێنانێن ئاراستەکری

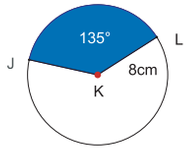
1 **زاراڤ:** ئەو دەڤەرا دیارکری ب دوو نیڤتیرەییێن بازنەکێ و ب کڤانێ هەردوو نیڤتیرەیان سنووردای دبیتە ___؟___ (کەرتێ بازنەیی یان پارچەی بازنەیی).

نموونە 1 ڕووبەرێ هەر کەرتەکی بازنەیی پێ π بهەژمێرە، پاشی بۆ نێزیکترین بەش ژ سەدی نێزیکبکە.

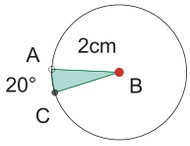
2 کەرتێ PQR



3 کەرتێ JKL



4 کەرتێ ABC

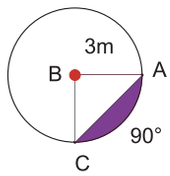


نموونە 2

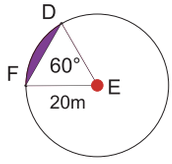
5 **دەریاڤانی:** رووناهییا منارەکێ ب گۆشەیەکا پیڤانا وێ $150°$ دزڤریت. ئەو ڕۆناهییا هەتا دووریا 3 km دگەهیت، ئەو ڕووبەرێ ڕۆناهی بسەردا دبۆریت بهەژمێرە و بۆ نێزیکترین کیلومەترێ دووجایی نێزیکبکە.

نموونە 3 **پێنگاڤێن جۆراوجۆر:** ڕووبەرێ هەر پارچەیەکا بازنەیی بهەژمێرە. و بۆ نێزیکترین بەش ژ سەدی نێزیکبکە.

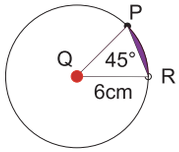
6



7

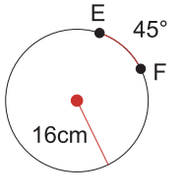


8

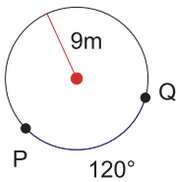


نموونە 4 دریژیا هەر کڤانەکێ پێ π بهەژمێرە و بۆ نێزیکترین بەش ژ سەدی نێزیکبکە.

9 $\overset{\frown}{EF}$



10 $\overset{\frown}{PQ}$



11 دریژیا کڤانەکی پیڤانا وی $20°$ بیت د بازنەکێدا نیڤتیرێ 6 m بیت.

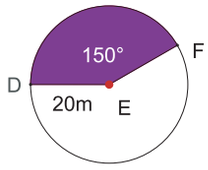
ڕاهێنان وشیکارکرن پرسیاران

راهێنانێن ئازاد

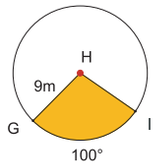
بۆ شیکارکرنا بەرێ خو بدە	
پرسیاران	نموونە
1	14–12
2	15
3	18–16
4	21–19

ڕووبەرێ هەر کەرتەکی بازنەیی پێ π بهەژمێرە، پاشی بۆ یزیکترین بەش ژ سەدی نێزیکبکە.

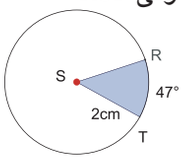
12 کەرتی DEF



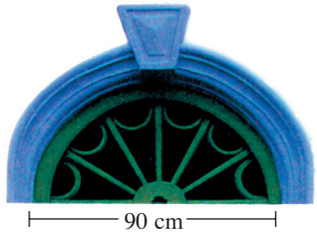
13 کەرتی GHJ



14 کەرتی RST

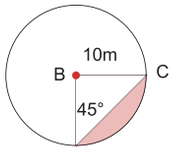


15 **ئاڤاهی**: پەنجەرەك ب شێوێ نیڤ بازنەیی لسەر دەرگەهێ مالان هەیە، ڕووبەرێ ئەوێ پەنجەرێ بهەژمێرە و بۆ نێزیکترین سانتیمەترێ دووجایی نێزیکبکە.

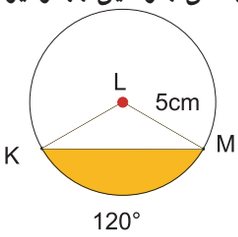


پێنگاڤێن جۆراوجۆر: ڕووبەرێ هەر کەرتەکێ بازنەیی بهەژمێرە، پاشی بۆ نێزیکتر بەش ژ سەدی نێزیکبکە.

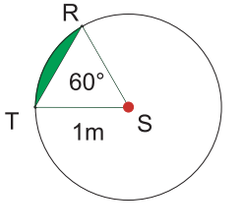
16



17

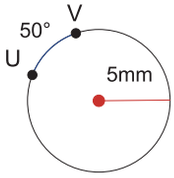


18

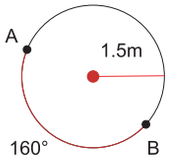


دریژیا هەر کڤانەکی پێ π بهەژمێرە، پاشی بۆ نێزیکترین بەش ژ سەدی نێزیکبکە.

19 $\overset{\frown}{UV}$

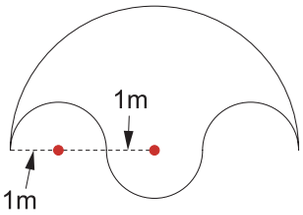


20 $\overset{\frown}{AB}$



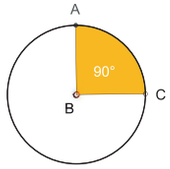
21 د بازنەکێدا پیڤانا کڤانێ وێ $9°$ وتیرەیێ وێ 6 m بیت.

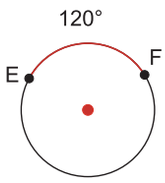
22 **میژوویا بیرکاریێ**: زانایێن بیرکاری یێن ئەغریقی لێکۆلین لسەر شێوەیێ بەرامبەر ئەوێ دگۆتنێ سالینۆن کرن. چێوەیێ سالینۆنێ بەرامبەر بهەژمیرە و نێزیکبکە بۆ نێزیکترین دەهئێك.



نیڤتیرەیێ هەربازنەکێ بهەژمێرە.

23 ڕووبەرێ کەرتێ ABCیەکسانە 9πیەکەیێن دووجای **24** دریژیا کڤانێ EF یەکسانە 8πm



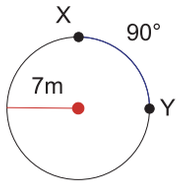


25 **خەملاندن**: کەرتا $\frac{22}{7}$ بەهایەکێ نێزیککرییە بۆ ژمارە π.

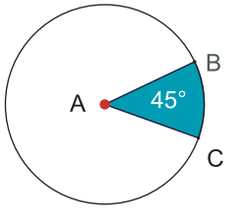
أ ئەوی بەهایی بکاربینە بۆ هەژمارتنا بەهایێ نێزیك یێ دریژیا کڤانێ $\overset{\frown}{XY}$

ب کلیلا بژمێرێ بکاربینە بۆ هەژمارتنا دریژیا کڤانەیێ $\overset{\frown}{XY}$ لگەل وەرگرتنا 8 رەنووسان پشتی فاریزێ.

ج ئەرێ ئەو بەهایێ نیزیککری ئەوێ ل پرسیارا (أ) هەژمارتی مەزنترە یان بچووکترە ژ ئەوی بەهایێ تە ل لقێ (ب) هەژمارتی.



26 **هزرکرنا رەخنەگر:** نیڤتیرەیێ بازنەکێ بەهزمێرە هەکەر ڕووبەرێ وێ $24\ cm^2$ بیت.

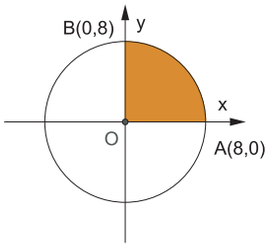


27 **بنڤیسە:** چەوا نیڤتیرەیێ بازنەکێ دێ هەژمێری هەکەر درێژیا کڤانی و پیڤانا وی بزانی.

ئامادەکرن بۆ ئەزموونێ

28 رووبەرێ کەرتێ AOB چەندە؟

أ) 4π ب) 16π ج) 32π د) 64π

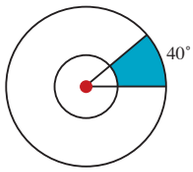


29 درێژیا کڤانەیێ AB چەندە؟

أ) 2π ب) 4π ج) 8π د) 16π

30 **بەرسڤا کورت:** ڕووبەرێ کەرتەکی بازنەیی چەندە هەکەر ب کڤانەکی پیڤاناوی $38°$سنووردابیت د بازنەکێدا و نیڤتیرەیێ وێ 12 cmff بیت؟

بەرهنگاری و بەرڤرەهکرن

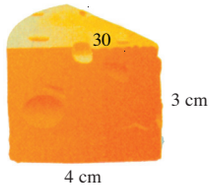


31 ڕووبەرێ بەشێ شین چەندە؟ ئەگەر نیڤتیرەیێ بازنا مەزن 5 cm و نیڤتیرەیێ بازنا بچووك 2 cm بیت؟

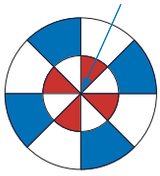
32 پارچا پەنیرێ بەرامبەر کەرتەکە ژ لوولەکەکێ

أ قەبارەیێ وێ پارچێ چەندە؟ بۆ نێزیکترین دەهئێك نێزیکبکە.

ب ڕووبەرێ رووێ سەری بەهزمێر، بۆ نێزیکترین دەهئێك نێزیکبکە.



33 **ئەگەر:** پیڤانا هەرچەقەگۆشەیەکێ ل وێنەیێ بەرامبەر $45°$ یە، نیڤتیرەیێ بازنا بچووك ئێك گرێیە و نیڤتیرەیێ بازنا مەزن دووگرێیە. ئەگەر چەندە کو تیر بکەڤیتە دناڤ ئێك ژ دەڤەرێن ل خوارێدا.



أ دەڤەرا سۆر ب دەڤەرا شین ج دەڤەرا سۆر یان شین؟

پێداچوونا لوولپێچی

دیاربکە ئەرێ راستەهێلەکێ ل خوارێ تەریبە دگەل راستەهێلی $y=4x-5$ یان ستوون دگەل وی یان چ ژ وان نینە. (پۆلێن پێشتر)

34 $8x-2y=6$.

35 ئەو ڕاستەهێلێ د هەردوو خالێن $\left(\frac{1}{2},0\right)$ و $\left(1\frac{1}{2},2\right)$ رادبۆریت.

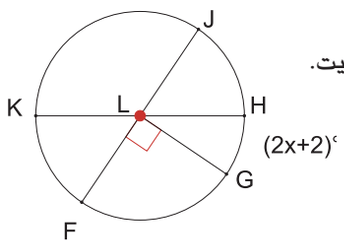
36 ئەو ڕاستەهێلێ تەوەرێ ئێکێ د (4) دا دبڕیت و تەوەرێ دووێ د (1)دا دبڕیت.

پی π بەهزمێرە (وانەیا 1–7)

37 قەبارەیێ گۆیەکێ نیڤتیرەیێ وێ 3 cm بیت.

38 چێوەیێ (بازنا مەزن) یێ گۆیەکێ رووبەرێ رووێ وێ $4\pi\ m^2$یت.

بەهزمێرە. (پۆلێن پێشتر)



39 $m\ \widehat{KLJ}$ **40** $m\ \widehat{KJ}$ **41** $m\ \widehat{JFH}$

بەشێ 1

ڕێبەرێ خواندنێ: پێداچوون

جهێ هەرخالەکێ دبۆشایێ پۆتانی دا دیاربکە:

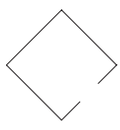
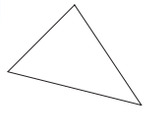
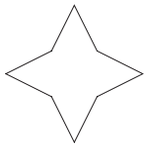
1. $(-1, 0, 3)$
2. $(2, -2, 1)$
3. $(0, -1, 1)$
4. $(3, 1, 0)$

وێنەیێ هەرروتەختەکی دپۆشایێ پۆتانیدا بکێشە:

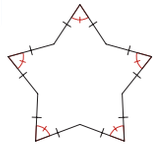
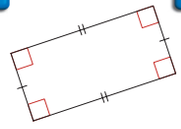
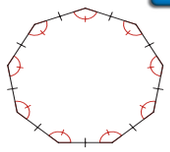
5. $x-3y+2z=6$
6. $2x-4y-2z=4$
7. $-x+y-5z=5$
8. $3x+2y+z=-6$

9. **ئابووریا بکاربەری:** ڕۆناکێ 000 35 دینار هەنە، ئەوێ دڤێت تەزیاتیان و بیتزا و شیرینیێ بکرت. بهایێ پاکێتەکا تەزیاتیان 000 2 دینارن و بهایێ بیتزایێ 000 9 دینارن و پاکێتا شیرینیێ 00 4 دینارن، هاوکێشەیەکا ب سێ نەزانراوان بۆ دەربڕینا ئەوا لسەری بنڤیسە.

دیاربکە ئەرێ شێوە چەندلایە، هەکەر چەندلا بوو ناڤێ وی بێژە پێ ژمارا لایان.

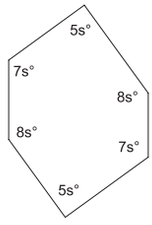
10. 
11. 
12. 

بێژە ئەرێ چەندلایی ریکە یان نە، ناڤچالە یان کومدە.

13. 
14. 
15. 

دیاربکە.

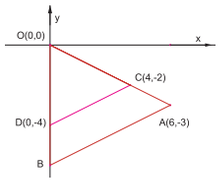
16. سەرجەمێ پیڤانێن گۆشەیێن ژ ناڤدا یێ دووازدە لایەکی
17. پیڤانا هەر گۆشەیەکا ژ ناڤدا یێ چەند لایەکی ڕێك 20 لا هەبن.
18. پیڤانا هەر گۆشەیەکا ژ ناڤدا ل چەندلایێ بەرامبەر.
19. پیڤانا هەر گۆشەیەکا ژ دەرڤە ل چەندلایێ بەرامبەر.



20. بسەلمینە هەردوو سێگۆشە RST و RUV دهاوشێوەنە، دەمێ $R(1, -3)$ و $S(-1, -1)$ و $T(2, 0)$ و $U(-3,1)$ و $V(3,3)$.

21. بسەلمینە هەردوو سێگۆشە JKL و JMN دهاوشێوەنە دەمێ $J(4, 4)$ و $K(2, 3)$ و $L(4,2)$ و $M(-4, 0)$ و $N(4, -4)$.

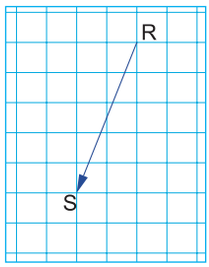
22. $O(0, 0)$و$A(6, -3)$و$C(4, -2)$و$D(0, -4)$پۆتانێ خالا B بهەژمێرە هەمەر بزانی AOB و COD دهاوشێوەنە.



23. هەکەر $K(0, 3)$ $L(0, 0)$ $M(4, 0)$ بیت. وێنەی سێگۆشا KLM بکێشە، پاشی وێنێ وێ ب مەزنکرن ب ڕێژا 3 بکێشە، ڕوونبکە هەردوو سێگۆشە دهاوشێوەنە.

هەر ئاراستەبڕەکی ب هەردوو پیکهاتێن وی بنڤیسە:

24. $\overrightarrow{AB}$ دەمێ $A(5, 1)$ و $B(2, 3)$.
25. $\overrightarrow{MN}$ دەمێ $M(2, 4)$ و $N(1, 2)$.
26. $\overrightarrow{RS}$



وێنێ هەرئاراستەڕەکی د ڕووتەختێ پۆتانیدا بکێشە، و دریژیا وی بۆ نێزیکترین دەهئێك بهەژمێرە.

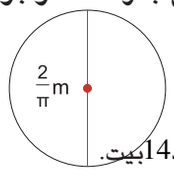
27. $\langle -5, -3 \rangle$
28. $\langle -2, 0 \rangle$
29. $\langle 4, -4 \rangle$
30. $\langle 4, 4 \rangle$

وێنەیێ هەر ئاراستەبڕەکی دروستەختێ پۆتانێدا بکێشە، لاریا وی بۆ نێزیکترین پلە نێزیکبکە:

31 لەزا هێلیکۆپتەرەکێ ب ئاراستەیێ $\langle 4, 5 \rangle$ هاتیە نواندن.

32 فرۆکەیەك ب لەزا 600 km/h ب ئاراستەیێ باکوور $-55°$ ڕۆژهەلات دفڕت. و ل وی دەمی لەزا بایی 50 km/h ب ئاراستەیێ ڕۆژهەلات بوو. لەزا دروست یا فرۆکێ جەندە؟ لاریّ وێ بوو چەند؟ لەزا وێ بۆ نێزیکترین دەهئێك و لاریّ وێ بۆ نێزیکترین پلە نێزیکبکە.

هەر پیڤانەکێ بەهەژمێرە، ل دەمێ پێدڤی بەرسڤا خو بۆ نێزیکترین دەهئێك نێزیکبکە.



33 چێوەیێ بازنا بەرامبەر.

34 ڕووبەرێ بازنەکێ چێوەیێ وێ 14π m بیت.

35 تیرەیێ بازنەکێ ڕووبەرێ وێ $64x^2\pi$ cm^2 بیت.

36 ڕووبەرێ پێنجلایەکی ڕێك دریژیا لایەکی 4 cm بیت.

37 ڕووبەرێ سێگۆشەکا ڕێك لایەکی وێ 4 km بێت.

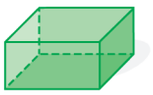
38 ڕووبەرێ هەشت لایەکی ڕێك دریژیا لایێ وی 8 cm بێت.

39 ڕووبەرێ چارگۆشەیەکێ تیرەیێ وێ 12 mm بیت.

ژمارا ڕوویان و لایان و سەران ل هەرچەند ڕوویەکی بهەژمێرە، و یاسا ئۆلەر ساخبکە.

40

41



دووریێ ل ناڤبەرا هەردوو خالان و پۆتانێن ناڤڕاستا ئەوی پارچەڕاستەهێلی ب هەردووخالان سنووردایی بهەژمێرە و بۆ نێزیکترین دەهئێك نێزیکبکە.

42 $(7, 1, 1)$ ، $(2, 6, 4)$

43 $(5, 7, 8)$ ، $(0, 3, 0)$

44 $(9, 1, 5)$ ، $(7, 2, 6)$

45 $(2, 7, 4)$ ، $(6, 2, 8)$

ئەڤان پێ π بهەژمێرە.

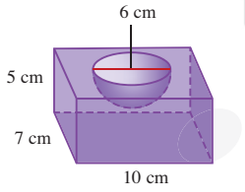
46 قەبارەیێ گۆیەکێ ڕووبەرێ ڕوویێ وێ 100π cm^2 بیت.

47 ڕووبەرێ گۆیەکێ قەبارەیێ وێ 288π cm^3 بیت.

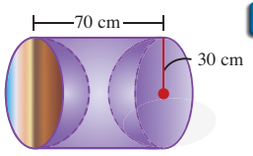
48 تیرەیێ گۆیەکێ ڕووبەرێ وێ 256π cm^2 بیت.

ڕووبەرێ ڕوویی و قەبارێ هەر تەنەکی ئاوێتە بهەژمێرە.

49

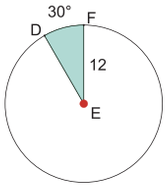


50

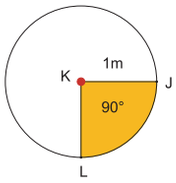


ڕووبەرێ هەر کەرتەکی بارنەیێ پێ π بهەژمێرە، پاشی بۆ نێزیکترین بەش ژ سەدی نێزیکبکە.

51 کەرتێ DEF

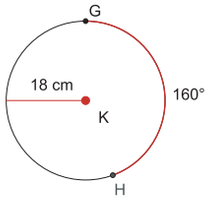


52 کەرتێ LKJ

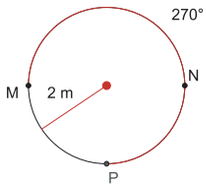


دریژیا هەر کڤانەکی پێ π بهەژمێرە، پاشی بۆ نێزیکترین بەش ژ سەدی نێزیکبکە.

53 $\overset{\frown}{GH}$



54 $\overset{\frown}{MNP}$



بەشی 1

ئەزموونا بەشی

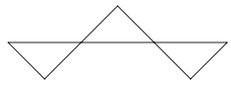
جهێ هەر خالەکێ د بۆشایێ پۆتانیدا دیاربکە.

1 $(2, -1, 3)$ **2** $(0, -1, 3)$

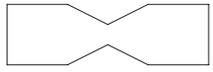
3 $(-2, 1, -1)$

ئەرێ شێوە چەندلاییە یان نە، هەکەر وەسا بوو، ناڤێ وی پێ ژمارا لایان بێژە.

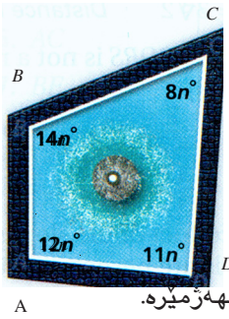
4



5



6 گۆلەکا ئاڤێ ﴿حەوزەك﴾ لسەر شێوەیێ چارلاییە، هەروەکی ل وێنەیێ بەرامبەر دیار، هەرگۆشەکا ژ ناڤدا



7 سەرجەمێ پیڤانێن گۆشەیێن ژ ناڤدا یێ نەهلایەکی کومد بهەژمێرە.

8 پیڤانا گۆشەیا ژ دەرڤە یا چەنلایەکی ڕێك ژ مارا لایێن وی 15 بیت بهەژمێرە.

وێنەیێ هەرئاراستەبڕەکی دروتەختێ پۆتانیدا بکێشە، و دریژیا وی بۆ نێزیکترین دەهئیك بهەژمێرە.

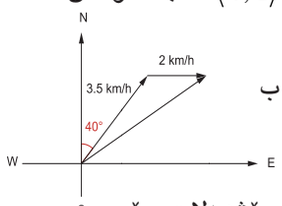
9 $\langle 1, 3 \rangle$ **10** $\langle -4, 1 \rangle$ **11** $\langle 2, -3 \rangle$

وێنەیێ هەرئاراستەبڕەکی دروتەختێ پۆتانیدا بکێشە، و لارێ وی بۆ نێزیکترین پلە بهەژمێرە.

12 لەزا فرۆکەیەکێ ب ئاراستەبڕیێ $\langle 1, 3 \rangle$ هاتبتە نواندن.

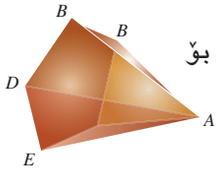
13 لەزا بایی ب ئاراستەبڕێ $\langle 4, 1 \rangle$ هاتبتە نواندن.

14 سەرجۆن ب بایسکلێ خو ب لەزەکا نەگۆر بڕێ 3.5 km/h ب ئاراستەیێ باکوور $40°-$ ڕۆژهەلات چۆ. لەزا بایی 2 km/h ب ئاراستەیێ ڕۆژ هەلات بوو. لەزا دروست یا سەرجۆن بۆ نێزیکترین دەهئیك و ئاراستەیێ وی بۆ نێزیکترین پلە چەندە؟



15 چێوە و ڕووبەرێ بازنێ پێ π بهەژمێرە هەکەر تیرێ وێ 12m بیت.

16 ژمارا ڕوویان و لایان و سەران بۆ قی تەنی ئەندازەی یێ برامبەر چەندە؟
یاسایا ئۆلەر ساخبکە.

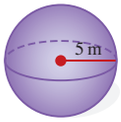


دووریێ لناڤبەرا هەردووخالان و پۆتانێن ناڤەراستا وی پارچە ڕاستەهیلێ ب هەردووخالان سنووردایی بهەژمێرە، بەرسڤا خو بۆ نێزیکترین دەهئیك نێزیکبکە.

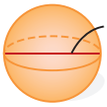
17 $(0, 0, 0)$ $(5, 5, 5)$ **18** $(6, 0, 9)$ ، $(7, 1, 4)$

19 $(-1, 4, 3)$ ، $(2, -5, 7)$

20 ڕووبەرێ گۆیا بەرامبەر بهەژمێرە، بۆ نێزیکترین دەهئیك نێزیکبکە.

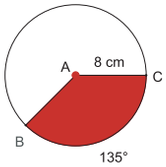


21 قەبارەیێ گۆیا بەرامبەر بهەژمێرە، بۆ نێزیکترین دەهئیك نێزیکبکە.



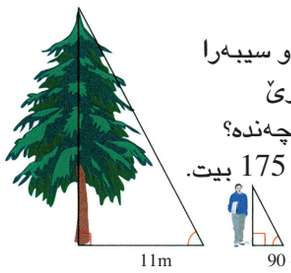
22 ڕووبەرێ شەشلایەکی ڕێك دریژیا لایێ وی 4 m بیت بۆ نێزیکترین دەهئیك نێزیکبکە.

23 ڕووبەرێ کەرتێ بازنەیی یێ بەرامبەر پێ π بهەژمێرە، نێزیکبکە بۆ نێزیکترین بەش ژسەدی.



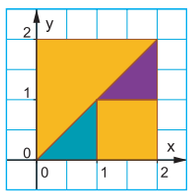
24 دریژیا کڤانی BC پێ π بهەژمێرە و نێزیکبکە بۆ نێزیکترین بەش ژ سەدی.

25 خەسرۆ دریژیا سیبەرا خو و سیبەرا دارەکێ پیڤا دا بلنداهیا دارێ بهەژمێرت، بلنداهیا دارێ چەندە؟ هەکەر دریژیا خەسرۆ 175 cm بیت.



26 بسەلمینە کو هەردوو سێگۆشە ABC و ADE دهاوشێوەنە هەکەر $A\ (6, 5)$ و $B\ (3, 4)$. $C\ (6, 3)$ و $D\ (-3, 2)$ و $E\ (6, -1)$ بن.

27 وێنەیێ دروشمێ برامبەر بکێشە پشتی مەزنکرنێ ب ڕێژەیا $\frac{3}{2}$.



بەشی 1

ئەزموونا کەلۆکی

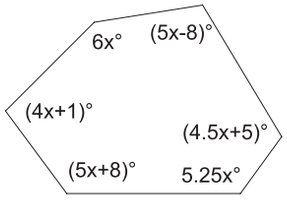
هەلبژارتن ژ چەند بەرسڤان

1 کیژ ڤانێن ل خوارێ ئیکدووبڕینێن رووتەختێ $2x+y-5z=20$ دنوینت.

أ) $x=0,y=0,z=0$ ج) $x=10,y=20,z=-4$

ب) $x=2,y=1,z=-5$ د) $x=10,y=20,z=4$

2 بهایێ x دڤی چەندلایێ ل خوارێدا چەندە؟



أ) 12 ج) 24

ب) 18 د) 36

3 پیڤانا هەرگۆشەیەکا ژ ناڤدا یا دووازدەلایەکی ڕێك چەندە؟

أ) 30° ج) 150°

ب) 144° د) 162°

4 کیژ ڤان ئاراستەبڕێن ل خوارێ یێ یەکسانە ب ئاراستەبڕێ $\overrightarrow{AB}$ هەکەر $A(2,-1)$ و $B(-2,4)$ بیت؟

أ) $\langle -4,-5\rangle$ ج) $\langle 5,-4\rangle$

ب) $\langle -4,5\rangle$ د) $\langle 5,4\rangle$

5 $ABCDE$ پێنجلایەکی کومدە $\hat{A}\cong\hat{B}\cong\hat{C}$ ، $\hat{D}\cong\hat{E}$ $m\,\hat{A}=2\,m\,\hat{D}$ پڤانا C چەندە؟

أ) 67.5° ج) 154.2°

ب) 135° د) 225°

6 جۆرێ وێ سێگۆشەیێ چیبە هەکەر پیڤانێن گۆشەییێن ژ ناڤدا $(2x)^\circ$ و $(3x\text{-}9)^\circ$ و $(x\text{+}27)^\circ$ بیت.

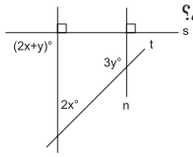
أ) دوولایەکسانا گۆشە تیژە.

ب) دوولایەکسانا وەستاوە.

ج) لاجیاوازە گۆشە تیژە.

د) لاجیاوازە گۆشەکا ڤەکریە.

7 بەهایێ x ل وێنەیێ بەرامبەر چەندە؟



أ) 22.5° ج) 90°

ب) 45° د) 135°

8 باژێرڤانیێ باغچەك لسەر شێوێ شەشلایەکی ڕێك بۆ چاندنا گوڵان تەرخانکر، رووبەرێ وی جهی بۆ نێزیکترین دەهئێك چەندە؟ هەکەر درێژیا لایێ وی 5 m بیت.

أ) 32.5 m^2 ج) 75.0 m^2

ب) 65.0 m^2 د) 129.9 m^2

9 چەوا ڕێژا قەبارەیێ گۆیەکێ بۆ ڕووبەرێ وێ دئێتە گوهۆڕین، هەکەر نیڤتیرەیێ وێ دووجاران بکەن؟

أ) ڕێژە نائێتە گوهۆرین. ج) ل 4 یێ دهێتە لێکدان.

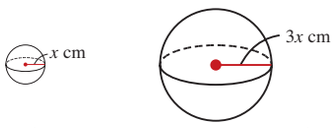
ب) دووجاران دبیت. د) ل 8 یێ دهێتە لێکدان.

10 $M(2,-6,3)$ ناڤەڕاستا $\overline{AB}$ یە، $A(x,y,z)$ و $B(-2,6,13)$ ، پۆتانێن خالا A چەندە؟

أ) $A(-6,18,23)$ ج) $A(2,-6,19)$

ب) $A(0,0,8)$ د) $A(6,-18,-7)$

11 قەبارەیێ گۆیا مەزن چەندە؟ هەکەر قەبارەیێ گۆیا بچووك $288\ cm^3$ بیت.



أ) $864\ cm^3$ ج) $7776\ cm^3$

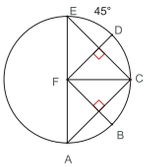
ب) $2827\ cm^3$ د) $23\,328\ cm^3$

12 کیژ ئەڤان ئاراستەبڕێن ل خوارێ درێژیا وی یەکسانە $3\sqrt{5}$

أ) $\langle -4,-5\rangle$ ج) $\langle 5,-4\rangle$

ب) $\langle -3,6\rangle$ د) $\langle 5,5\rangle$

13 ڕووبەرێ کەرتێ بازنەیێ FD چەندە؟ هەکەر پیڤانا $\overset{\frown}{B}$ 6π cm بیت؟

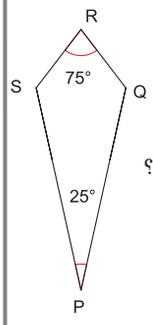


أ) $20\pi\ cm^2$ ج) $120\pi\ cm^2$

ب) $72\pi\ cm^2$ د) $240\pi\ cm^2$

بەرسڤ بتنێ

14 ژمارا لایێن چەندلایەکی کومد (قۆقز) چەندە هەکەر سەرجەمێ پیڤانێن گۆشەییێن ژ ناڤدا $1260°$ بیت؟



15 پیڤانا $\overset{\frown}{PQR}$ ل چەندلایێ بەرامبەر چەندە؟

16 درێژیا لاوین 1.6 m و درێژیا سێبەرا وی 3.5 m ، بلندهایا دارەکێ چەندە؟ هەکەر درێژیا سیبەرا وێ 17.5 m بیت.

17 ژمارا وان پارچەراستەهێلێن ژ ئەنجامێ گەهاندنا دووخالان ژ 6 خالان دروتەختەکیدا پەیدادبن چەندە؟ هەکەر هیچ سێ خال لسەر ئێك ڕاستەهێل نەبن.

18 نیڤتیرەیێ بازنەکێ چەندە؟ هەکەر ڕێژا ڕووبەرێ وێ بۆ چێوەیێ یەکسانی 2.5 بیت.

19 درێژیا بەرئەنجامێ هەردوو ئاراستەبران $u = \langle \vec{3}, -7 \rangle$ $\vec{v} = \langle -6, 5 \rangle$ چەندە؟ بەرسڤێ بۆ نێزیکترین دەهئێك نێزیکبکە

20 ژمارا لایێن گەلەك ڕوویی چەندە؟ هەکەر 12سەر و 8 ڕوو هەبن؟

21 ڕووبەرێ شەشلایەکی ریك چەندە؟ هەکەر درێژیا لایی وی 2 cm بیت، بەرسڤێ بۆ نێزیکترین دەهئێك نێزیکبکە.

22 درێژیا ئەوێ کڤانێ نیڤ بازنەی دروستدکەت چەندە؟ هەکەر نیڤتیرەیێ بازنێ 5 mm بیت.

بەرسڤا کورت

23 بسەلمینە هەدوو سێگۆشە ABC و DEC دهاوشێوەنە هەکەر $A(-2, 0)$ و $B(2, 2)$ و $C(2, -2)$ و $D(0, -1)$ $E(2, 0)$ بیت.

24 نیڤتیرەیێ بازنەکێ چەندە؟ هەکەر ڕێژەیا ڕووبەرێ وێ بۆ چێوەیێ وێ یەکسان بیت ب ڕێژەیا 2.5 بۆ 1 یەکەیا درێژیێ.

25 وێنەیێ سێگۆشەیا ABC بکێشە هەکەر $A(1, -2)$ و $B(-2, -3)$ و $C(-2, 2)$ بیت.

أ وێنەیێ $A'B'C'$ ب مەزنکرنەکێ ڕێژەیا وێ $\frac{3}{2}$ بیت.

ب بسەلمینە کو $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$ و $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{B'C'}$ و $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{A'C'}$ یەکسانن بکارئینانا لاری.

26 $A(1, -2)$ ، $B(-2, -3)$، $C(-2, 2)$ سەرێن سێگۆشێنە $A'B'C'$ وێنەیە بۆ سێگوشەیا ABC ب هاوڕێژەیەکا ئەندازەیی ڕێژەیا وی $\frac{3}{2}$.

أ د ئێك ڕووتەختێ پۆتانیدا، هەردوو سێگۆشان ABC و $A'B'C'$ بکێشە.

ب ڕوونبکە $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$ و $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{A'C'}$ و $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{B'C'}$ لاری بکاربینە بۆ پالپشتیا بەرسڤێ.

27 دوو ویستگەهێن سۆتەمەنیێ لسەر ڕێیەکا بلەز هەنە، دووریێ ل ناڤبەرا وان 8 km. تورمبێلەك لناڤبەرا هەردوو ویستگەهان ڕاوەستیا ژبەر نەمانا سۆتەمەنیا وێ، ئەگەر چەندە کو ئەو خالا تورمبێل لێ ڕاوەستیایی ب کێماسی دوورییا وێ ژ 2 km کێمتر نەبیت ژ هەردوو ویستگەهان؟ هیلکارەکی بکێشە و ڕوونبکە چەوا تە بەرسڤ دیت.

بەرسڤا درێژ

28 نەوزاد و سالار پێکڤە دژین، ئەوان بریاردا دگەل کورمامێ خو سامانی سەرەدانا دەڤەرەکا گەشتیاریێ بکەن. نەوزاد ڕاستەوخو بۆ دەڤەرا گەشتیارێ چو لێ سالار چۆ مالا کورمامێ خو دا ل گەل خو ببەت. سالار 90 km ب ئاراستەیێ باکور - $25°$ – ڕۆژهەلات چۆ و گەهشە مالا سامانی، پاشی ل گەل کورمامێ خو 50 km ب ئاراستەیێ ڕۆژهەلات چۆ و گەهشتە دەڤەرا گەشتیارێ.

أ هەردوو ئاراستەبڕێن گەشتێ ژ مالا نەوزاد و سالار بۆ مالا سامان و ژ مالا سامان بۆ دەڤەرا گەشتێ دنوێنن پێ هەردوو پێکهاتان بنڤیسە.

ب لارێ وی ئاراستەبڕێ گەشتا سالار ژ مالا وی بۆ دەڤەرا گەشتیاریێ دنوێنت چەندە؟ درێژیا وی چەندە؟

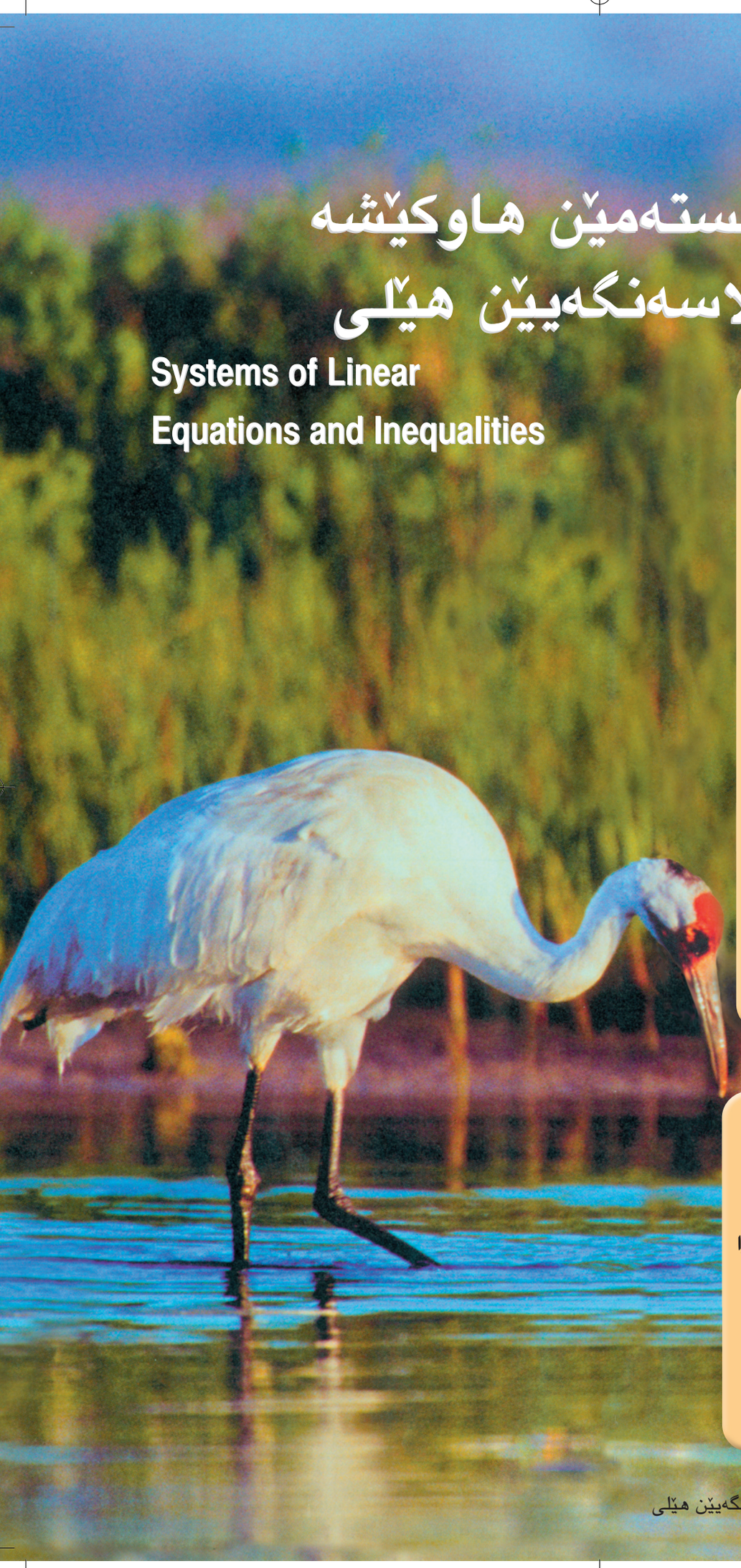
ج نەوزاد و سالار د ئێك دەمدا گەهشتنە دەڤەرا گەشتیاریێ، نەوزاد ب لەزەکا نەگۆر $50\ km/h$ بڕێڤەچوو، لەزا سالاری چەندبوو؟

بەشێ

2

سیستەمێن هاوکێشە و لاسەنگەیێن هێلی

Systems of Linear Equations and Inequalities



بەشێ دووێ

وانە

2–1 لاسەنگەیێن هێلی ب دوو نەزانراوان

2–2 سامپلێن هێلی (نموونە)

2–3 سیستەمێن لاسەنگەیێن هێلی

2–4 پرۆگرامێ هێلی

ئەزموونا نیڤا بەشی

2–5 شیکارکرنا سیستەمێن هێلی ب سێ نەزانراوان

2–6 پیڤەرێن ئاماریی

بەرپەرێ تەکنۆلۆژیا

2–7 بەلاڤکرنا ڕادە دارێ دووانی (ڤەکریێ ڕادە دارێ دووانی)

دەنگێ خۆ بلند بکە

تو دکاری سیستەمێن هاوکێشەیێن هێلی بکاربینی بۆ مەبەستا پلان دانانەکێ ژ بۆ کۆمکرنا پارەکی کو تیرا پارستنا وان بالّندان بکەت، ئەوێن مەترسیا نەمانا وان هەبیت ب ڕێیا فرۆتنا سالّنامەیان کو وێنەیێن جوان یێن وان بالّندەیان لسەر هەبیت.

ئەرێ تو یێ ئامادەیی؟

زاراف

هەر زاراڤەکێ دگەل پێناسا وێ یا ل ڕەخێ چەپێ هاتی گرێدە.

1 هاوکێشە
2 لاسەنگە
3 کۆمەلا شیکارێ
4 لاری
5 خالێن ڕوونکرنێ

أ هاوکێشەیا ب دوو نەزانراوان، خالێن شیکارا وێ، ڕاستە هێلەکی پێکدئینن.
ب لێژا راستەهێلی دبیتە ڕێژا بلنداهیێ بۆ پێشڤەچوونێ.
ج نڤیسینا دوو بڕێن جەبری، کو ئێك ژ هێمایێن نە یەکسانیێ ناڤبەرا وان گرێددەت.
د نڤیسینا دوو بڕێن جەبری کو هێمایێ یەکسانیێ ناڤبەرا وان گرێددەت.
هـ کۆمەلەکا بەهایانە، و هاوکێشەیێ یان لاسەنگەیێ ساخدکەن.
و کۆمەلەکا خالانە د ڕووتەختێ پۆتانیدا، پەیوەندییا لناڤبەرا دوو کۆمەلێن پێداییان دنوێنت.

بچووکترین چەند جارێ هاوبەش

بچووکترین چەند جارێ هاوبەش بۆ هەر جووتەکی ژ ڤان ژمارێن دیاریکە.

6 3 و 18
7 28 و 8
8 8 و 36
9 15 و 27

لارێن راستەهێلێن تەریب و ستوون دگەل ئێکودوو

ئەرێ ئەو هەردوو راستەهێل تەریب بن یان ستوونن یان پەیوەندییەکا دی هەیە.

10 $\begin{cases} y = 5x - 4 \\ y = -\frac{1}{5}x - 4 \end{cases}$
11 $\begin{cases} 5x - 10y = 3 \\ y = \frac{1}{2}x - 6 \end{cases}$
12 $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = -4 \end{cases}$
13 $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 3y - x = 5 \end{cases}$

هەژمارتنا بهایێن بڕێن جەبری ب لجهدنانێ

ب دانانا بهایێ هەر گۆڕاوەکی، بهایێ برێ بهەژمێرە.

14 $1.5x + 3y$ ؛ $x = 8$ ، $y = 14$
15 $5x - \frac{3}{4}y$ ؛ $x = 6$ ، $y = -4$
16 $4x - \sqrt{2}y$ ؛ $x = 0.25$ ، $y = \sqrt{2}$
17 $-\frac{75x}{3y}$ ؛ $x = 1$ ، $y = \frac{1}{3}$

شیکارکرنا هاوکێشەیێن گەلەك پێنگاڤ.

هەر هاوکێشەیەکێ شیکاربکە.

18 $8x + 19 = -5$
19 $5x + 4 = 25 - 2x$
20 $9x - (x + 12) = -13$
21 $-3(4x - 5) - 1 = 20$

شیکارکرنا وان هاوکێشەیێن کەرتان بخوڤە دگرن.

هەر هاوکێشەیەکێ شیکاربکە.

22 $\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}x = 8$
23 $\frac{2}{5}x + \frac{1}{6} = -4$
24 $x + \frac{1}{2} = -\frac{1}{5}$
25 $-\frac{1}{2} = 3x - \frac{1}{3}x$

بەشێ 2

ڕێبەرێ خواندنێ: لێنێرینەك بۆ بەشی

ل دەمێ بۆری

تە ئەڤە خواند بوون

- نواندنا نەخشەیێن هێلی ب وێنەیێ روونکرنێ.
- شیکارکرنا لاسەنگەیا هێلی یا ئێك نەزانراو ب وێنەیێ روونکرنێ.
- شیکارکرنا سیستەمێن هێلی2×2.
- تەنێن ئەندازەیی وەك شەشپالۆ و پوازکێ تە خواندبوون.

دڤی بەشیدا

دێ فێری ئەڤان بی

- شیکارکرنا لاسەنگەیا هێلی ب دوو نەزانراوان ب وێنەیێ روونکرنێ.
- شیکارکرنا سیستەمێ لاسەنگەیێن هێلی ب وێنەیێ روونکرنێ.
- شیکارکرنا پرسیارا پرۆگرامێ هیلی.
- شیکارکرنا سیستەمێ هاوکێشەیێن هێلی 3×3 .
- سامپلێن هێلی بۆ نواندنا کۆمەلێن پێداییان.
- پیڤانێن ئامارەی بۆ کۆمەلەکا پیداییان.
- بەلاڤکرنێن ئامارەیی یێن دووانی

د ئایندە دا

تو دکاری شارەزایێن ڤی بەشی بکاربینی بۆ

- شیکارکرنا سیستەمێ وان هاوکێشەیێن گەلەك ئالوز.
- تێگەهشتنا سامپلێن هێلی د بابەتێن دی دا وەك: کیمیا، فیزیاء و ئابوور.
- پلاندانانا کرداران د ژیانا ڕۆژانەدا، وەك کۆمکرنا پارەی یان رابوون ب گەشتو و گۆزارەکێ یان ڕێکخستنا خەرجییان.

زاراڤ — Vocabulary

کورتکرن	Constraint
لادان	Elimination
دەڤەرا ب مفا	Feasible region
پرۆگرامێ هێلی	Linear programming
سیستەمێ هێلی	Linear system
ل جهدانان	Substitution
سیستەم هاوکێشەیان	System of equations
سیستەم لاسەنگەیێن هێلی	System of linear inequalities
پێکڤە گریدان (پەیوەستی)	Correlation
راستەهێلێ باشترین نواندن	Line of best fit
لێژەبوون (هاتنە خوار)	Regrssion

دەروازەیەك لسەر زاراڤان

بۆ تێگەهشتنا هندەك زاراڤێن دڤی بەشیدا هاتین، ڤان پێنگاڤان پەیرەو بکە:-

1. پەیڤا ڤەگەڕان ئانکو ڤەگەڕان بۆ پاش، چەوا رامانا ڤێ پەیڤێ بۆ تێگەهشتنا رامانا **لێژەبوون** د بیرکاریێدا بکاردئینی؟
2. پەیڤا **لادان** چ دگەهینت؟ کارتێکرنا کردارا لادانێ ل شیکارکرنا هاوکێشەیێن بیرکاری چییە؟
3. پەیڤا **مەرج** ئاماژەیە بۆ دەستنیشانکرنێ یان دیارکرنا سنووری، رولێ مەرج دبیرکاریێدا چییە؟ ب نموونێ روونبکە.
4. پەیڤا ب مڤا، ئانکو دیتنا قازانجی ژ تشتەکی ل دەستپێکا ڕستەیێ بینە کو ئەڤ پەیڤە تێدابیت، پاشی گەنگەشی بکە لسەر ڕامانا **دەڤەرا ب مفا**.

بەشی 2

بیرکاری
ب خواندن و نڤیسینێ

ستراتیژیا وانەیێ: نڤیسینا رۆژانەیێن بیرکاریێ

نڤیسینا رۆژانە یێن بیرکاریێ هاریکاریێ بۆ چاککرنا هەر دوو شارەزاییان نڤیسین و دەرئەنجامێ دکەت. دەمێ تو ب نڤیسینێ رۆژانەیەکێ دەردبری، بۆ تە دیار دبیت کو هندەك بابەت دبیرکاریێدا هەنە تو باش نزانی، یان تو دبینی ب زەحمەتن. تو دشێی رۆژانە یان بکاربینی بۆ دیارکرنا ئەوا تو فێربوویێ دوانەیا بیرکاریێدا، وەکی خالیێن وانێ ئەوێن ئاستەنگێ بۆ تە دروستدکەن، یان بکاربینی بۆ پۆختەکرنا چەمك و زاراڤان، یان بۆ دەربرینا بۆچوونێن خۆ دەربارەی بابەتێ وان، و یا هەرا گرنگ د رۆژانە یا بیرکاریێدا، رادێ پێشکەفتنا تە د تێگەهشتنا بیرکاریێدا دیاردکەت.

بەرپەرەك ژ رۆژانەیێن قوتابیەکی: ئەڤی بەرپەرێ ل خوارێ ژ رۆژانەیێن قوتابیەکی بخوینە.

رۆژانە

بەروار: 22 چریا دووێ

ئەز تووشی ئاستەنگەکێ بووم ب تایبەت ل وانەیا (2 – 1) . هەردەم من ژبیر دکر هێمایێ لاسەنگەیێ بەرۆڤاژی بکەم، دەمێ هەردوو لایێن لاسەنگێ ل ژمارەکا سالب ددەم یان دابەشی (1–) دکەم. برایێ من ئەڤ ئێکە بۆ وێ چەندێ زڤرت کو ئەز باش دهۆیێ ئەڤێ نە گەهشتبووم. من ئەڤ پرسیارا ژ ماموستایی کر، ئەڤ شێوە بۆ من ڕوونکر، هزربکە ل لاسەنگەیا $4 > 3$.

هەکەر هەردوو رەخێن لاسەنگێ لێکبدەی ل ژمارە (-1) و هێمایێ لاسەنگێ بەرۆڤاژی نەکەی $-4 > -3$ دێ بدەست تە کەڤت، و ئەڤە نەیا دروستە. لێ هەکەر هێمایێ لاسەنگەیێ بگوهۆڕی دێ $-4 < -3$ بدەست تە کەڤیت، و ئەڤە یا دروستە. ئەڤە لسەر لاسەنگەیێن نەزانراوان بخۆڤە دگرن بجهدئێت. ژ نوکە و پێشتر ئەز ڤێ شاشیێ ناکەم.

هەوڵبدە

دەستپێبکە ب نڤیسینا رۆژانەیێن بیرکاریێ. ڤان بێروکێن ل خوارێ هاتین بۆ نڤیسینا رۆژانەیێن خو بکاربینە. پشت راستبە ژ نڤیسینا بەروارێ هەر بەرپەرەکی و ژمارا وی.

- ئەوا من ژ وانەیا ئەڤرۆ زانی.
- ئەوا ئەز ژ تێگەهشتنا وێ نەی پشت راست ل وانەیا ئەڤرۆ.
- بۆ ب دوومامۆژێن ئینانا وانەیا ئەڤرۆ، من پێدڤی ب ڤان شارەزاییێن ل خوارێ هەیە.

(1) ئەو ئاستەنگێن من دیتین چنە؟ چەوا ئەز دکارم لسەر وان زال بم؟

(2) ل وانەیا ئەڤرو، چ سەرنجێ من راکێشا؟ و چ لنك من نە یا پەسەند بوو؟

1-2

لاسەنگەیێن هێڵی ب دوو نەزانراوان Linear inqualities in two unknowns

ئارمانج

- شیکارکرنا لاسەنگەیا هێڵی ب دوو نەزانراوان ب وێنەیێ رووتکرنێ.
- شیکارکرنا پرسیاران بکارئینانا لاسەنگەیێن هێڵی ب دوو نەزانراوان.

کی ئەقێ بکاردئینت؟

رێڤەبەرێن بنگەهێن شانویێ لاسەنگەیێن هێڵی بکاردئینن بۆ دیارکرنا ژمارا پلیێتێن چوونا ژۆرێ کو ب نرخێن جیاواز د فرۆشن بۆ دەستکەفتنا قازانجی (نموونەیا 3).

زاراڤ Vocabulary

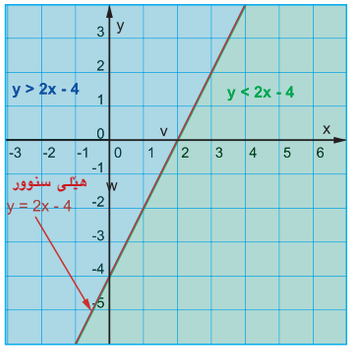
لاسەنگەیێن هێڵی
Linear inequality

هێلا سنووری
Boundary line

رۆناهیەك

ل بیرا تە بیت کو هێلا سنووری بۆ هەردوو هێمایان $\geqslant$ و $\leqslant$ ، راستە هێلەکا نە خالخالکرییە (بەردەوامە).

نەخشەیێن هێڵی بنجینەیێ لاسەنگەیێن هێڵی ب دوو نەزانراوان پێکدئینت. **لاسەنگەیا هێڵی ب دوو نەزانراوان** دەربڕینێ ژ پەیوەندیا لناڤبەرا دوو گۆڕاوان دکەت کو هێمایەك ژ هێمایێن لاسەنگێ بخۆڤە دگریت. وەکو $y > 2x - 4$ کۆمەلا شیکارا لاسەنگەیا هێڵی ب دوو نەزانراوان ژ هەموو وان جووتێن رێکخستی (x,y) پێکدهێت کو ئەوێن لاسەنگێ ساخدکەن. و ئەو خالێن شیکارێن جیاواز یێن لاسەنگەی دنوێنن دبنە بەشەك ژ ڕووتەختێ پۆتانی و ڕاستەهێلەکی دنوێنن، ئەو ڕووتەختێ دکەتە دوو بەش. بۆ نموونە ڕاستەهێلێ $y = 2x - 4$ ڕووتەختێ پۆتانی دکەتە دوو بەش هەر وەکی ل وێنەیێ بەرامبەر دیار. پۆتانێن خالێن



بەشەکی لاسەنگەیا $y > 2x - 4$ ساخدکەن، و پۆتانێن بەشێ دی لاسەنگەیا $y < 2x - 4$ ساخدکەن. بەشێ ئێکێ کۆمەلا شیکارێ بۆ لاسەنگەیا $y > 2x - 4$ ب وێنی رووتکرنێ دنوێنت و ئەو دبیتە **دەڤەرا شیکارێ** بۆ لاسەنگەیا ئێکێ. راستەهێلی $y = 2x - 4$ هێلا سنوورییە بۆ دەڤەرا شیکارێ. وێنەیێ ڕاستەهێلی سنووری ب خالخالکرنێ بکێشی، و رامانا وێ ئەوە کو خالێن وی ناکەڤنە د دەڤەرا شیکارێ دا.

بۆ شیکارکرنا لاسەنگەیا $y > 2x - 4$ هێلا سنووری ب خالخالکرنێ بکێشە و دەڤەرا دکەفتە د باکووری وی دا ڕەنگبکە.

نموونـــــە 1

شیکارکرنا لاسەنگەیێن هێڵی ب دوو نەزانراوان ب وێنەیێ رووتکرنێ.

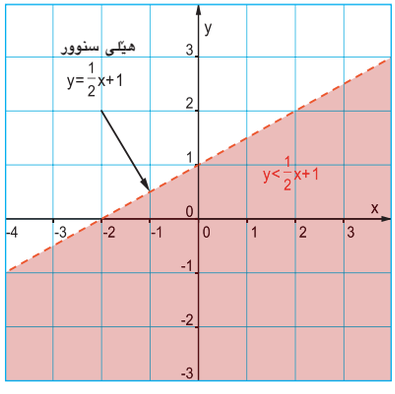
ب وێنەیێ رووتکرنێ هەر لاسەنگەیەکێ شیکاربکە.

أ $y < \frac{1}{2}x + 1$.

هێلا سنووری دبیتە $y = \frac{1}{2}x + 1$ ، لارێ وی $\frac{1}{2}$ و تەوەرێ y ل 1 ێ دبڕت.

هێلا سنووری ب خالخاکرنێ بکێشە، چونکی ناکەڤیتە دناڤ دەڤەرا شیکارێدا.

دەڤەرا ل ژێر هێلا سنووری رەنگبکە.



ساخکرن: خالەکێ ژ دەڤەرا شیکارێ هەلبژێرە بۆ نموونە $(0,0)$ و پاسەدان بکە، ئەرێ شیکارا لاسەنگێ دنوێنت.

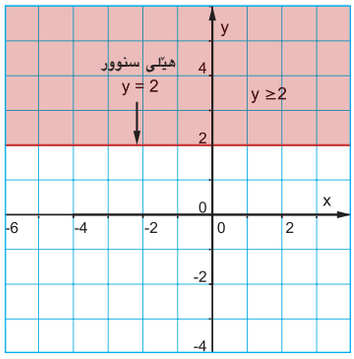
چونکی خالا تاقیکرنێ لاسەنگێ ساخدکەت، ڤێجا دەڤەرا رەنگکری دبیتە شیکار.

$y < \frac{1}{2}x + 1$

$0 \overset{?}{<} \frac{1}{2}0 + 1$

$0 \overset{?}{<} 1$ ✓

ب $y \geq 2$.



ل بیرا تە بیت کو راستەهێڵێ $y=2$ راستەهێڵەکی ئاسۆییە.

پێنگاڤا (1) یێ: راستەهێڵەکی بکێشە بکارئینانا هێڵەکی نە خالخالکری (بەردەوام) چونکی هێلا سنووری بەشەکە ژ دەڤەرا شیکارێ.

پێنگاڤا (2) یێ: دەڤەرا ل ژۆریا هێلا سنووری ڕەنگبکە بۆ دیارکرنا خالان کو $y > 2$.

ساخکرن: خالا (0,4) دکەڤنە دناڤ دەڤەرا شیکارێ دا چونکی $4 \geq 2$ بەرێ خو بدێ هەر خالەکا بکەڤتە سەر هێلا سنووری یان ل ژۆریا هێلا سنووری، شیکارەکێ دنوێنت بۆ لاسەنگی، بهایێ x هەرچەند بیت.

خالا چاڤدێریێ

1. ب ویێنەیێ روونکرنێ هەر لاسەنگەیەکێ شیکاربکە.

أ $y \geq 3x - 2$ **ب** $y < -3$

هەکەر هاوکێشەیا هێلا سنووری نەیا نڤیسیبت لسەر شێوێ لاری – ئێکودووبڕینێ، تو دکاری (خالا تاقیکرنێ) هەلبژێری کو نە کەڤتە سەر هێلا سنووری بۆ دیارکرنا ئەوێ دەڤەرا دڤێت بهێتە ڕەنگکرن. هەکەر وێ خالێ لاسەنگە ساخکر، ئەو دەڤەرا خال دەکەڤیتە دناڤدا ڕەنگبکە، و هەکەر ساخنەکر، دەڤەرا دی ڕەنگبکە.

نموونـــــە 2

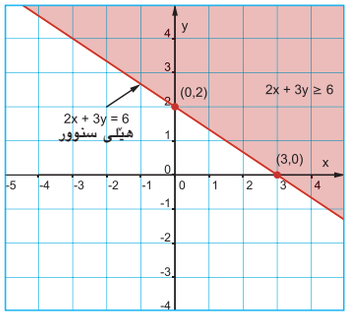
شیکارکرنا لاسەنگەیێن هیلی ب دوو نەزانراوان ب ویێنەیێ روونکرنێ بکارئینان ئێکودووبڕینێ دگەل هەردوو تەوەرێن پۆتانێ.

لاسەنگەیا $2x + 3y \geq 6$ شیکاربکە بکارئینانا ئێکودووبڕینێ دگەل هەر ئێک ژ هەردوو تەوەرێن پۆتانێ.

پێنگاڤا (1) یێ: هەردوو ئێکودوو بڕینان دیاربکە.

ل جهێ x سفرێ دانەو پاشی ل جهێ y سفرێ دانە بۆ دیارکرنا ئێکودووبڕینا هێلا سنووری دگەل هەردوو تەوەران.

ئێکودووبرین دگەل تەوەرێ دووێ (ستوونی) y	**ئێکودووبرین دگەل تەوەرێ ئێکێ (ئاسۆیی)** x
$2x + 3y = 6$	$2x + 3y = 6$
$2 \times 0 + 3y = 6$	$2x + 3 \times 0 = 6$
$3y = 6$	$2x = 6$
$y = 2$	$x = 3$



پێنگاڤا (2) یێ: هێلا سنووری بکێشە

هێلا سنووری ئەو هێلەیە کو د هەردوو خالانرا (0,2) و (3,0) دبۆرت. ئەڤی راستەهێڵی ب هێلەکا بەردەوام بکێشە، چونکی ئەو بەشەکە ژ دەڤەرا شیکارێ.

پێنگاڤا (3) یێ: ئەوێ دەڤەرا دڤێت تورەنگبکەی دیاربکە.

خالا (0,0) د لاسەنگێ دا دانە، لاسەنگەیا $0 + 0 \geq 6$ نە یا دروستە ئانکو ئەو خالە ناکەڤتە د دەڤەرا شیکارێ دا. ڤێجا دڤێت ئەو دەڤەرا دکەڤتە ژۆریا هێلا سنووری ڕەنگبکەی.

ڕۆناهیەك

(0,0) وەك خالا تاقیکرنێ بکاربینە، بتنێ وێ خالێ بکارنەئینە هەکەر بکەڤتە لسەر هێلا سنووری.

خالا چاڤدێریێ

2. لاسەنگەیا $3x - 4y > 12$ بکارئینانا هەردوو ئێکودووبڕینان (ئاسۆیی و ستوونی) ب ویێنەیێ ڕوونکرنێ شیکاربکە.

نموونـــــه 3 بجهئینانا بازرگانی

شیکارکردنی پرسیارەکان

ل شانۆگەریەکێ پلێتا چۆنا ژۆرێ بۆ مەزنان ب 8000 دیناران بوو، و بۆ زارۆکان ب 5000 دیناران بوو. ریڤەبەرێ شانۆگەریێ هەموو جاران ل هەر ئاهەنگەکێ 240 000 دیناران خەرج دکەت. دڤێت ریڤەبەر چەند پلێتێن چۆنا ژۆرێ ژ هەر جۆرەکی بفرۆشت هەتا قازانج بکەت؟ ریڤەبەری 20 پلێتێن زارۆکان فرۆتن، دڤێت ئەو چەند پلێتێن مەزنان بفرۆشت هەتا قازانجبکەت؟

1 ل پرسیارێ بگەهە

شیکارکرنا ڤێ پرسیارێ ژ دوو بەشان پێکدئێت: (1) نڤێسینا لاسەنگێ، و شیکارکرنا وێ ب وێنەیێ ڕوونکرنێ، بۆ بەرسڤا پرسیارا ئێکێ هەژمارتنا ژمارا پلێتێن مەزنان کو دڤێت بفروشت دەمێ 20 پلێتێن زارۆکان فرۆتبن.

پێدایێن گرنگ بنڤیسە:

- **دوو جۆرێن پلێتان هەنە. پلێتا مەزنان ب** 8000 دیناران، و پلێتا زارۆکان ب 5000 دیناران.
- دڤێت نرخێ پلێتێن فرۆتین ژ 240 000 دیناران کێمتر نەبیت.

2 پلانێ دانە

هێمایێ x بۆ ژمارا پلێتێن مەزنان و y بۆ ژمارا پلیتێن زارۆکان بکاربینە. لاسەنگەیەکێ بنڤیسە پرسیارێ بنوێنت.

نرخێ پلێتا مەزنان	×	ژمارا پلێتێن مەزنان	+	نرخێ پلێتا زارۆکان	×	ژمارا پلێتێن زارۆکان	⩾	سەرجەم
8000	×	x	+	5000	×	y	⩾	240 000

چێدبیت پرسیارێ ب لاسەنگەیا $8000x+5000y\geq 240\ 000$ یان ب $8x+5y\geqslant 240$ بنوێنی.

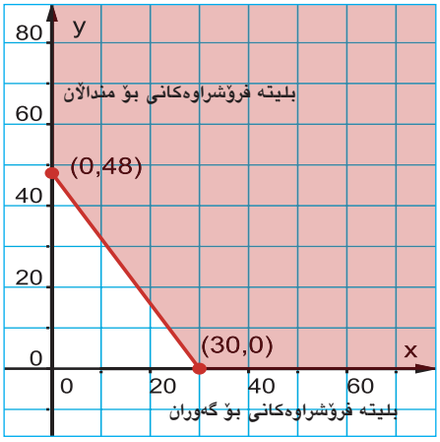
3 شیکاربکە

ئێکو دووبڕینا هێلا سنووری دگەل هەردوو تەوەران دیاربکە.

$8\times 0+5y=240$ $\quad y=48$

$8x+5\times 0=240$ $\quad x=30$

هێلا سنووری بکێشە، ئەو راستەهێلەیە کو د هەردوو خالانرا $(0,48)$ و $(30,0)$ دبوّرت. وێ دەڤەرا پێکدئێت ژ هەموو خالێن چارێکێ ئێکی و دکەڤنە ژۆریا هێلا سنووری ڕەنگبکە، چونکی ژمارا پلێتان نەیا سالبە



ژمارا پلێتین زارۆکان کو هاتینە فرۆتن 20:

$8x+5\times 20\geq 240$ لجهی دانە

$8x+100\geq 240$ سادەبکە

$8x\geq 140$ و لدوماهیێ $x\geq 17,\overline{5}$ دڤێت ژمارا پلێتان ژمارەکا تەواو بیت

دڤێت ژمارا پلێتێن بۆ مەزنان هاتینە فرۆتن نە کێمتر بیت ژ 18 .

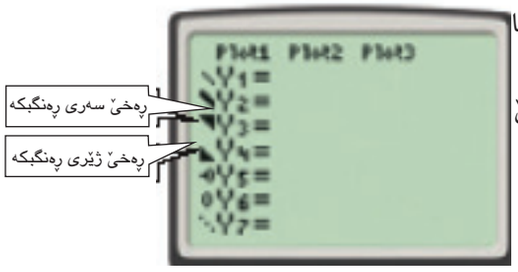
4 ساخبکە

$18\times 8000+20\times 5000=244000$

ئاگەهداریە!

ژ بیرا تە نەچیت کو هێمایێ هەر نەزانراوەکی چ دگەهینت.

3. ڕێڤەبەرێ بنگەهێ ڕەوشەنبیریێ بریاردا دوو جۆرێن خەلاتان لسەر ئەندامێن خۆ بەلاڤبکەت. نرخێ هەر خەلاتەکی ژ جۆرێ ئێکێ 125 000 دینار بوو، و ژ جۆرێ دووێ 40 000 دینار بوو. ڕێڤەبەری 1 500 000 دینار بەردەست هەبوون. ئەو دکارت چەند خەلاتان ژ هەر جۆرەکێ پێشکێش بکەت؟ هەکەر 4 خەلات ژ جۆرێ ئێکێ بن، ئەو دکارت چەند خەلاتان ژ جۆرێ دووێ پێشکێش بکەت؟



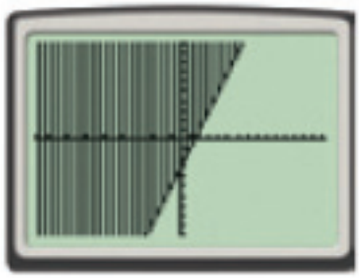
تو دشێی بژمێرا ڕوونکرنێ بۆ شیکارکرنا لاسەنگەیا هێلی ب دوو نەزانراوان ب وێنەیێ ڕوونکرنێ بکاربینی. Y1 کلیکبکە، و بکارئینانا دوگما لڤاندنێ بۆ پەرێ ڕەخێ چەپێ بلڤە. هەر چەند دوگما ENTER کلیبکەی، دێ جۆرەکێ ژ جۆرێن وێنەی بینی، هەر وەکو ل وێنەیی بەرامبەر ڕوونکری.

نموونـــــە 4

شیکارکرنا لاسەنگەیێن هێلی ب دوو نەزانراوان ب وێنەیێ ڕوونکرنێ بکارئینانا بژمێرا ڕوونکرنێ

ل لاسەنگەیا $\frac{2}{3}(2x-y)<2$ ، y پێ x بنڤیسە، لاسەنگەیا ب دەست تە کەفتی ب وێنەیێ ڕوونکرنێ شیکاربکە.

$\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}(2x-y)<\frac{3}{2}\times 2$	هەردوو لایان لێکدان $\frac{3}{2}$ بدە
$2x-y<3$	ژ هەردوو لایان دەربکە $2x$
$-y<-2x+3$	هەردوو لایان دگەل -1 بدە و
$y>2x-3$	هێمایێ لاسەنگێ بەرۆڤاژی بکە.



Y1 کلیکبکە. $2x-3$ بنڤیسە، بکارئینانا دەگما لڤاندنێ بۆ پەرێ لایێ چەپێ هەرە. ENTER کلیکبکە وێنە ل لایێ ◥ چەپێ دیار دبیت. دەگما GRAPH کلیکبکە وێنەیێ بەرامبەر دێ بدەست تە کەڤیت. تێبینی: نموونێ ل دووڤ بژمێرا ڕوونکرنێ شیکاربکە.

ڕۆناهیەك

ل بیرا تە بیت کو لێکدانا لاسەنگەیەکێ ل ژمارەیەکا سالب، یان دابەشکرن لسەر ژمارەیەکا سالب هێمایێ لاسەنگەیێ بەرۆڤاژی دکەت.

4. ب وێنەیێ ڕوونکرنێ لاسەنگەیا $2(3x-4y)>24$ شیکاربکە بکارئینانا بژمێرا ڕوونکرنێ یان ب ڕێیا ئاسایی.

هزربکە و گەنگەشێ بکە

1. بەراوردیێ بکە لناڤبەرا بازنا ڕەشکری و بازنا ڤالا ل شیکارا لاسەنگەیا هێلی ب ئێك نەزانراوی و هەردوو هێلێن سنووری یێ خالخالکری و یێ بەردەوام ل شیکارا لاسەنگەیا هێلی ب دوو نەزانراوان ب وێنەیێ ڕوونکرنکرنێ.

2. بەحسێ دەڤەرا شیکارێ بۆ لاسەنگەیا $x\geq 4$ بکە.

3. ڕوونبکە ئەرێ تو دشێی خالا $(0,0)$ وەك خالا تاقیکرنێ بکاربینی بۆ دیارکرنا دەڤەرا پێدڤی بۆ ڕەنگکرنێ ل دەمێ شیکارکرنا لاسەنگەیا $3x+5y\leq 0$.

4. ڕێکخەر بە، خشتێ ل خوارێ کۆپیبکە و تەمامبکە، ل هەر چارچێوەیەکی نموونەکێ لسەر دوو لاسەنگەیان بنڤیسە و دەڤەرا شیکارێ وەکی بەحسێ لسەرێ خشتێ بت: یا ئێکێ لسەر شێوێ ... $y<$ ، بیت کو $>$ هێمایەك بیت ژ هێمایێن بەراوردکرنێ، و یا دووی لسەر شێوازەکی دی یێ جیاواز بیت.

فێربە و شرۆڤە بکە

هێلا سنووری یا خالخالکری بیت	هێلا سنووری یا خالخالکری بیت و ڕەنگکرن ل ژێر هێلا سنووری بیت	هێلا سنووری یا بەردەوام بیت و ڕەنگکرن ل ژوورێا هێلێ بیت	هێلا سنووری یا بەردەوام بیت و ڕەنگکرن ل ژێر هێلێ بیت.

2-1 ڕاهێنان

ڕاهێنانێن ئاراستەکری

1 **زاراف** ڕوونبکە چەوا یا دشیاندایە ڕاستەهێلێ $y=3x-4$ ببیتە هێلا سنووری.

بەری خۆ بدە نموونە 1 **هەر ئێك ژ ئەڤان لاسەنگەیان ب وێنەیێ ڕوونکرنێ شیکاربکە.**

2 $y>-4$ **3** $y\le 2$ **4** $y\ge x-3$ **5** $y<-\frac{1}{3}x+2$

بەری خۆ بدە نموونە 2 **هەر ئێك ژ ئەڤان لاسەنگەیان بکارئینانا ئێکودووبڕینێن ئاسۆیی و ستوونی شیکاربکە:**

6 $3x+2y>12$ **7** $5x-2y\le 20$ **8** $-4x+5y<-20$

بەری خۆ بدە نموونە 3

9 **بەکاربرن:** ڤیانێ 17 000 دینار هەنە، ئەوێ دڤێت دوو جۆرێن باکیتێن قەهوێ بکرێ. نرخێ پاکێتا ژ جۆرێ ئێکێ 2290 دینار بوو، و نرخێ پاکێتا ژ جۆرێ دووێ 3750 دینار بوو.

أ هێمایێ x بۆ جۆرێ ئێکێ و هێمایێ y بۆ جۆرێ دووێ دانە. لاسەنگەیەکێ بنڤیسە پرسیارێ بنوێنت و ب وێنەیێ ڕوونکرنێ شیکاربکە بۆ دیارکرنا ژمارا پاکیتێن هەردوو جۆرێن قەهوێ.

ب چەند پاکیتان ڤیان دشێت ژ جۆرێ ئێکێ بکرێ هەکەر 3 پاکێت ژ جۆرێ دووێ کرین؟

10 **قوتابخانە:** قوتابیێن پۆلا یازدێ جۆرێن تابلۆیێن هۆنەری د فرۆشن بۆ کۆمکرنا بڕەکێ پارەی نە کێمتر بیت ژ 280 000 دیناران. ژ کارێ چێکرنا هەر تابلۆیەکی ژ جۆرێ ئێکێ 1750 دیناران قازانج دکەت، و ژ کارێ هەر ئێکی ژ جۆری دووێ 1250 دیناران قازانج دکەت.

أ هێمایێ x بۆ ژمارا کارێن جۆرێ ئێکێ و y بۆ ژمارا کارێن جۆرێ دووێ دانە. لاسەنگەیەکێ بنڤیسە پرسیارێ بنوێنت و ب وێنەیێ ڕوونکرنێ شیکاربکە بۆ دیارکرنا ژمارە وان کارێن کو دڤێت قوتابی ژ هەر جۆرەکی بفرۆشن.

ب قوتابیان 100 کار ژ جۆرێ دووێ و 50 کار ژ جۆرێ ئێکێ فرۆتن. ئەرێ قوتابیان ئارمانجا خۆ بجهئینا؟

بەری خۆ بدە نموونە 4 **ل هەر لاسەنگەیەکێ y پێ x بنڤیسە، پاشی ب وێنەیێ ڕوونکرنێ شیاربکە.**

11 $\frac{1}{2}(6x-2y)\ge 4$ **12** $-\frac{3}{5}x+y\ge 2$ **13** $3(3x-y)>-12$

ڕاهێنان و شیکارکرنا پرسیاران

هەر لاسەنگەیەکێ ب وێنەیێ ڕوونکرنێ شیکاربکە:

14 $y\ge 6$ **15** $y<x+4$ **16** $y>-\frac{2}{5}x-3$

هەر لاسەنگەیەکێ بکارئینانا هەر دوو ئێکودووبڕینێن ئاسۆیی و ستوونێ شیکاربکە.

17 $4x+2y\ge 8$ **18** $3x-6y<12$

ڕاهێنانێن ئازاد

بۆ شیکارکرنا بەری خو ڕاهێنانان	بدە نموونە
16-14	1
18-17	2
21-19	3
24-22	4

19 **بازار:** لێچوونا ڕیکلامێ ل ڕۆژنامەیەکا ناڤخۆیی 20 000 دینارن ل ڕۆژەکێ و لێچوو ل ویستگەهەکا ناڤخۆیی 50 000 دینارن د خولەکەکێدا. بۆدجا هاتیە تەرخانکرن بۆ ریکلامان ل دەستگەهەکێ ئێك ملیون دینارە. هێمایی x بۆ ژمارا ڕۆژێن ڕێکلامێ درۆژنامەیەکێ و y بۆ ژمارا خولەکێن ڕێکلامێ ل ویستگەهێ دانە. لاسەنگەیەکا هێلی بۆ نواندنا پرسیارێ بنڤیسە، پاشی ئەوێ لاسەنگێ ب وێنەیێ ڕوونکرنێ شیکاربکە.

20 **گەردوون:** ئەو ڕۆکێتا شاخێ هەستیار بۆ مەریخێ هەلدگرت پێدڤی ب ئۆکسجینێ هەیە دا ژ هێزا ڕاکێشانێ دەرکەڤیت. وەسا دانە ئەو شاخێ هەستیار0.78L ئۆکسجینێ بەرهەمدئینت ژ ئێك کیلۆگرام ئاڤێ و 0.32L ئۆکسجین ژ کیلوگرامەکا دووەم ئۆکسیدێ کاربۆنێ. شاخی هەستیار پێدڤی ب $56L$ ئۆکسجینێ هەیە. ب کێماسی. هێمایێ x بۆ ژمارا کیلۆگرامێن ئاڤێ و هێمایێ (y) بۆ ژمارا کیلوگرامێن دووەم ئۆکسیدێ کاربۆنێ دانە.

أ لاسەنگەیەکا هێلی بنڤیسە پرسیارێ بنوێنت و شیکاربکە ب وێنەیێ ڕوونکرنێ.

ب شاخێ هەستیار $36kg$ ژ ئاڤێ و $88kg$ ژ دووەم ئۆکسیدێ کاربۆنێ کۆمکرینە. ئەرێ ب ئەڤی کاری گەشتە دێ ئەنجام دەت؟

21 **مۆبایل:** مەریوان دوو جورێن کارتێن تەلەفوونێ دفرۆشت، کارتا 8000 دیناری و کارتا 12 000 دیناری. بەهایێن کارتێن لنك مەریوان 200 000 دینارن ب کێماسی.

هێمایێ x بۆ ژمارا کارتێن ژ جۆرێ ئێکێ و هێمایێ y بۆ ژمارا کارتێن ژ جۆرێ دووێ دانە.

أ لاسەنگەیەکا هێلی بۆ نواندنا پرسیارێ بنڤیسە، پاشی ب وێنەیێ ڕوونکرنێ شیکاربکە.

ب مەریوانێ 10کارت ژ جۆرێ 8000 دیناری فرۆتن، ئەو دشێت چەند کارتان ژ جۆرێ دووێ بفرۆشت.

y پێ x بنڤیسە، پاشی لاسەنگێ ب وێنەیێ ڕوونکرنێ شیکاربکە.

22 $-4y<4(3x-5)$ **23** $-3(-10x+2y)\geq 24$ **24** $-\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}y\leq -1$

هەر لاسەنگەیەکێ ب وێنەیێ ڕوونکرنێ شیکاربکە.

25 $-4y>10x-20$ **26** $y-5\geq 4(x-2)$ **27** $6x+3y<0$

28 $y+\frac{3}{4}\leq \frac{5}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)$ **29** $\frac{9-3y}{2}\geq 6x$ **30** $x\leq 4$

31 $4x-5y<7x-3y$ **32** $2x-5y\leq -4x+15$ **33** $x>-2$

34 **قوتابخانە:** یانەیا بیرکاریێ ل ئامادەیا کوردستان ئاهەنگەکا ستراناں سازکر بۆ کۆمکرنا بڕەکی پارەی نە کێمتر بیت ژ 600 000 دیناران دا کۆمپیوتەرەکێ بۆ یانەیا خو بکڕن. سەرۆکێ یانێ بریاردا، نرخێ پلیتا چوونا ژۆرێ 5000 دینار بیت هەکەر بەری ڕۆژا ئاهەنگێ کڕیبت و 6000 دینار بیت هەکەر ل بەردەرگەهێ کریبت.

أ هێمایی (x) بۆ ژمارا پلیتێن هاتینە فرۆتن بەری ڕۆژا ئاهەنگێ و (y) بۆ ژمارا پلیتێن ل بەر دەرگەهی هاتینە فرۆتن دانە. لاسەنگەیەکا هێلی بۆ نواندنا پرسیارێ بنڤیسە، پاشی ب وێنەیێ ڕوونکرنێ شیکاربکە.

ب هەکەر ژمارا پلیتێن بەری ئاهەنگێ هاتینە فرۆتن 30 پلیت بن، دڤێت چەند پلیت ل بەردەرگەهی بینە فرۆتن هەتا یانە بگەهیتە ئارمانجا خۆ؟

35 **کۆمکرنا پارەی:** قوتابیێن پۆلا یازدێ ل دەمێ یاریا تەپا سەبەتێ نانێن پیتزایێ و تەزیاتیان دفرۆشن بۆ کۆمکرنا برەکی پارەی نە کێمتر بیت ژ 150 000 دیناران ژ بۆ کرینا خەلاتەکی بۆ ماموستایێ بیرکاریێ. ل فرۆتنا هەر پیتزایەکێ 1250 دیناران و ل فرۆتنا هەر قوتیەکا تەزیاتیێ 500 دیناران قازانج دکەن.

أ هێمایێ x بۆ ژمارا پیتزاییان و y بۆ ژمارا قوتییێن تەزیاتیێ دانە، لاسەنگەیەکا هێلی بۆ نواندنا پرسیارێ بنقیسە.

ب قوتابیان 75 پیتزا و 150 قوتییێن تەزیاتیێ فرۆتن. ئەرێ ئەو دشێن وی خەلاتی بکرن؟

36 **هزرکرنا رەخنەگر:** نرخێ پلیتا چۆنا ژۆری بۆ باغچێ ئاژەلان بۆ مەزنان 5000 دینارن و بۆ زارۆکان 2000 دینارن. نرخێ پلێتێن هاتینە فرۆتن ل رۆژەکێ ژ رۆژێن حەفتیێ پترە بوو ژ 300 000 دیناران. بۆ نواندنا پرسیارێ و شیکارکرنا وێ ب وێنەیێ روونکرنێ هەر ئێکێ دلشاد و کاوەی لاسەنگەیەکا هێلی نقیسی، دلشادی هێمایێ x بۆ ژمارا پلیتێن مەزنان دانە، لێ کاوەیی هێمایێ x بۆ ژمارا پلێتێن زارۆکان دانە. ئەرێ هەردوو وێنەیێن روونکرنێ یێن هەردوو قوتابیان چێکرین ب چ دجیاوازن؟
ئەرێ ئێکێ ژ وان شاشی کرییە؟ هەکەر بەرسڤا تە بەلێ بوو، کیژ وان بوو؟

37 پاپوورەك ب 500 میلێن دەریایی ژ بەندەرەکی یا دوور بوو، ئەو پاپۆرە بەرەڤ بەندەری جۆ ب لەزەکێ نەزێدەتر بوو ژ 27 گرێیان ددەمژمیرەکێدا (ئانکو میلەکی دەریایی د دەمژمێرەکێدا، میلێ دەریایی 1852 مەترە).

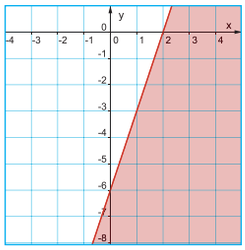
أ چەند دەم بۆ پاپوورێ دڤێت هەتا بگەهتە بەندەرێ؟

ب وێنەیەکی روونکرنێ بکێشە تێدا گۆهۆرینا دووریێ لناڤبەرا پاپوور و بەندەری ل دووڤ بۆرینا دەمی دیارکربیت. ئەو خالێن دکەڤنە سەر هێلا سنووری چ دنوێنن؟

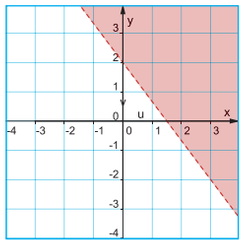
ج **دێ چ بیت هەکەر ...** وەسا دانە کو لەزا پاپورێ ل درژیا گەشتێ ژ 10 گرێیان کێمتر نەبیت. دووریا پاپوورێ ژ بەندەری پشتی بۆرینا 12 دەمژمێران ژ دەرکەفتنا وێ چەندە؟

لاسەنگەیەکا هێلی ب دوو نەزانراوان بنقیسە، ب مەرجەکی وێنەیێ روونکرنێ ل خوارێ شیکارا وێ بنوێنت:

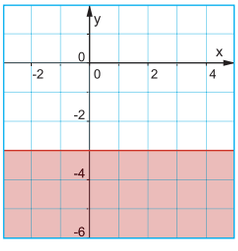
38



39



40



41 **هزرکرنا رەخنەگر:** بەراوردیێ بکە لناڤبەرا شیکارێ ب وێنەیێ روونکرنێ بۆ لاسەنگەیا $x + 90 < 30y$ و شیکارێ ب وێنەیێ روونکرنێ بۆ لاسەنگەیا $30y + x < 90$ ب چ دهاوشێوەنە؟ و ب چ د جیاوازن؟

42 **مالّداری:** دلسۆز باهیڤ و مێویژ بۆ دروستکرنا تێکەلەکی پر ریشال بکاردئینت. هەر گەرامەکا باهیڤێ $0.115g$ ژ ریشالی تێدا هەنە، و هەر گەرامەکا مێویژێ $0.095g$ ژ ڕیشالی تێدا هەنە. دلسۆزی دڤێت تیکەلەکی 5g ژ ڕیشالی ب کێماسی دروستبکەت.

أ هێمایێ (x) بۆ ژمارا گرامێن باهیڤێ و (y) بۆ ژمارا گرامێن مێویژێ دانە. لاسەنگەیەکا هێلی بۆ نواندنا پرسیارێ بنقیسە، پاشی لاسەنگێ ب وێنەیێ روونکرنێ شیکاربکە.

ب هەکەر دلسۆز $15g$ باهیف بکاربینت، دڤێت ئەو چەند گەرامێن مێویژان بکاربینت دا ئارمانجێ خۆ بجهبینت؟

ج **دێ چ بیت هەکەر ...** وەسا دانە کو دلسۆزی $60g$ باهیف بکارئینان، دێ چ ئەنجام دەت دەربارەی بهایێ y د لاسەنگەییێ دا؟ دڤێ پرسیارێ دا ئەڤە چ دگەهینت؟

43 یانەیا هاوکاری ئاهەنگەکا ئیڤاری ل هۆلا ئاهەنگا ل داردا، ب رێزکرنا هندەك مێزەییێن بازنەیی و هندەکی لاکێشەی. هەکەر کو یا دشیاندابیت 8 کورسییان ل دۆر هەر مێزەکی بازنەی و 6 کورسییان ل دۆر هەر مێزەکی لاکێشەی دانن.
هێمایێ x بۆ ژمارا مێزەییێن بازنەیی و y بۆ ژمارا مێزەییێن لاکێشەی دانە.

أ لاسەنگەیەکا بازنەیی بۆ نواندنا پرسیارێ بنڤیسە هەکەر ژمارا کورسییێن داخوازکری نە کێمتر بیت ژ 220 کورسییان، پاشی لاسەنگێ ب وێنەییێ ڕوونکرنێ شیکاربکە.

ب بارودۆخێ ئێمناهییێ وەسا دخوازیت کو ژمارا کورسییان نە زێدەتر بیت ژ 300 کورسییان، لاسەنگەیەکێ بۆ نواندنا ڤی مەرجی بنڤیسە، پاشی ب وێنەییێ ڕوونکرنێ شیکاربکە.

ج بەراوردییێ بکە لناڤبەرا هەردوو وێنەییێن ڕوونکرنێ. ب چ دجیاوازن؟

ئامادەکرن بۆ ئەزموونێ

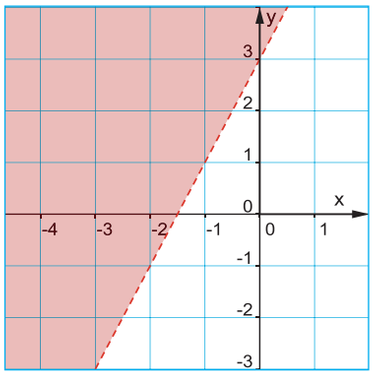
44 کیژ لاسەنگە وێنەییێ ڕوونکرنێ یێ بەرامبەر دنوێنت؟

أ $y < 2x + 3$

ب $4x - 2y < -6$

ج $y \geq 2x + 3$

د $4x + 2y > 6$



45 کیژ خال ناکەڤتە دناڤ دەڤەرا شیکارا لاسەنگەیا $5x - 3y < 30$ دا

أ $(0,0)$

ب $(3,-5)$

ج $(-5,3)$

د $(-3,5)$

46 کیژ لاسەنگەیا هاوتایە دگەل لاسەنگەیا $7x - 3y \geq 4$ ؟ [ئانکو هەمان دەڤەرا شیکارێ هەنە].

أ $y \leq \frac{7}{3}x - \frac{4}{3}$

ب $y \leq -\frac{7}{3}x + \frac{4}{3}$

ج $y \geq -\frac{7}{3}x - \frac{4}{3}$

د $y \geq \frac{7}{3}x + \frac{4}{3}$

47 کیژ هەردوو خال هەردوو ئێکودووبڕینێن ئاسۆیی و ستوونێ یێ هێلا سنووری بۆ لاسەنگەیا $y \leq 3x - 9$ دنوێنن؟

أ $(0,9)$ و $(3,0)$

ب $(0,3)$ و $(-9,0)$

ج $(0,9)$ و $(-3,0)$

د $(0,-9)$ و $(3,0)$

48 بۆ ڕاوەستاندنا ترومبێلێ ل جهێ تایبەت ل دەمێ 8 خۆلەکان پێدڤی ب پارچە دراڤەکی ژ جۆرێ 250 دیناری هەیە و ل دەمێ 20 خولەکان پێدڤی ب پارچە دراڤەکی ژ جۆرێ 500 دیناری هەیە. پترترین دەم بۆ ڕاوەستاندنا ترومبێلێ 3 دەمژمێرن. شڤانی ترومبێلا خو ڕاوەستاندن و دیت ژمێرکاریێ ویستگەهێ 37 خۆلەك بۆ وی هێلان. دڤێت ئەو چەند پارچەیان ژ هەردوو جۆران بکاربینت بۆ ڕاوەستاندنا ترومبێلا خو بۆ دەمێ 3 دەمژمێران؟

أ 3 پارچەییێن ژ جورێ 250 دیناری و 9 پارچە ژ جۆری 500 دیناری.

ب 13 پارچەییێن ژ جورێ 250 دیناری و دوو پارچەییێن ژ جوری 500 دیناری.

ج 8 پارچەییێن ژ جورێ 250 دیناری و 5 پارچەی 500 دیناری.

د 5 پارچەییێن ژ جورێ 250 دیناری و 5 پارچەی 500 دیناری.

49 **بەرسڤا کۆرت:** بەحسێ حالەتەکی بکە لاسەنگەییێن هێلی بخۆڤە بگرت، و تێدا بهاییێن سالب (نێگەتیڤ) بۆ نەزانراوێ x یان نەزانراوێ y رامان هەبیت.

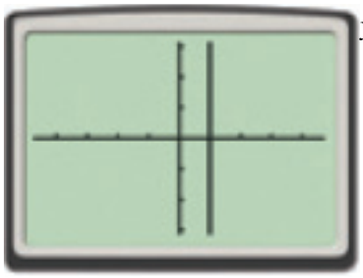
بەرهنگاری و بەرفرەهکرن

هەر لاسەنگەیەکا ل خوارێ ب ڤێنەیێ ڕوونکرنێ شیکاربکە:

50 $4(4x-3y)<5(2+3x)-10y$

51 $\frac{4+3y-2x}{6} \geq \frac{3x-2-3y}{-4}$

52 **دێ چ بیت هەکەر ...** وەسا دانە کو تە لاسەنگەیەکا هیلی بکارئینانا بژمێرا ڕوونکرنێ شیکارکرییە، و شاشەکا سیبەرکری ب تەمامی بدەست تە کەفتییە. ئەڤە سەبارەت لاسەنگێ چ دنوێنت؟ دێ چ کەی بۆ دیارکرنا دەڤەرا شیکارێ؟



53 پشتی دروستکرنا ڤێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ راستەهێلێ $y=500(x-1)$ بکارئینانا پەنجەرەیاZdecimal ڤێنەیێ بەرامبەر لسەر شاشا بژمێرا ڕوونکرنێ دیاربوو.

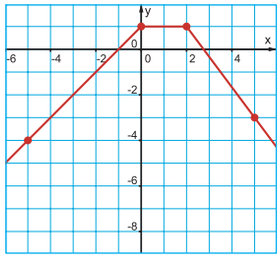
أ ئەرێ ڕاستەهێل ب دروستی ستوونە؟ ئەڤێ ڕوونبکە.

ب کێژ لایێ راستەهێلی دی ڕەنگکەی ژ بۆ شیکارکرنا لاسەنگەیا $y \leq 500(x-1)$ بەلگەیێ بەرسڤا خو دیاربکە.

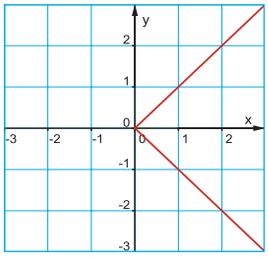
پێداچوونا لوولپێچی

تاقیکرنا راستەهێلی ستوون بکاربینە دا دیاربکەی ئەرێ ڤێنەیێ ڕوونکرنێ نەخشەیەکێ دنوێنت یان نە [(پۆلێن پێشتر)

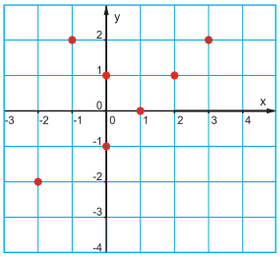
54



55



56



هەردوو پۆتانێن ڤێنەیێ خالا $(-4,3)$ ب هەموو جهگۆهۆرکێن ل خوارێ بنڤیسە:-

57 ڕاکێشانا ئاسۆیی ب یەکەیەکێ بۆ لایێ راستێ.

58 ڤێنەدانەوە ل دۆر تەوەرێ دووێ.

59 راکێشانا ستوونی ب 3 یەکەیان بۆ سەری.

60 $(x+7,y-5)$

لسەر شێوەیێ لاری - ئێکودووبرینێ، هاوکێشەیا وی راستەهێلی د خالا $(-7,1)$ را دبۆرت و:.

61 د خالا $(3,1)$ رادبۆرت.

62 تەریب بیت ل گەل ڕاستەهێلێ $y=\frac{1}{2}x-5$.

63 لارێ وی 0.25 بیت.

64 ستوون بیت ل گەل ڕاستەهێلێ $3x-y=-4$.

2-2

مۆدێلێن هێلی

Linear models

ئارمانج

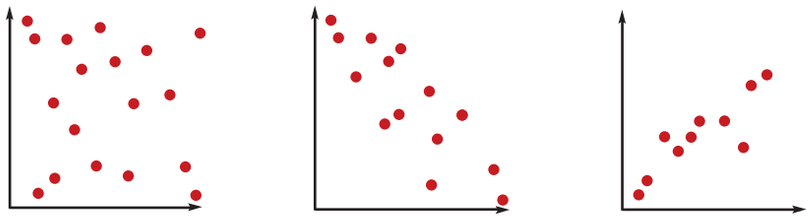
- دیارکرنا ساملەکی هێلی بۆ نواندنا پێداییان بکارئینانا تەکنۆلوژیا یان بێی بکارئینانا وێ.
- ساملێن هێلی بۆ ئەنجامدانا پێشبینیان بکاردئینن.

کێ ئەڤێ بکاردئینت؟

زانایێن رەگەزێن مرۆڤان ساملێن هێلی بکاردئینن بۆ خەملاندنا درێژییێن تاکە کەسێن ملەتێن کەڤن، و ئەوێ ئەنجام ددەن ب هۆیێ ئەوان پەیکەرێن هەستیکێن مرۆڤان ئەوێن دبینن.

گەلەك جاران زانایێن رەگەزێن مرۆڤان، گرنگیێ ب وان پەیوەندییان ددەن، ئەوێن دوو جۆرێن پیڤانان پێکڤە گرێددەن. ئامار ناس ل لێکۆلین. و ئامارێن خودا دبێژنە پەیوەندییا لناڤبەرا دوو گۆڕاوان **لێژەبوون Regression** .

خالێن روونکرنێ بکاردئینن بۆ هەولدانا تێگەهشتنا شێوەیێ پەیوەندییا لناڤبەرا دوو گۆڕاوان و ئاراستەیێ وێ ، ڕادێ هێزا وێ پەیوەندیێ. **پەیوەست** (پێکڤە گرێدان) **Correlation** ئەو هێزا پەیوەندییا هێلییە لناڤبەرا دوو گۆڕاوان و ئاراستەیێ وێیە.



هەکەر دوو گۆڕاو ب پەیوەندییەکا هێلی یا بهێز پێکڤە بێنە گرێدان، چێدبیت **ڕاستەهێلێ باشترین نواندن Line of best fit** بکاربینن بۆ ئەنجامدانا پێشبینیان.

زاراڤ
Vocabulary

لێژەبوون
Regression

پێکڤە گرێدان
Correlation

هێلی باشترین نواندن
Line of best fit

هاوکۆلکێ پەیوەستێ [پێکڤە گرێدانی]
Correlation coefficient

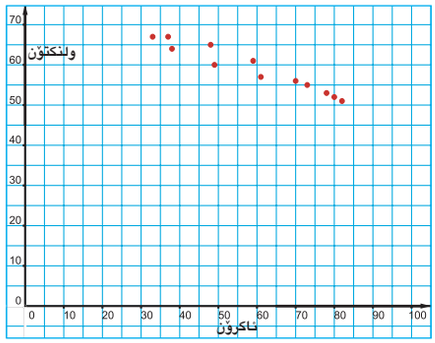
نموونـــــه 1 بجهئینان لسەر کەش و هەوایی

باژێرێ ئاکرۆن ل ئەمریکا و باژێرێ لنگتۆن ل نیوزیلەندا دکەڤنە سەر هەمان دووریێ ژ هێلا کەمەر بەندێ (خط الإستواء). یێ ئێکێ ل نیڤا باکووریێ گۆیا ئەردییە و یێ دووێ ل نیڤا باشووری گۆیا ئەردییە. خشتەیێ ل خوارێ تێکرایێن ژمارەی بۆ پلەیا گەرماتیێ ل هەر دوو باژێران ل دەمێ 12 مەهان دنوێنت. خالێن روونکرنێ بۆ پێداییێن خشتەی دیاربکە. پێکڤە گرێدانێ لناڤبەرا هەردوو کۆمەلێن پێداییان دیاربکە. ڕاستەهێلی باشترین نواندن بکێشە و هاوکێشەیا وی دیاربکە:

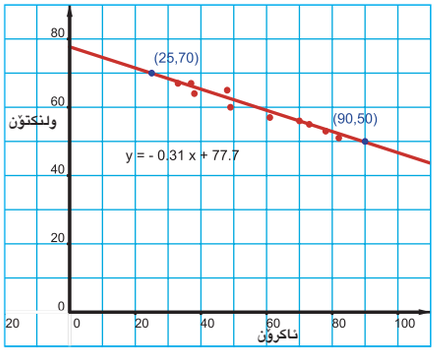
تێکرایێن ژمارەی بۆ بلندترین پلەیێن گەرماتیێ(ب پلەیێن فهرنهایت)												
مەهـ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ئاکرۆن	33	37	48	59	70	78	82	80	73	61	49	38
لنگتۆن	67	67	65	61	56	53	51	52	55	57	60	64

پێنگاڤا (1) ئ: پێدایێن خشتێ ب خالێن ڕوونکرنێ بنوێنە.

پێنگاڤا (2) ئ: ل دویڤ پەیوەستێ بگەڕە. بەرێ خۆ بدێ پەیوەستێ سالب هەیە لناڤبەرا پێدایێن هەردوو کۆمەلان، دەمێ پلەیا گەرماتیێ ل باژێرێ ئاکرۆن بلند دبیت ل باژێرێ لنگتۆن نزم دبیت.



پێنگاڤا (3) ئ: راستەهێلی باشترین نواندن بکێشە. راستەهێلەکی بکێشە کو وان خالان دابەشبکەت بۆ دوو بەشێن یەکسان ل ژێریا وی و ل ژۆریا وی.



پێنگاڤا (4) ئ: دوو خالان دیاربکە کو بکەڤنە سەر وی راستەهێلی. تو دشێی هەردوو خالان (70، 25) و (50، 90) هەلبژێری.

پێنگاڤا (5) ئ: لارێ وی راستەهێلی بهەژمێرە

$$m=\frac{70-50}{25-90}=\frac{20}{-65}\approx -0.31$$

$$y-y_1=m\left(x-x_1\right)$$

$$y-70=-0.31\left(x-25\right)$$

$$y=-0.31x+77.7$$

شێوەیێ لاری – خالەك بکاربینە بۆ دیارکرنا هاوکێشێ دبیتە $y=-0.31x+77.7$

ڕۆناهیەك

هەوڵبدە ژمارا خالێن ڕوونکرنێ ل لایێ سەری یێ راستەهێلی باشترین نواندن هندی خالێن ڕوونکرنێ بن ل رەخێ ژێرەیێ وی.

خالا چاڤدێریێ

1. **تەپا سەبەتێ:** بۆ نواندنا پێدایێن خشتەیێ خالێن ڕوونکرنێ دیاربکە. پێکڤە گرێدانێ لناڤبەرا پێدایێن هەر دوو کۆمەلان دیاربکە، راستەهێلێ باشترین نواندن بکێشە و هاوکێشەیا وی بهەژمێرە.

ئەنجامێن دەھ یاریان										
دەم (m)	28	35	8	20	39	23	19	27	15	30
خالە	16	13	2	12	31	10	9	15	4	19

هاوکۆلکێ پێکڤە گرێدانێ: Correlation coefficient ئەو ژمارە (r)ە، رادێ دروستیا نواندنا سامپلێ هێلی بۆ کۆمەلەکا پێداییان دپێڤیت.

فێربە و ژبەربکە

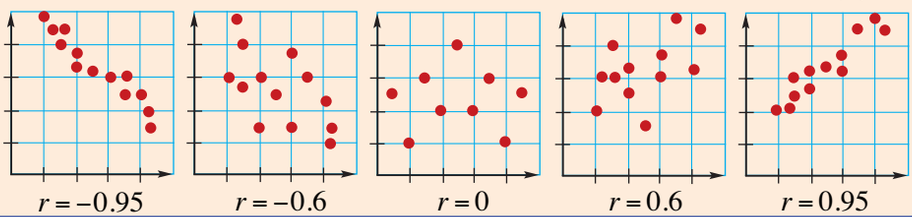
سیڤەتێن هاوکۆلکێ پێکڤەگرێدایی

هاوکولکێ پێکڤەگرێدانێ ژمارەکا دماوەیێ $[-1\ ,1]$ دا. ئانکو $-1\le r\le 1$

هەکەر $r=1$ ، ئەو خالێن ڕوونکرنێ ئەوێن پێدایێن کۆمەلّێ دنوێنن، ڕاستەهێلەکی خودان لارێ موجەب پێکدئینن.

هەکەر $r=0$ هیچ پێکڤە گرێدانەك لناڤبەرا هەردوو گۆراوان نینە.

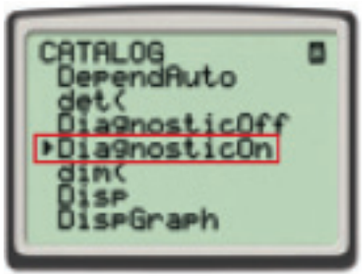
هەکەر $r=-1$ ئەو خالێن ڕوونکرنێ ئەوێن پێدایێن کۆمەلّی دنوێنن، ڕاستەهێلەکی خودان لارێ سالب پێکدئینن.



ئاگەهداریە!

لاری و بەهایێ r تێکەل نەکە، چێدبیت لارێ ڕاستەهێلی 10 یان $\frac{1}{10}$ بیت و $r=1$ لێ دڤێت لاری و بەهایێ r هەمان نیشان هەبن.

تو دشێی بژمێرا رووونکرنێ بکاربینی بۆ دیارکرنا ڕاستەهێلێ باشترین نواندن و بۆ هەژمارتنا هاوکۆلکێ پێکهەگریدانێ. بۆ بدەستکەفتنا هاوکۆلکێ پێکهەگریدانێ دقێت بژمێرێ ل بارێ نیاسینێ دانێ، ژ بۆ بگەهیە ئەڤی بارەی، 2nd کلیك بکە پاشی CATALOG 0 کلیك بکە پاشی **DiagnosticOn** هەلبژێرە.

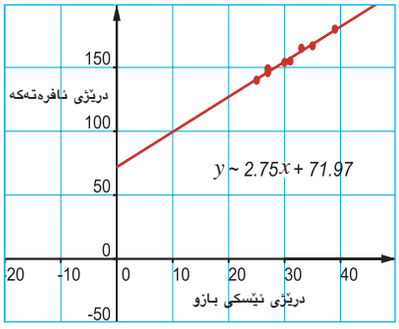


نموونـــــە 2 بجهئینان لسەر زانستێ ڕەگەزێن مرۆڤان

زانایێن رەگەزێن مرۆڤان دریژیا هەستیێ باسکی [ئەوێ ناڤبەرا ملێ مرۆڤێ و ئەنیشکێ دگەهینت] بکاردئینن لنك ئاڤرەتان بۆ دیارکرنا دریژیا وێ. خشتێ ل خوارێ هندەك نمونەیان دیاردکەت.

دریژیا هەستیێ باسکی لنك ئافرەتێ								
دریژیا هەستیێ باسکی (cm)	35	27	33	25	39	27	31	
دریژیا ئافرەتێ (cm)	167	146	154	165	140	180	149	155

أ **خالێن رووونکرنێ بۆ نواندنا پێدایێن خشتەی دیاربکە. دریژیا هەستیێ باسکی وەك گوڕاوێ ئازاد بکاربینە.**

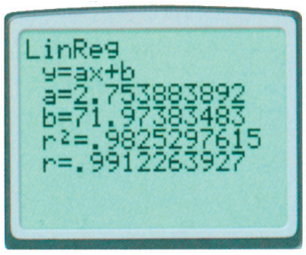


ب **هاوکۆلکێ پێکهە گرێدانێ و هاوکێشا ڕاستەهێلی باشترین نواندن بهەژمێرە. ل دویڤ پێدایێن پرسیارێ لارێ وی ڕاستەهێلی چ دگەهینت؟**

بژمێرا ڕوونکرنێ بکاربینە، پێدایێن دریژیا هەستیێ باسکی ل لیستا $L1$ بینە خوارێ، پاشی پێدایێن دریژیا ئافرەتێ ل لیستا $L2$ بینە خوارێ.

سیفەتا لێژەبوونا هێلی دبژمێریدا بکاربینە کلیك بکە

STAT پاشی بۆ **CALC** پاشی **4:LinReg**



هەلبژێرە. بژمێر ئەڤێ هاوکێشەیێ $y = 2.75x + 71.97$ دێ دیارکەت. لارێ ڕاستەهێلی باشترین نواندن یەکسانە 2.75 ب نێزیکی. ئەو لاریە ئەڤا ل خوارێ دگەهینیت هەر زێدەیەك ب $1cm$ ل دریژیا هەستیێ باسکێ ئافرەتێ بەرامبەری وێ $2.75cm$ ل دریژیا ئافرەتێ دبیت. هەروەسا بژمێر هاوکۆلکێ پێکهەگرێدانێ دیاردکەت، کو ئەو دبیتە $r \simeq 0.991$ نێزیکی، ئەڤە ئاماژەیە بۆ پێکهەگرێدانەکا مووجەب یا ب هێز.

ج **ل گۆرستانەکا ب کۆمەڵی یا کوردێن ئەنفالکرییّن عیراقێ زانایەکی ڕەگەزین مرۆڤان هەستیەکی باسکی دیت دریژیا وی $32cm$ بوو. دریژیا خودانێ وی ب چەندێ دخەملینی؟**

هاوکێشا ڕاستەهێلی باشترین نواندن، ڕێیا خەملاندن دریێا خودانێ هەستی دیاردکەت.

$$y = 2.75x + 71.97$$
$$y = 2.75 \times 32 + 71.97$$
$$y = 159.97$$

دریژیا وێ ئافرەتێ $160cm$ بنێزکی

ڕۆناهیەك

بۆ تۆمارکرنا پێدایێن دبژمێرا ڕوونکرنێ دا، Stat کلیك بکە 1:Edit هەلبژێرە. بەهایێن x ل ستوونا $L1$ تۆماربکە و بەهایێن y ل ستوونا $L2$ تۆماربکە.

خالا چاڤدێریێ

2. خشتێ ل خوارێ پێدایێن وان ترومبێلێن ب غازێ کاردکەن و ب هەرەمەکی هاتینە هەلبژارتن دیاردکەت. خشتە هێزا هەر ترومبێلەکی ب (هەسپان) و ئەو دووریا ب لیترەکا غازێ دبڕت دنوێنت.

هێزا ترومبێلان و ئەو دووریا ب هەر لیترەکا غازێ دبڕت										
هێز (ب هەسپان)	175	255	140	165	115	120	190	180	110	125
دووریا ب هەر لیترەکێ غازێ بڕی	3.61	2.13	4.1	2.95	5.25	4.6	2.46	3.45	5.75	4.92

أ خالێن روونکرنێ بۆ نواندنا پێدایێن خشتەی دیاربکە. بکاربرنێ وەک گۆڕاوێ ئازاد بکاربینە.

ب هاوکۆلکێ پیکڤەگردانێ و هاوکێشا راستەهێلی باشترین نواندن بهەژمێرە. ئەڤ راستەهێلە چ دگەهینت؟

ج ترومبێلەک هێزا بزوینەرێ وێ (محرکها) 210 هەسپە، ئەو دووریا ب هەر لیترەکا غازێ دبڕت دیاربکە.

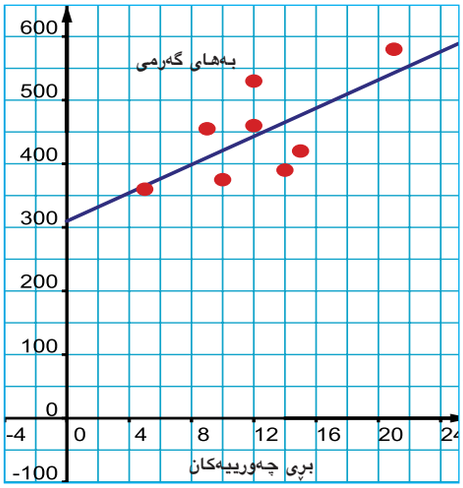
نموونـــــه 3 بجهێنان لسەر خوارنێ

خشتێ ل خوارێ پێدایێن لسەر برێ دوهنی (ڕووینی) د جۆرەکی خوارنێ دا و بەهایێ گەرماتیا ئەو ددەت دنوێنت.

پێدایی بۆ هندەک جۆرێن خوارنێ								
برێ دوهنی (رووین) (g)	5	9	12	15	12	10	21	14
بهایێ گەرماتیێ (ب گەرمۆکان)	360	455	460	420	530	375	580	390

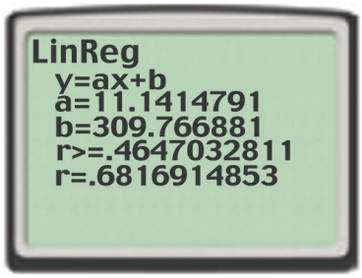
أ **خالێن روونکرنێ بۆ نواندنا پێدایێن خشتەکی دیاربکە. برێ دوهنی وەک گۆڕاوێ سەربەخۆ (ئازاد) بکاربینە.**

ب **هاوکۆلکێ پێکڤەگریدانێ و هاوکێشەیا راستەهێلی باشترین نواندن بهەژمێرە. وێنەیێ ڤی راستەهێلی بکێشە. هاوکۆلکێ پێکڤەگریدانێ دبیتە $r=0.682$ ب نێزیکی. هاوکێشەیا راستەهێلی باشترین نواندن دبیتە $y=11.1x+309.8$، گۆڕاوێ پەیوەست (تابع) ژمارا گەرمۆکایە.**



ج **برێ دوهنی د جۆرەکی خوارنێدا بخەملینە هەکەر برێ گەرماتیا وێ 500 گەرمۆک بیت، دروستیا خەملاندنا تە چەندە؟** $500=11.1x+309.8$

$190.2=11.1x \Rightarrow x\approx 17.1$



راستەهێلێ باشترین نواندن دیاردکەت کو برێ دوهنی د جۆرەکی خوارنێدا کو بەهایێ گەرماتیا وی 500 گەرمۆک دبیتە 17.1g بنێزیکی. لێ خالێن روونکرنێ و بەهایێ هاوکۆلکێ پێکڤەگرێدانێ وەسا دیاردکەن کو برێ دوهنی نا نیشاندەرەکی باشە دڤی جۆرێ خوارنێدا.

ڕۆشنایی

هەندێ جار بە ڕاستەهێلێ باشترین نواندن دەگوترێ هێلێ ڕوولێکردن.

خالا چاڤدێریێ

3. دێ چ بیت هەکەر ...؟ هاوکێشەیا ڕاستەهێلێ باشترین نواندن بکاربینە بۆ خەملاندنا برێ دوهنی د جۆرەکی خوارنێدا کو بەهایێ گەرماتیا وی 420 گەرمۆک بیت؟ ئەو بهایێ بدەست تە کەفتی ب چەندێ یی دووره ژ وی بهایێ بەرامبەری 420 گەرمۆکان دخشتەییدا؟

هزربکه و گەنگەشێ بکه

1. ڕوونبکه ئەرێ هاوکۆڵکێ پێکڤەگرێدانێ لناڤبەرا هەردوو گۆڕاوان یێ مووجەبە یان یێ سالبە هەکەر هاوکێشا راستەهێلی باشترین نواندن $y = 3.2x - 12.5$ بیت.
2. ئەڤێ رووبکه، ئەرێ ڤان هەردوو هاوکۆلکێن پێکڤەگرێدانێ $r = 0.65$ ؛ $r = -0.75$ بهێزترین پێکڤەگرێدان لناڤبەرا دوو گۆڕاوان دەردبڕێت؟ بەلگەیەکێ بۆ بەرسڤا خو بینه.
3. ڕێکخەر بە، ڤی خشتەیێ ل خوارێ کۆپیبکه و تەمامبکه.

فێربە و هزربکه

پێکڤەگرێدان	خالێن ڕوونکرنێ	بهایێ خەملاندی بۆ هاوکولکێ پێکڤەگرێدانێ
ب هێز و مووجەب		
لاواز و مووجەب		
نینه		
لاواز و سالب		
ب هێز و سالب		

2-2 ڕاهێنان

ڕاهێنانێن ئاراستەکری

1 **زاراڤ** هەر هاوکۆلکەکی پێکڤەگرێدانێ لناڤبەرا دوو کۆمەلێن پێداییان چ دگەهینت؟ رووبکه:

أ $r = 0.4$ ب $r = -0.96$ ج $r = -0.02$

بۆ خۆ بدە نمونە 1

2 **ترومبێل:** خالێن روونکرنێ بۆ پێداییێن خشتێ ل خوارێ دیاربکه. ژمارا گالۆنان وەك گۆڕاوێ سەربەخۆ بکاربینه، ل دووڤ پێکڤەگرێدانێ بگەرە. وێنەیێ راستەهێلی باشترین نواندن بکێشه و هاوکێشەیا وی دیاربکه.

دووریا بڕی							
ژمارا گالۆنان	11.2	9.8	10.6	10.1	12.3	8.7	10.1
دووریا بڕی (km)	338	296	332	324	368	263	305

بۆ خۆ بدە نمونە 2

3 **مالداری:** خشتەیێ ل خوارێ پێداییان لسەر ناڤەندێ ژمارەی یێ پلەیا گەرمێ ل دەمێ حەفت مەهان و بهایێ پسوولا تەزیکرنێ ل مالا ئالان دیاردکەت:

پسوولا تەزیکرنێ ل مالا ئالان							
ناڤەندێ پلەیێن گەرمیێ	38	42	44	36	42	49	38
پسوولا بهای	93 000	79 000	75 000	83 000	74 000	67 000	86 000

أ خالێن روونکرنێ بۆ نواندنا پێداییێن خشتەی دیاربکه، ناڤەندێ پلەیا گەرمیێ وەك گۆڕاوێ ئازاد بکاربینه.

ب هاوکۆلکێ پێکڤەگرێدانی و هاوکێشەیا راستەهێلێ باشترین نواندن بهەژمێرە. وێنەیێ ڤی راستەهێل بکێشه.

ج پسوولا بهایێ تەزیکرنێ بۆ وێ مەها ناڤەندێ پلەیا گەرمییا وێ 40 پلە بخەملینه. دروستیا وێ خەملاندنێ چەندە؟

بەرێ خۆ بدە ئوونە 3

4 **قوتابخانە**: خشتەیێ لخوارێ پێداییان ژمارا ماموّستایان و ژمارا قوتابیان ل سامپلەکی هەرەمەکی ژ قوتابخانان دیاردکەت.

ژمارا ماموستایان و ژمارا قوتابیان								
ژمارا ماموستایان	92	52	114	49	110	62	76	84
ژمارا قوتابیان	1050	653	753	381	1312	813	496	910

أ خالێن روونکرنێ بۆ نواندنا پێداییێن خشتێ دانە، ژمارا ماموستایان وەك گۆڕاوی ئازاد بکاربینە.

ب هاوکۆلکێ پێکڤەگرێدانێ و هاوکێشەیا راستەهێلی باشترین نواندنا بهەژمێرە. وێنەیێ ئەوی راستەهێلی بکێشە.

ج ژمارا ماموستایان ل قوتابخانێ بخەملینە هەکەر 600 قوتابی تێدا هەبن. دروستیا قێ خەملاندنێ چەندە؟

راهێنان و شیکارکرنا پرسیاران

5 **کیمیا**: خالێن روونکرنێ بۆ نواندنا پێداییان خشتەیێ ل خوارێ دیاربکە بکارئینانا گەردیلە ژمارە وەك گۆڕاوێ ئازاد.

هندەك توخمێن کیمیایی														
گەردیلە ژمارە	89	13	95	51	122	243	40	75	33	85	56	137	247	97	9	4	83	209	264	107	5	35
بارستایێ گەردیلەیێ	227	27	243	122	51	95	18	33	75	210	137	56	97	247	9	4	83	209	264	107	11	80

ڕاهێنانێن ئازاد	
بۆ شیکارکرنا بەرێ خو بدە راهێنانان	نموونە
5	1
6	2
7	3

6 **زیندەزانی**: ناڤەندێ لێکدانێن هەر دوو چەنگێن بالندەیێ (الطنان) زێدەترە ژ وی ناڤەندێ لنك بالندەیێن دی. خشتەیێ لخوارێ پێداییێن ئەڤی ناڤەندی و بارستایی لنك ژمارەکا بالندان ژ ڤی جۆری دیاردکەت.

لێکدانێن هەردوو چەنگێن بالندەیێ (الطنان)							
بارستا (g)	3.1	2.0	3.2	4.0	3.7	1.9	4.5
ناڤەندێ لێکدانان (چرکە)	60	85	50	45	55	90	40

أ خالێن روونکرنێ بۆ نواندنا پێداییێن خشتەی دانە. بارستایێ وەك گۆڕاوی ئازاد بکاربینە.

ب هاوکولکێ پێکڤەگرێدانێ و هاوکێشەیا راستەهێلێ باشترین نواندن بهەژمێرە، وێنەیێ ئەوی ڕاستەهێلی بکێشە.

ج ناڤەندێ لێکدانێن هەردوو چەنگێن بالندەیەکی ژ ڤی جۆری کو بارستایێ وی 19 g بیت بخەملینە. دروستیا ڤێ خەملاندنێ چەندە؟

7 **نرخاندنا پلیّتان**: ڕێڤەبەرێ تیمەکا موزیکێ نرخێن پلێتێن چوّنا ژوّری بۆ ئاهەنگێن تیمێ و ژمارا ئامادەبووان تۆمارکرن.

ئامادەبوون ل دویڤ نرخێن پلێتێن چوّنە ژوّری									
نرخ	6000	5000	8500	8000	10000	5500	7000	7500	8000
ئامادەبوون	213	256	155	194	160	267	258	210	235

أ خالێن ڕوونکرنێ بۆ نواندنا پێداییێن خشتەی دانە. نرخی وەك گۆڕاوێ سەربەخو بکاربینە.

ب هاوکولکێ پێکڤەگرێدانێ و هاوکێشەیا راستەهێلێ باشترین نواندن بهەژمێرە، وێنەیێ ئەوی راستەهێلی بکێشە.

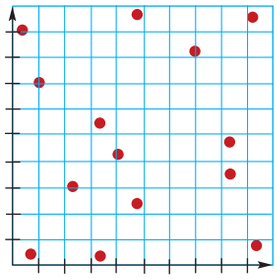
ج ژمارا ئامادەبووان ل ئاهەنگەکێ نرخێ پلێتا چوّنا ژوّرا وێ 9000 دینار بیت بخەملینە. دروستیا وێ خەملاندنێ چەندە؟

8 خالێن رووڕکرنێ بۆ نواندنا پێدایێن خشتەی دانە، هاوکێشەیا راستەهێلێ باشترین نواندن بخەملینە.

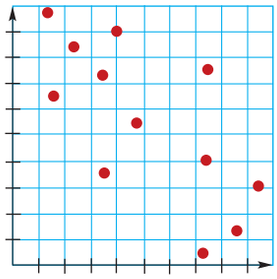
x	2	8	15	21	24	30	33	37
y	71	63	64	194	160	267	258	210

خەملاندن: هاوکولکێ پێکڤەگرێدانێ ل هەر بارەکی بخەملینە.

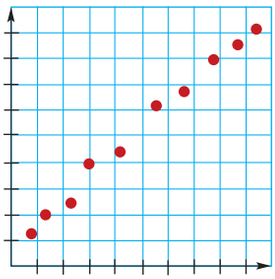
9



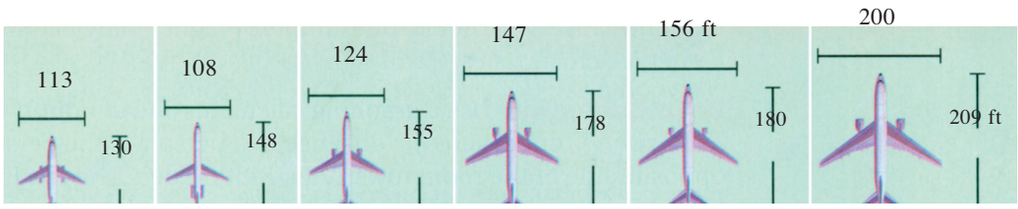
10



11



12 **فرین:** خشتەیێ ل خوارێ درێژیا ژمارەکا مرۆڤان و پانییا هەردوو چەنگێن وان دیاردکەت. خالێن رووڕکرنێ بۆ نواندنا پێدایێن خشتەی دانە، درێژیێ وەك گۆراوێ سەربەخو بکاربینە. وێنەیێ ڕاستەهێلێ باشترین نواندن بکێشە و هاوکێشەیا وی بهەژمێرە.



13 خشتەی بەرامبەر نمرەیێن دەھ قوتابیێن ئێکی ل ئەزموونا بیرکاریێ دیاردکەت.

نمرەیێن قوتابییێن ئێکێ ل بیرکاریێ			
بنکە	نمرە	بنکە	نمرە
1	95	6	90
2	93	7	89
3	92	8	87
4	91	9	86
5	90	10	85

أ کیژ هاوکێشە بۆ هەژمارتنا نمرەیێ بکاردهێت.

ب زانینا بنگەهی؟

ب وەسا دانە کو ماموستایێ بیرکاریێ 5 نمرە بۆ هەر نمرەیەکێ زێدەکرن. کارتێکرنا ئەوێ لسەر هاوکێشێ و لسەر وێنەیێ وێ یێ ڕووڕکرنێ چییە؟

14 **وەرزش:** خشتێ ل خوارێ پێداییان لسەر لەزا ژمارەکا غار کەران و ژمارا پێنگاڤێن وان د چرکەکێدا دیاردکەت.

ژمارا پێنگاڤان د چرکەکێدا ولەز							
لەز (پی / چرکە)	15.86	16.88	17.5	18.62	19.97	21.06	22.11
ژمارا پێنگاڤان د چرکەکێدا	3.05	3.12	3.17	3.25	3.36	3.46	3.55

أ خالێن رووڕکرنێ بۆ نواندنا پێدایێن خشتەی دیاربکە، بکارئینانا لەزێ وەك گۆراوێ سەربەخو. ب هاوکولکێ پێکڤەگرێدانێ و هاوکێشەیا راستەهێلێ باشترین نواندن بهەژمێرە. پاشی وێنەیێ وی بکێشە. ج هاوکێشەیا راستەهێلی باشترین نواندن بکاربینە بۆ خەملاندنا ژمارا پێنگاڤێن غارکەرەکی لەزا وی 18 پی دچرکەکێدا. دروستیا وێ خەملاندنێ چەندە؟ ڕوونبکە.

15 **بەردین زانێ گیانداران** (زانستەکە قەکولینێ لسەر شێوەیێن ژیانێ دکەت، وەك بەردبوونا گیاندار و رووەکان)، خشتێ ل خوارێ درێژیا هەستیێ رانی و درێژیا هەستیێ باسکی دنوێنت بۆ پێنج سامپلێن بەردبوونا ئەرکیوپیتریکس، کو ئەو گیاندارەکا ژ ناڤ چۆیا ئەوی شێوەیێ خشۆکان و سیڤەتێن وان هەیە، زانا وەسا ددانن کو ئەو ژ ئەلقەیێن ئێکێیە و بالندە ژ وێ پەیدابووینە.

درێژیا هەستیێ رانی و هەستیێ باسکی					
درێژیا هەستیێ رانی (cm)	38	56	59	64	74
درێژیا هەستیێ باسکی (cm)	41	63	70	72	84

أ خالێن روونکرنێ بۆ نواندنا پێدایێن خشتەی دیاربکە، درێژیا هەستیێ ڕانی وەك گۆراوێ سەربەخو بکاربینە. هاوکۆلکێ پێکڤەگرێدانێ و هاوکێشا راستەهێلی بشترین نواندن بهەژمێرە، و وێنەیی بۆ وی راستەهێلی بکێشە.

ب لاری ئەوی راستەهێلێ تایبەت بۆ وی گیانداری چ دگەهینت؟

ج ئەو هاوکێشەیا تە دیارکری بکاربینە بۆ خەملاندنا درێژیا هەستیێ رانێ گیاندارەکی ژ وی جۆری، هەکەر درێژیا هەستیێ باسکێ وی $50cm$ بیت. دروستیا وێ خەملاندنێ چەندە؟

16 **هزرکرنا رەخنەگر:** دوو گۆڕاو هەنە بهایێن ئێکی ژ وانا بها یێن یێ دی دیار دکەت، ئەرێ رامانا وێ ئەوە کو پەیوەستیەکا ب هێز دناڤبەرا واندا هەیە؟ (بۆ نموونە: ئەرێ زێدەبوونا پێڤەدانێن میشێن هنگیڤینی دبیتە هویێ زێدە فرۆتنا بەفرێ)؟ روونبکە.

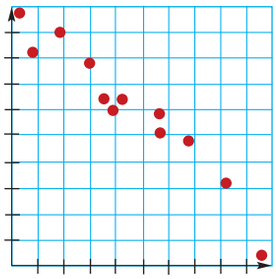
17 **بنڤیسە:** ب درێژی بەحسێ کردارا هەژمارتنا هاوکێشەیا ڕاستەهێلی باشترین نواندن بکە.

ئامادەکرن بۆ ئەزموونێ

18 هاوکێشەیا راستەهێلی باشترین نواندن بۆ کۆمەڵەکا پێداییان ئەڤەیە $y=1.05x-1.3$ کیژ ڤانێن ل خوارێ دبیتە هاوکولکێ پێکڤەگرێدانێ r ؟

أ $r=-1.3$ ب $r=-0.7$ ج $r=0.8$ د $r=1.05$

19 کیژ ئەڤێن ل خوارێ بەحسێ ئەوێ پێکڤەگرێدانێ دکەت ئەوا خالێن روونکرنا بەرامبەر دیاردکەت؟



أ ب هێز موجەب ج ب هێز سالب

ب لاواز موجەب د لاواز سالب

20 کیژ ڤانێن ل خوارێ هاوکولکێ پێکڤەگرێدانا لاوازا تایبەت ب ترومبێلێ هەیە؟

أ ژیێ ترومبێلێ و ژمارا وان کیلو مەترێن برێن.

ب ژیێ ترومبێلێ و نرخێ وێ ل دەمێ فرۆتنا وێ.

ج درێژی و پانیا ترومبێلێ.

د ژمارا وان کیلۆمەترین ل ناڤ باژێری برێن و ژمارا وان کیلۆمەترێن لسەر ڕێیا بلەز برێن.

بەرهنگاری و بەرفرەهکرن

ئەرێ پێدایێن خشتێ ب پەیوەندییەکا هێلی پێکهە دگرێدانینە؟ ئەرێ ئەو پێدانینە پێکهە دگرێدانینە؟ روونبکە.

21

x	2	7	13	15	22
y	4	4	4	4	4

22

x	35	45	55	65	75
y	30	34	36	34	30

23 هەردوو خشتەیێن ل خوارێ هندەك پێدایێن ئامار زانەیەکی نقیسین بخوّقەدگرن. ل هەر خشتەیەکی خالێن روونکرنێ بوّ نواندنا وی دیاربکە. و هاوکولکێ پێکهەگرێدانێ و هاوکێشەیا راستەهێلی باشترین خواندن بهەژمێرە. نواندنا پێداییان ب وێنەیێ روونکرنێ چ گرنگیێ ددەت بەری بکارئینانا سامپلێ هێلی بوّ ئەنجامدانا پێشبینیان؟

x	10	8	13	9	11	14	6	4	12	7	5
y	9.14	8.14	8.74	8.77	9.29	8.1	6.13	3.1	9.13	7.26	4.74

x	10	8	13	9	11	14	6	4	12	7	5
y	7.46	6.77	12.74	7.11	7.81	8.84	6.08	5.39	8.15	6.42	5.73

پێداچوونا لوولپێچی

هەر برەکی ب سادەترن شێوە بنقیسە (پولێن پێشتر)

24 $3\left(x^2-2\right)+4xy-10x^2y+5x^2$

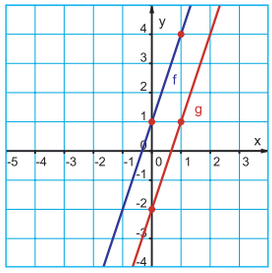
25 $-a^4+3ab+\left(2a^2\right)^2$

26 $-3g^2+3(g-4)-2\left(g-g^2\right)$

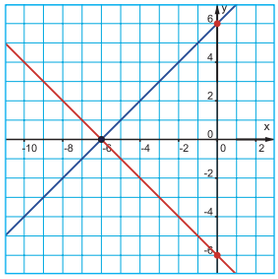
27 $n\left(4t^2-t\right)-10nt^2+nt$

هاوکێشەیا هەر نەخشەیەکا ب وێنەیێ روونکرنێ هاتیە نواندن بنقیسە. ئەو جهگوّهوّرکا $f(x)$ بوّ $g(x)$ دگوّهوّرت چییە؟ (پوّلێن پێشتر)

28



29



هەر لاسەنگەیەکێ ب وێنەیێ ڕوونکرنێ شیکاربکە. (پوّلێن پێشتر)

30 $3x<x-12$

31 $44+6x>-5x$

32 $-2(q-4)+3q\le 1+q$

3-2 سیستەمێن لاسەنگەیێن هێلی

System of Linear Inequalities

ئارمانج

شیکارکرنا سیستەمێن لاسەنگەیێن هیلی ب وێنەیێ ڕوونکرنێ

کێ ئەڤێ بکاردئینیت؟

دۆزەرڤانێن جەمسەرێ باشووری سیستەمێن لاسەنگەیێن هێلی بکاردئین بۆ دیارکرنا لەزا پێدڤی کو ئەو پێ ب ڕێڤەبچن، هەتا تووشی کەش و هەوایەکی بێزار نەبن (نموونەی 2).

زاراڤ
Vocabulary

سیستەمێن لاسەنگەیێن هیلی
System of linear inequalities

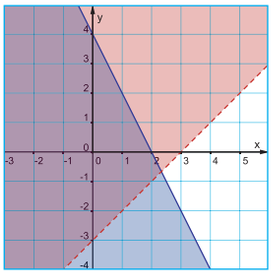
دەمێ دەربرینەکێ وەك «نەپترە ژ» د پرسیارەکێ دا بکاردئینن، تو دشێی ئەوی بارەی بنوێنی بکارئینانا لاسەنگەیەکێ یان سیستەمەکی لاسەنگەیێن هێلی.

سیستەمێ لاسەنگەیێن هیلی **System of linear inequalities** کۆمەلەکا ژ دوو لاسەنگەیێن هێلی یان پترپێکدهێت، و هەمان نەزانراوان بخۆڤە دگرن. کۆمەلا شیکارا سیستەمێ لاسەنگەیێن هێلی گەلەك جاران ژ ژمارەکا بێ دوماهیك یا خالان پێکدهێت، کو یا دشیاندایە ب وێنەیەکێ ڕوونکرنێ بێ ڕەنگکری د ڕووتەختێ پۆتانیدا بهێتە نواندن. دەمێ لاسەنگەیێن هێلی دئێك ڕووتەختێ پۆتانیدا دئێنە نواندن، دەڤەرێن رنگکری ئێکدوو دبڕن و دەڤەرەکا هاوبەش پێکدئینن، ئەڤ دەڤەرا هاوبەش دبیتە کۆمەلا شیکارێ بۆ ئەوی سیستەمی.

نموونـــــە 1 شیکارکرنا سیستەمێ لاسەنگەیێن هێلی ب وێنەیێ ڕوونکرنێ

ب وێنەیێ ڕوونکرنێ سیستەمێ ڤان هەردوو لاسەنگەیێن هێلی شیکاربکە.

أ $\begin{cases} y \le -2x+4 \\ y > x-3 \end{cases}$



ل لاسەنگەیا ئێکێ، وێنەیێ ڕاستەهێلی $y=-2x+4$ ب هیلەکی بەردەوام بکێشە، و دەڤەرا ژێرەیا وی رنگبکە. و ل لاسەنگەریا دووێ، وێنەیێ راستەهێلی $y=x-3$ ب راستەهێلەکی خالخالکری بکێشە، و دەڤەرا ل ژۆریا وێ بَاکوور, ڕەنگبکە. ئێکدوو بڕینا هەردوو دەڤەرێن ڕەنگکری دبیتە دەڤەرا شیکارێ بۆ سیستەمێ هەردوو لاسەنگەریێن هیلی.

هاریکاری

هەکەر تو نەیی پشتڕاستبی ژ ئەوێ دەڤەرا کو دڤێت بهێتە ڕەنگکرن، خالا (0 ، 0) وەك خالا تاقیکرنێ بکاربینە.

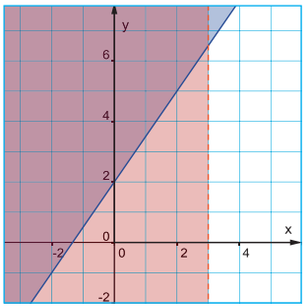
ساخکرن: ژ هەر دەڤەرەکا لسەر ڕووتەختێ پۆتانی خالەکێ تاقیبکە.

دەڤەر	خال	$y \le -2x+4$	$y > x-4$
لایێ	(0,0)	$0 \overset{?}{\le} -2(0)+4$ $0 \overset{?}{\le} 4$ √	$0 \overset{?}{>} 0-3$ $0 \overset{?}{>} -3$ √
لایێ ڕاستێ	(4,0)	$0 \overset{?}{\le} -2(4)+4$ $0 \overset{?}{\le} -4$ ×	$0 \overset{?}{>} 4-3$ $0 \overset{?}{>} 1$ ×
لایێ ژۆری	(2,2)	$2 \overset{?}{\le} -2(2)+4$ $2 \overset{?}{\le} 0$ ×	$2 \overset{?}{>} 2-3$ $2 > -1$ √
لایێ ژێری	(2,−2)	$-2 \overset{?}{\le} -2(2)+4$ $-2 \overset{?}{\le} 0$ √	$-2 \overset{?}{>} 2-3$ $-2 > -1$ ×

خالا ئێکێ خالا بتنێ بوو لناڤ هەموو خالان، کو هەردوو پۆتانێن وێ دبنە شیکار بۆ هەردوو لاسەنگەیێن هێلی بۆ سیستەمێ هەردوو لاسەنگەیێن هێلی

ب ویَنەیێ رووونکرنێ سیستەمێ هەردوو لاسەنگییَن هێلی شیکاربکە.

ب $\begin{cases} y \geq \frac{3}{2}x+2 \\ x<3 \end{cases}$



ل لاسەنگەیا ئێکێ، ویَنەیێ راستەهێلی $y=\frac{3}{2}x+2$ ب هێلەکی بەردەوام بکێشە، و ئەو دەڤەرا دکەڤتە ژۆریا وی رەنگکبکە. ل لاسەنگەیا دووێ، ویَنەیێ راستەهێلی $x=3$ ب هێلەکی خالخالکری بکێشە، و ئەو دەڤەرا دکەڤیتە لایێ چەپێ رەنگکبکە. ئێکدووبڕینا هەردوو دەڤەرێن رەنگکری، دەڤەرا شیکارێ بۆ سیستەمێ هەردوولاسەنگەییَن هێلی دنوێنیت.

$y \geq \frac{3}{2}x+2$ $\quad x<3$

ساخکرن: خالەکێ، ژ خالێن دەڤەرا ئێکدووبڕینێ تاقیبکە، بۆ نموونە $-4<3$ ✓ $0 \geq \frac{3}{2}(-4)+2$ خالا $(0\ ,\ -4)$ وەربگرە، و دیاربکە ئەرێ هەردوو پۆتانێن قێ خال دبنە

$0 \geq -4$ ✓

شیکار بۆ سیستەمی. چونکی ئەو خالە دکەڤتە دناڤ دەڤەرا شیکارا هەرلاسەنگەیەکێ دا، لەورا دەڤەرا ئیکدووبڕینێ دبیتە دەڤەرا شیکارێ.

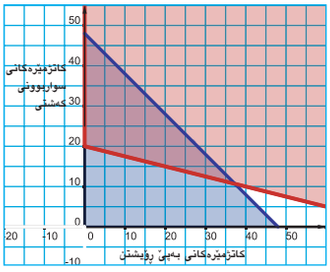
خالا چاڤدێریێ

1. ب ویَنەیێ رووونکرنێ هەر سیستەمەکی هێلی شیکاربکە.

أ $\begin{cases} x-3y<6 \\ 2x+y>1.5 \end{cases}$ $\quad$ ب $\begin{cases} y \leq 4 \\ 2x+y<1 \end{cases}$

نموونـــــە 2 بجهئینان ل سەر هاوێن ڤەدیتنێ

هاوا ڤەدیتنا جەمسەری ل دووریا **240 km** ژ بنکەیێ وێ بوو. پێشبینی هاتەکرن کو ل دەمێ 48 دەمژمێران دێ باهۆزا بەفرێ ئەنجام دەت، دەستەیا هاوایێ دڤێت ب لەز سواری پاپۆرا بەفربڕێ بن، و پاشی ب پێیان ریڤەبچن هەتا بگەهیتە بنکەیێ خۆ. پەرە لەزا پاپۆری **12 km/h** بوو. لێ پەرە لەزا ب پێیان و راکێشانا کەلووپەلان ژ **3 km/h** دەرباز نابیت. سیستەمێ لاسەنگەییَن هێلی بنڤیسە، و ب ویَنەیێ رووونکرنێ شیکاربکە بۆ دیارکرنا ماوەیێ (دەم) سواربوون ل پاپۆرێ و ماوەیێ ریڤەچۆنێ ب پێیان، بەری بگەهنە بنکەیێ خۆ.



x بۆ ژمارا دەمژمێرێن ب پێیان بڕیڤەچۆین، y بۆ ژمارا دەمژمێرێن ل پاپۆری سواربووین بکاربینە.

دڤێت سەرجەمێ هەردوو نەزانراوان نە زێدەتر بیت ژ 48 دەمژمێران، لاسەنگەیا $x+y \leq 48$ ئەڤێ رامانێ ددەت. ل لایەکی دی دڤێت دوریا دەستەیا هاوا دبڕیت ژ 240 km نەکێمتربیت. لاسەنگەیا $3x+12y \geq 240$ ئەڤێ رامانێ ددەت. سیستەمێ هەردوو لاسەنگەییَن هێلی ئەڤەیە

$\begin{cases} x+y \leq 48 \\ 3x+12y \geq 240 \end{cases}$

ویَنەیێ ڕاستەهێلێ $3x+12y=240$ ب ڕاستەهێلەکی بەردەوام بکێشە، و دەڤەرا ل ژۆریا وی ڕەنگبکە، پاشی ویَنەیێ ڕاستەهێلی $x+y=48$ بکێشە، و دەڤەرا ل ژێرەیا وی رەنگبکە. دەڤەرا شیکارێ بۆ سیستەمی دبیتە دەڤەرا ئێکدووبڕینا هەردوودەڤەرێن رەنگکری.

ساخبکە: خالا $(15,25)$ ژ دەڤەرا ئێکدووبڕینێ هەلبژێرە.

هەردو پۆتانێن ئەڤێ خالێ دبنە شیکار بۆ هەردوولاسەنگیان و بۆ سیستەمی.

$x+y \leq 48$
$15+25 \leq 48$
$40 \leq 48$ ✓

$3x+12y \geq 240$
$3(15)+12(25) \geq 240$
$345 \geq 240$ ✓

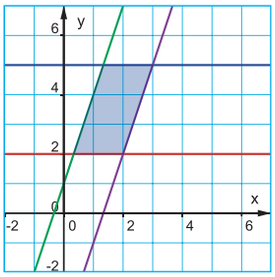
2. سولاف لەفێن گوشتی و لەفێن مریشکێ دفرۆشیت. 40 صەمون هەنە، ئانکو ئەو نەشێت پتر ژ 40 لەفان پێکڤە ژ هەردوو جۆران بفرۆشیت. ژ فرۆتنا لەفا گۆشتی 2 000 دیناران قازانج دکەت، و ژ فرۆتنا لەفا مریشکێ 2500 دیناران قازانج دکەت، ئەوێ دڤێت 90 000 دیناران قازانج بکەت. سیستەمێ لاسەنگەیێن هێلی بۆ نواندنا پرسیارێ بنڤیسە. پاشی ب وێنەیێ روونکرنێ شیکاربکە.

چێدبیت سیستەمێ لاسەنگەیێن هێلی پتر ژ دوولاسەنگەیان بخۆڤە بگرت.

نموونـــــە 3 بجهئینانا ئەندازەیی

سیستەمێ لاسەنگەیێن هێلی ب وێنەیێ روونکرنێ شیکاربکە، و جۆرێ دەڤەرا شیکارێ دیاربکە.

$$\begin{cases} y \le 5 \\ y \ge 2 \\ y \le 3x+1 \\ y \ge 3x-4 \end{cases}$$



$y = 3x+1$

وێنەیێ راستەهێلی $y = 5$ ب راستەهێلەکی بەردەوام بکێشە و وێنەیێ راستەهێلێ $y = 3x-4$ ب راستەهێلەکی بەردەوام بکێشە، و دەڤەرا دکەفتە ژێریا هەرئێك ژ وان رەنگبکە.

وێنەیێ راستەهێلی $y = 2$ ب راستەهێلەکی بەردەوام بکێشە و وێنەیێ راستەهێلی $y = 3x+1$ ب راستەهێلەکی بەردەوام بکێشە و دەڤەر دکەفتە ژۆریا هەرئێك ژ وان رەنگبکە. دەڤەرا شیکارا سیستەمی ژ دەڤەرا ئێکدووبڕینا وان پێکدهێت. دەڤەرا شیکارێ شێوەیەکی چارلاییە. بەرێ خو بدێ، هەردوو راستە $y = 5$، $y = 2$ تەریب بن، چونکی دووراستەهێلێن ئاسۆینە، و هەردوو راستەهێل $y = 3x+1$ ، $y = 3x-4$ تەریب بن، چونکی هەمان لاری هەنە.

دەڤەرا شیکارێ چارلایەکە هەموو دوولایێن وێ یێن بەرامبەر دتەریب بن، لەورا ئەو چارلایە دبیتە لاتەریب.

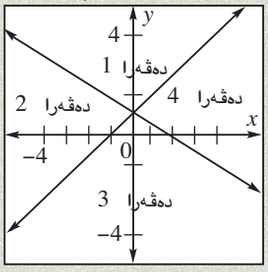
3. ب وێنەیێ روونکرنێ سیستەمێ لاسەنگیێن هێلی شیکاربکە و جۆرێ دەڤەرا شیکارێ دیاربکە.

أ $\begin{cases} x \le 6 \\ y \le \frac{1}{2}x+1 \\ y \ge -2x+4 \end{cases}$

ب $\begin{cases} y \le 4 \\ y \ge -1 \\ y \le -x+8 \\ y \le 2x+2 \end{cases}$

هزربکە و گەنگەشێ بکە

1. ڕوونبکە چەوا دەڤەرا شیکارێ بۆ سیستەمێ لاسەنگیێن هێلی دیاردکەی.
2. کێمترین ژمارا لاسەنگیێن سیستەمی چەندە؟ هەتا دەڤەرا شیکارێ ببیتە سێگۆشە، چارگۆشە؟ نموونەیان بۆ روونکرنا بەرسڤا خۆ بینە.
3. ڕێکخەربە، هێلکاری کۆپیبکە و تەمامبکە بنڤیسینا سیستەمەکی لاسەنگەیێن هێلی بۆ هەر دەڤەرەکێ دروتەختێ پۆتانێدا، کو شیکارا سیستەمی ئەوێ دەڤەرێ بنوێنت.



فێربە و هزربکە

3-2 ڕاهێنان

ڕاهێنانێن ئاراستەکری

1 **زاراف** بەراوردێ لناڤبەرا سیستەمێ لاسەنگیێن هێلی و سیستەمێ هاوکێشەییێن هێلی بکە.

بەری خۆ بدە نوونە 1

ب وێنەیێ ڕوونکرنێ هەر سیستەمەکێ هێلی شیکاربکە.

2 $\begin{cases} y \geq 4x-4 \\ y \geq 3x-3 \end{cases}$ **3** $\begin{cases} x+y>5 \\ x-y<-3 \end{cases}$ **4** $\begin{cases} 7x<y-16 \\ y \leq -5x-2 \end{cases}$ **5** $\begin{cases} 2x+2y \leq 4 \\ 3x-y>1 \end{cases}$

بەری خۆ بدە نوونە 2

6 **کۆمکرنا هاریکاریان:** کۆمەلەکا خێرخوازیێ هاریکاریان کۆمدکەت، ب فرۆتنا قەمیسێن پەمبوویی. بهایێ قەمیسێ مەزنان 15 000 دینار بوو و بهایێ قەمیسێ زارۆکان 10 000 دینار بوو. ژمارا قەمیسان ژ هەردووجۆران 250 قەمیسن، کۆمەلێ دقێت ب کێماسی 3 ملیون دیناران کۆمبکەت. سیستەمەکی لاسەنگەییێن هێلی بۆ نواندنا پرسیارێ بنڤیسە، پاشی ب وێنەیێ ڕوونکرنێ شیکاربکە بۆ دیارکرنا ژمارا قەمیسێن ژ هەرجورەکی کو دقێت ئەو بفرۆشت.

بەری خۆ بدە نوونە 3

ب وێنەیێ ڕوونکرنێ هەر سیستەمەکێ لاسەنگەییێن هێلی شیکاربکە و جۆرێ دەڤەرا شیکارێ دیاربکە.

7 $\begin{cases} x \geq 9 \\ y \geq -18 \\ x \leq 13 \\ y \leq -4 \end{cases}$ **8** $\begin{cases} y \leq 7 \\ 2x-y \leq 3 \\ x+2y \geq -6 \end{cases}$ **9** $\begin{cases} x \leq -1 \\ y \leq 3x+2 \\ y \geq -3x-10 \end{cases}$ **10** $\begin{cases} y \geq x \\ y \leq x+6 \\ x \leq 6 \\ x \geq -2 \end{cases}$

ڕاهێنان و شیکارکرنا پرسیاران

ب وێنەیێ ڕوونکرنێ سیستەمێ لاسەنگیێن هێلی شیکاربکە.

ڕاهێنانێن ئازاد

بۆ شیکارکرنا ڕاهێنانان	بەری خو بدە نموونە
11-14	1
15	2
16-19	3

11 $\begin{cases} 5x-y>0 \\ y<x \end{cases}$ **12** $\begin{cases} 3y \geq 2x-3 \\ y \geq 3x+8 \end{cases}$ **13** $\begin{cases} x+y>5 \\ -2x+y \leq 2 \end{cases}$ **14** $\begin{cases} y>4 \\ x+4y \geq 8 \end{cases}$

15 **میوزیك:** کۆمپانیەکێ دقێت 10 000 سیدیێن تۆمارکری ب کۆمەڵەکا سترانا بەرهەم بینت. ژمارەك ژ وان تەرخانکرن ب خۆرایێ دابەش بکەت لسەر ویستگەهێن رادیۆ و تەلفزیونان، و ژمارەك ژ وان بۆ فرۆتنێ. ب مەرجەکی ژمارا وان سیدیێن بهێنە بەلاڤکرن لسەر دەزگەهێن رادیۆ و تلفزیونان نە زێدەتربیت ژ ڕێژەیا 20% ژ سەرجەمێ گشتی. سیستەمێ لاسەنگەییێن هێلی بۆ نواندنا ئەڤێ پرسیارێ بنڤیسە، و ژمارا سیدیێن هاتینە فرۆتن و بەلاڤکرن دیاربکە.

ب وێنەیێ ڕوونکرنێ سیستەمی لاسەنگیێن هێلی شیکاربکە، و جۆرێ دەڤەرا شیکار دیاربکە.

16 $\begin{cases} x \geq 0 \\ -\frac{1}{3}x+y \geq -4 \\ \frac{1}{3}x+y \leq -1 \end{cases}$ **17** $\begin{cases} y \leq 2.5 \\ y \geq -0.5 \\ y \leq -x+8 \\ y \leq 2x+4 \end{cases}$ **18** $\begin{cases} y \leq x+6 \\ y \geq x+1 \\ y \leq -x+6 \\ y \geq -x-1 \end{cases}$ **19** $\begin{cases} y \leq x \\ y \leq -x+2 \\ y \geq 0 \end{cases}$

20 **وەرزش:** ژمارا تەلەفوونکرنێن هەژاری ل مەها بۆری گەهشتە 2370 تەلەفوونکرنان، 1645 ژ وان بۆ وی ژ کەسێن دی هاتبوون. ژمارا تەلەفوونکرنێن هوزانێ ژ ژمارا تەلەفوونکرنێن هەژاری کێمتربوو. لێ ژمارا وان تەلەفوونکرنێن بۆ هوزان هاتین ژ ژمارا وان تەلەفوونکرنێن بۆ هەژاری هاتین زێدەتربوو. سیستەمێ لاسەنگیێن هێلی بۆ نواندنا پرسیارێ بنڤیسە، پاشی شیکاربکە بۆ دیارکرنا ژمارا تەلەفوونکرنێن بۆ هوزان هاتین، و ژمارا تەلەفوونکرنێن هوزان هنارتین.

ئەندازە: سیستەمێ ئەوان لاسەنگەیێن هیلی بنقیسە کو دەڤەرا شیکارا وێ لسەر شێوەیێ:

21 لاکێشە بیت 22 چارگۆشەبیت 23 سێگۆشا وەستاو بیت 24 نیمچە لاتەریب بیت

25 ترومبێلێن بەریکانێ ل ژێر چەند مەرجان دروستدکەن، ژ لایێ قەبارەی و بارستایێ، ل دووڤ پۆلینکرنا وان، دڤێت بارستایێ ترومبێلا فورمولا (۱) ل گەل بارستایێ شوفێری نەکێمتربیت ژ600kg ، ل دەمێ بارستایێ ترومبێلێن دی یێن بەریکانێ بیێ شوفێر نەکێمتر بیت ژ 710kg .

أ سیستەمەکێ لاسەنگەیێن هێلی بنقیسە، کو بێتە بکارئینان بۆ بەراوردیێ لناڤبەرا بارستایێن هەردو ترومبێلان بێی شوفێر.

ب بواروماودایێ گۆنجای بۆ سیستەمی دیاربکە.

ج هەردوولاسەنگەیان ب وێنەیێ روونکرنێ شیکاربکە.

26 **باجا دەرامەتی:** خشتەیێ بەرامبەر رێژا باجێ لسەر داهاتی دیاردکەت ل دووڤ بەهایێ داهاتێ خێزانەکێ. رێژا باجا داهاتێ سەرجۆن و ئافرەتا وی25% . و داهاتێ ئافرەتا وی نەکێمترە ژ ملیون دینارا. سیستەمەکی لاسەنگەیێن هێلی بۆ نواندنا پرسیارێ بنقیسە، پاشی سیستەمی ب وێنەیێ روونکرنێ شیکاربکە.

رێژا باجا دەرامەتی ل دووڤ بەشان	
داهات (ب ملیۆن دینار)	رێژە
ژ 14 000 هەتا 56.800	15%
ژ 56.801 هەتا 114.650	25%
ژ 114.651 هەتا 174.700	28%

هەر سیستەمەکێ لاسەنگەیێن هێلی ب وێنەیێ روونکرنێ شیکاربکە. سێ خالان ژ دەڤەرا شیکارێ دیاربکە.

27 $\begin{cases} -5y < 2x \\ 5y \geq 2x - 20 \end{cases}$ 28 $\begin{cases} y + 7 > 0 \\ y < 2x + 5 \\ y < -3x + 4 \end{cases}$ 29 $\begin{cases} y \geq -8 \\ x + 2y < 4 \\ x > -6 \end{cases}$ 30 $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 3y \leq 2 \\ x - y > 3 \end{cases}$

31 **هزرکرنا رەخنەگر:** ئەگەر ئەو دوو راستەهێلێن دەڤەرا شیکارا سیستەمێ دوولاسەنگەیێن سنوور ددەن دگەل ئێکدوو تەریب بن، دەڤەرا شیکارا گۆنجای چییە؟

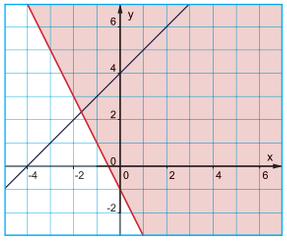
32 **بنقیسە:** ئەرێ چێدبیت سیستەمەکێ دولاسەنگەیێن هێلی شیکار نەبیت؟ ئەڤێ روونبکە.

ئامادەکرن بۆ ئەزموونێ

33 کیژ سیستەمێ لاسەنگەیێن هێلی ل خوار شیکارا وێ ب وێنەیێ روونکرنێ، شێوەیێ بەرامبەر دنوێنت.

أ $\begin{cases} y > x + 4 \\ y < -2x - 1 \end{cases}$ ج $\begin{cases} y \leq x + 4 \\ y \geq -2x - 1 \end{cases}$

ب $\begin{cases} y > x + 4 \\ y > -2x - 1 \end{cases}$ د $\begin{cases} y \geq x + 4 \\ y \geq -2x - 1 \end{cases}$



34 پارێ لێچوویی بۆ بەرهەمئینانا برێ متایەکی 300 000 دینار بوو و 1250 دیناران زێدە دکەن بۆ بەرهەمئینانا هەرمتایەکی. کۆمپانی ئەڤی متایی ب نرخەکی دفرۆشت کو نەپتربیت ژ2 500 دیناران بۆ هەرمتایەکی. کیژ سیستەمێ لاسەنگەیێن هیلی ل خوارێ چێدبیت دەڤەرا شیکارا وێ بۆ نواندنا قازانجێ کۆمپانیێ بێتە بکارئینان؟ (هێمایی) بۆ لێچوویا گشتی و n بۆ ژمارا یەکەیێن بەرهەمی هاتیە بکارئینان.

أ $\begin{cases} c \leq 300\ 000n \\ c \leq 300\ 000 + 1\ 250n \end{cases}$ ج $\begin{cases} c \leq 2\ 500n \\ c \geq 300\ 000 + 1\ 250n \end{cases}$

ب $\begin{cases} c \geq 2\ 500n \\ c \leq 300\ 000 + 1\ 250n \end{cases}$ د $\begin{cases} c \geq 2\ 500n \\ c \geq 300\ 000 + 1\ 250n \end{cases}$

35 کیژ خشتەیێن ل خوارێ شیکارا ڤی سیستەمی $\begin{cases} 3x-12y>8 \\ x+5y>-5 \end{cases}$ بخوٚڤە دگرت؟

أ)

x	y
1	−2
2	0
3	0
4	−2

ب)

x	y
1	−2
2	1
3	1
4	−2

ج)

x	y
1	−1
2	−1
3	0
4	0

د)

x	y
1	−2
2	−2
3	−1
4	−1

بەرهنگاری و بەرفرەهکرن

36 سیستەمێ لاسەنگەیێن هێلی بنڤیسە کو دەڤەرا شیکارا وێ لسەر شێوەیێ پێنجلای بیت.

37 ئەرێ نەزانراوێ m بەهایەك هەیە وەسا دکەت کو سیستەمێ لاسەنگیێن هێلی $\begin{cases} y>-3x+2 \\ y<mx-3 \end{cases}$ شیکار نەبت؟ هەکەر بەرسڤ بەلێ بوو، ئەوی بەهایی دیاربکە، و هەکەر بەرسڤ نەخێر بوو، هویێ روونبکە.

38 سەرداری دۆلێت 30 ملیون دیناران دانتە د بازارێ پارەیدا (سوق الاوراق المالیە). بانکێ دووجۆرێن کاری ئێخستنە پێش وی... یێ ئێکێ، یێ کێم مەترسیە و قازانجێ وی سالانە 5% ، و یێ دووێ مەترسی تێدا هەیە و قازانجێ وی 7% . کێمترین برێ پارەی چەندە؟ کو دۆلێت ئەو دانتە دبازارێ پارەی دا ب رێژا 7% هەتا قازانجێ وی سالانە نەکێمتر بیت ژ 1 900 000 دیناران.

پێداچوونا لولپێچی

دژێ کۆمکرنێ و هەلگەراوێ هەرژمارەیەکێ بنڤیسە (پۆلێن پێشتر).

39 7 **40** $-\frac{3}{4}$ **41** 2.48 **42** −1

هاوکێشەیا راستەهێلی بنڤیسە (پۆلێن پێشتر)

43 د هەردووخالێن $(2,-7)$ و $(1,1)$ ڕادبۆرت.

44 د خالا $(3,-3)$ ڕادبۆرت و لارێ وی سفرە.

45 د هەردووخالێن $(1,-1)$ و $(0,0)$ ڕادبۆرت.

46 د خالا $(9,6)$ ڕادبۆریت و لارێ وی $-\frac{1}{3}$.

47 د خالا $(-2,4.5)$ ڕابیوریت و ستوون بیت ل گەل ڕاستەهێلی $y=4x-1$.

48 د خالا $(3,2)$ ڕابورت وتەریب بیت ل گەل ڕاستەهێلی $y=-x-7$.

4–2 پرۆگرامێ هێلی

Linear Programming

کی ئەڤی بکاردئینت؟

ئەندازیارێن باغچان پرۆگرامێ هێلی بکاردهێتن بۆ دەستنیشانکرنا ئەوان رووەکێن دڤێن لسەر رووبێن کەسك بچینن.

ئارمانج

شیکارکرنا پرۆگرامێ هێلی.

زاراڤ
Vocabulary

پرۆگرامێ هێلی
Linear programming

مەرج
Constraint

دەڤەرا کونجایی
Feasible Region

نەخشەیا بمفا
Objective Function

رووبێن کەسك ئەو رووبێن سەرپۆشکرینە ب رووەکان ل جهێ بابەتێن دی، وەك چەمەنتو و قەرمیدی، ژ بۆ هاریکاریا نزمکرنا پلەیێن گەرماتیێ، و چاککرنا جورێ هەوایی بکەت.
هەلبژارتنێن ئەندازیارێن باغچان ئەنجام ددەن ل دویڤ نرخێ رووەکان و برێ هەوایێ پێدڤی بۆ رووەکان، و برێ دووەم ئوکسیدێ کاربوونێ ئەوێ رووەك هەلدمژت.

پرۆگرامێ هێلی Linear programming رێیەکە بۆ دیارکرنا مەزنترین بەها یان بچووکترین بەهایی بۆ وێ نەخشا پاسەدانا مەرجان دکەت، دبێژنە وان مەرجێن پرسیارێ.
مەرج Constraint لاسەنگەیەکا دپرسیارا پرۆگرامێ هێلی دا.

چێدبیت کۆمەلا شیکارێ ئەوا هەموو مەرجان ساخدکەت ب وێنەیەکی روونکرنێ بێتە نواندن، کو دروتەختێ پۆتانێدا پەیدادبیت دبێژنێ **دەڤەرا کونجایی (الجدوی) Feasble Region** .

نموونـــــە 1 نواندنا دەڤەرا کونجایی ب وێنەیێ ڕوونکرنێ

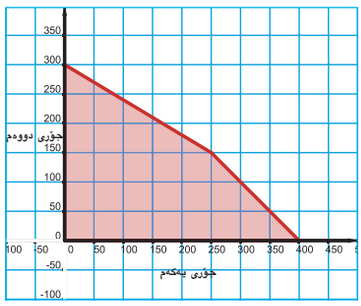
سیروان نەخشەیەکێ ئەندازەیێ بۆ باغچەکی دکێشیت ڕووبەرێ وی نەزێدەتربیت ژ $600m^2$ ، بکارئینانا دووجۆرێن ڕووەکان. ڕووەکێ جۆرێ ئێکێ ڕووبەرێ $2m^2$دا پۆشدکەت. نرخێ هەر ڕووەکەکی ژ هەردووجۆران 2500 دینارن. دڤێت لێچوویا ڕووەکان نەبتربیت ژ ئێك ملیون دیناران. مەرجان بنڤیسە و دەڤەرا کونجایی ب وێنەیێ ڕوونکرنێ بنوێنە.

هێمایێ گۆڕاوێ x بۆ ژمارا ڕووەکێن جۆرێ ئێکێ، و گۆڕاوێ y بۆ ژمارا ڕووەکێن جۆرێ دووێ دانە.

ژمارا ڕووەکان نابیت یا سالب بیت
ڕووبەرێ داپۆشکری نەپترە ژ $600\ m^2$
تێچوویا ڕووەکان نەپترە ژ 100 0000 دیناران

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 1.2x + 2y \leq 600 \\ 2500x + 2500y \leq 1000000 \end{cases}$$

ب وێنەیێ ڕوونکرنێ هەر مەرجەکی پرسیارێ شیکاربکە، و ئەوێ دەڤەرا پێکدهێت ژ هەموو دەڤەرێن شیکارێن جیاواز رەنگبکە. دەڤەرا کونجایی ئەو دەڤەرەیە ئەوا ب دەست مە دکەڤیت.
ئەو چارلایەکە خالێن سەرێن وێ دبنە $(0, 0)$ ؛ $(400, 0)$ ؛ $(250, 150)$ ؛ $(0, 300)$



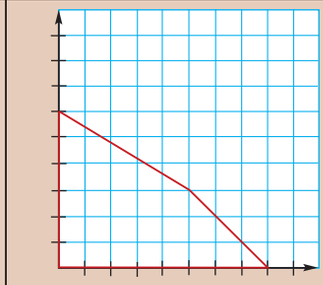
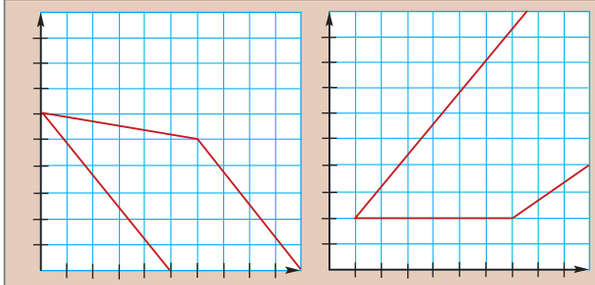
ساخکرن: هەکەر خالەکێ وەك خالا $(100, 100)$ هەلبژێری، دێ بینی هەردوو پۆتانێن وێ هەموو مەرجان ساخدکەن. √

خالا چاقدێریێ

1. ب وێنەیێ ڕوونکرنێ دەقەرا کونجایی بۆ ڤێ پرسیارێ بنوێنە.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 1.5 \\ 2.5x + 5y \leq 20 \\ 3x + 2y \leq 12 \end{cases}$$

دەمێ پرسیارەکا پروگرامێ هێلی شیکار دکەی، نواندنا دەقەرا کونجایی د رووتەختێ پۆتانێدا بتنێ بەس نینە، گەلەك جاران دڤێت تو وان بهایێن گۆڕاوان بهەژمێری ئەوێن بهایێن نەخشەی دکەنە مەزنترین بها یان بچووکترین بها. دبێژنە ئەڤێ نەخشەیێ نەخشەیا بمفا (دالة منفعة) **Objective Function** بۆ دەقەرا کونجایی چێدبیت. نەخشەیا بمفا مەزنترین بەها یان بچووکترین بەها هەبیت یان هەردوو پێکڤە هەبن یان چۆ ژ وان نەبن.

دەقەرێن سنوورکری و دەقەرێن نەسنوورکری	
دڤەرا بمفا یا سنوورکری	دەقەرا بمفا نەیا سنوورکری
	
نەخشەیا بمفا مەزنترین بەها و بچویکترین بها هەیە.	نەخشەیا بمفا مەزنترین بەها یان بچووکترین بەها هەیەو هەردوو پێکڤە نینن.

یا دشیاندایە ب هۆیێ بیرکاری یا پێشکەفتی ئەڤا ل خوارێ بێتە سەلماندن:

فێربە

بیرۆکا سەری دپرۆگرامێ هێلی دا.

هەکەر نەخشەیا بمفا دپرسیارەکا پرۆگرامێ هێلی دا مەزنترین بها یان بچووکترین بها هەبیت، دێ نەخشە گەهتە ڤان بهایان لنك سەرەکی ژ سەرێن دەقەرا بمفا.

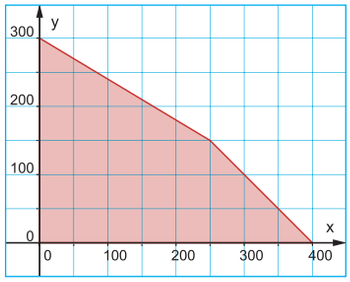
نموونـــــە 2 شیکارکرنا پرسیارا پرۆگرامێ هێلی.

هاریکاری

بژمێرا ڕوونکرنێ بکاربینە بۆ ساخکرنا وێ دەقەرا کونجایی یا بدەست تە کەفتی. ژ بیرا تە نەچیت گۆڕاوان بۆ x و y بگۆهۆڕە.

سیروان ئەندازیارێ باغچایە، ئەو گرنگیێ دەتە کێمکرنا پیسبونا هەوایی. و ژ بۆ فێ مەرەمێ سیروان هەول دەت کو ژمارا وان ڕووەکێن دووەم ئۆکسیدێ کاربۆنێ هەلدمژین مەزنترین بیت. تێکرایێن هەلمژینا دووەم ئۆکسیدێ کاربۆنێ و پێدایێن نموونە 1 بکاربینە بۆ هەژمارتنا ڕووەکان ژ هەردوو جۆران.

پێنگاڤا (1) ێ: هێمایێ گۆراوێ C بۆ بڕێ دووەم ئۆکسیدێ کاربوونی هاتیە هەلمژین دانە. x بۆ ژمارا ڕووەکێن ژ جۆرێ ئێکێ و y بۆ ژمارا ڕووەکێن ژ جۆرێ دووێ دانە.



نەخشەیا بمفا بنڤیسە: $C = 0.7x + 1.05y$

پێنگاڤا (2) ێ: مەرجێن پرسیارێ بنڤیسە

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 1.2x + 2y \leq 600 \\ 2500x + 2500y \leq 1000000 \end{cases}$$

و دەڤەرا کونجای بنوێنە.

پێنگاڤا (3) ێ: بهایێ نەخشەیا بمفا لنك هەر سەرەکی ژ سەرێن دەڤەرا کونجای بهەژمێرە

(x, y)	$0.7x + 1.05y$	C
$(0, 0)$	$0.7(0) + 1.05(0)$	0
$(0, 300)$	$0.7(0) + 1.05(300)$	315
$(250, 150)$	$0.7(250) + 1.05(150)$	332.5
$(400, 0)$	$0.7(400) + 1.05(0)$	280

نەخشەیا بمفا دگەهتە مەزنترین بها لنك $(250, 150)$

پێدڤیە سیروان 250 ڕووەکان ژ جۆرێ ئێکێ و 150 ڕووەکان ژ جۆرێ دووێ بچینت دا بڕێ دووەم ئۆکسیدێ کاربۆنێ، ئەوێ ڕووەکێن باغچەی هەلدمێژت بگەهیتە وی پەرە بهای.

2. مەزنترین بها بۆ نەخشەیا بمفا $p = 25x + 30y$ دیاربکە ل ژێر ڤان مەرجان.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 1.5 \\ 2.5x + 5y \leq 20 \\ 3x + 2y \leq 12 \end{cases}$$

نموونـــــە 3 بجهێنان لسەر شیکارکرنا پرسیاران

ل ڤیستەڤالا سواربوونا هەسپان، دڤێت بیستون دانێن خوارنێ دعەلبکاندا دانت. بۆ ڤی کاری ئەوی هندەك کرێکارێن بسپۆر بکارئینان، کرێیا هەرئێکی ژ وان یا ڕۆژانە 60 000 دینار بوو. و هندەك کرێکارێن نە بسپۆر بکارئینان کرێیا هەرئێکی ژ وان یا ڕۆژانە 40 000 دینار بوو. دڤێت ئەو کوژمێ پارێ سیروان بدەتە کرێکاران 1 440 000 دینار بیت. پیستون بەرامبەر ئێك کرێکارێ بسپۆر بکێماسی پێدڤی ب سێ کرێکارێن نە بسپۆر هەیە، بتنێ 16 کرێکارێن پسپۆر بدەست کەفتن. کرێکارێ بسپۆر 25 عەلبە ددەمژمێرەکێدا و کرێکارێ نەبسپۆر 18 عەلبە ددەمژمێرەکێدادروستکرن. ژمارا کرێکاران ژ هەردووجۆران بهەژمێرە دا مەزنترین ژمارا عەلبکان بدەست بکەڤیت.

1 د پرسیارێ بگەهە

بەرسڤ ژ دووجۆران پێکدهێت، ژمارا کرێکارێن بسپۆر لیستەیەکێ ژ پێزانینێن گرنگ دروستبکە

- کرێیا کریکارێ بسپۆر 60 000 دینارن درۆژەکێدا و کرێیا نەیێ بسپۆر 40 000 دینارن درۆژەکێدا.
- بیستون 1 440 000 دینار وەك کوژمێ پارەی بۆ کرێیا کرێکاران دانە.
- کرێکارێ بسپۆر 25 عەلبکان ددەمژمێرەکێدا دروست دکەت، و کرێکارێ نەبسپۆر 18 عەلبکان دروست دکەت.
- بیستون بەرامبەر ئێك کرێکارێ بسپۆر بکێماسی پێدڤی ب 3 کرێکارێن نە بسپۆر هەیە.
- 16 کرێکارێن پسپۆر هەنە.

بەشێ 2 سیستەمێن هاوکێشە و لاسەنگەیێن هێلی.

2 پلانێ بۆ شیکارکرنێ دانه

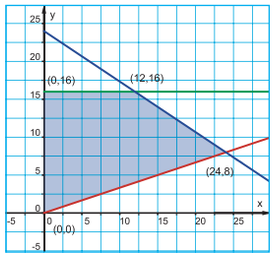
هێمایێ گۆڕاوێ x بۆ ژمارا کرێکارێن نەبسپۆر و گۆڕاوێ y بۆ ژمارا کرێکارێن بسپۆر دانه. مەرجێن پرسیارێ و نەخشەیا بمفا بنقیسه ل دووڤ وان زانیارییێن گرنگ ئەوێن تە نقیسین.

$$\begin{cases} x \geq 0 & \text{ژمارا کرێکاران نە یا سالبە.} \\ y \geq 0 & \\ 40000x + 60000y \leq 1440000 & \text{کرێیا کرێکاران نە زێدەترە ز 1 440 000 دیناران.} \\ y \geq \frac{1}{3}x & \text{کرێکارەکێ بسپۆر بکێماسی بەرامبەر 3 کرێکارێن نە بسپۆرە.} \\ y \leq 16 & \text{ژمارا کرێکارێن بسپۆر 16.} \end{cases}$$

هێمایێ گۆڕاوێ p بۆ ژمارا عەلبکێن دەدەمژمێرەکێدا هاتینە دروستکرن دانه، نەخشەیا بمفا دبیتە $p = 18x + 25y$

3 شیکاربکە

ب وێنەیێ روونکرنێ دەڤەرا بمفا و سەرێن وێ دیاربکە، پاشی بهایێ نەخشەیا بمفا لنك هەر سەرەکی بهەژمێرە.



$p(0,0) = 18(0) + 25(0) = 0$

$p(0,16) = 18(0) + 25(16) = 400$

$p(12,16) 1 = 18(12) + 25(16) = 616$

$p(24,8) 1 = 18(24) + 25(8) = \mathbf{632}$

نەخشەیا بمفا دگەهتە مەزنترین بها لنك سەرێ $(24,8)$.

دڤێت بیستون 8 کرێکارێن پسپۆر و 42 کرێکارێن نە پسپۆر بکاربینیت.

4 ساخکرن:

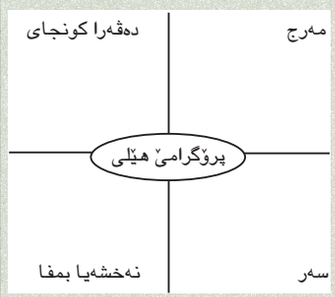
پشت راستبە کو جۆتێ ڕێکخستنی $(24,8)$ هەموو مەرجێن پرسیارێ ساخدکەت

$x \geq 0$	$y \geq 0$	$y \leq 16$
$24 \geq 0$ √	$8 \geq 0$ √	$8 \leq 16$ √
	$y \geq \frac{1}{3}x$	$40000x + 60000y \leq 1440000$
	$y \geq \frac{1}{3}(24)$	$40000 \times 24 + 60000 \times 8 \leq 1440000$
	$8 \geq 8$ √	$1440000 \leq 1440\ 000$ √

3. ڕێڤەبەرێ پەرتووکخانەکێ دڤێت هندەك دۆلابێن پەرتووکان بکڕیت. پەرتووکخانێ پێدڤی ب دوو جۆرێن رەفکان هەیە ب درێژیا $320\ m$. دۆلابێن ژ جۆری ئیکێ ب درێژیا ب $32\ m$

لێچوویا وێ 200 000 دینارن. و درێژیا دوولابێن ژ جۆرێ دووێ ژ رەفکان $16\ m$ و لێچوویا وی جۆری 125 000 دینارن. ل دویڤ پیڤانێن هۆلا پەرتووکخانێ، ئەو ب زێداهی 8 دۆلابان ژ جۆرێ ئێکێ و 12 دۆلابان ژ جۆرێ دووێ وەردگرت. ڕێڤەبەرێ پەرتووکخانێ دڤێت چەند دۆلابان ژ هەرجۆرەکی بکڕت دا کێمترین پارەی بدەت؟

هزربکه و گەنگەشێ بکه



1. چ وەسا ل مەرجێن پرسیارا پرۆگرامێ هیلی دکەت کو گەلەك جاران هەردوو مەرجان $x \geq 0$ و $y \geq 0$ بخوڤە دگرت؟
2. چ وەسا ل نەخشەیا بمفا دکەت د پرسیارا پرۆگرامێ هێلی دا کو هەردوو مەرجێن $\begin{cases} x+y>0 \\ y \leq 4 \end{cases}$ مەزنترین بها یان بچووکترین بها هەبیت. و هەردوو پێکڤە نەبن؟
3. چەوا دزانی کو پێزانینا دپرسیارا پرۆگرامێ هێلی دایا مەرجییە یان یا نەخشەیا بمفایە؟
4. رێکخەربە، خشتەی کۆپیبکە پاشی تەمامبکە. د هەر خانەکێدا نموونەکێ بنڤیسە بکارئینانا پێدایێن هەردوو نموونەیان 1 و 2 .

فێربە

4-2 راهێنان

راهێنانێن ئاراستەکری

1 **زاراڤ:** دبێژنە ئەوان لاسەنگییێن دپرسیارا پرۆگرامێ هێلیدا ___؟ (مەرج یان نەخشەیا بمفا)

نموونە 1 هەر دەڤەرەکا کونجایی ب ویّنەیێ ڕوونکرنێ دیاربکە.

2 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 3x+3 \\ y \leq -x+7 \end{cases}$

3 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq -1 \\ y \leq x+1 \\ y \leq -\frac{1}{4}x+6 \end{cases}$

4 $\begin{cases} x \geq -2 \\ y \leq 1 \\ y \geq 0.5x-2 \\ y \leq -2x+3 \end{cases}$

نموونە 2 بهایێ x و y بهەژمێرە ئەوێن مەزنترین بها یان بچویکترین بها ددەتە نەخشەیا بمفا

مەرج	نەخشەیا بمفا	مەزنترین یان بچویکترین بەها
5 مەرجێن پرسیارا (ﺃ) ێ	$p=10x+16y$	مەزنترین بەها
6 مەرجێن پرسیا (ﺏ) ێ	$p=3x+5y$	بچووکترین بەها
7 مەرجێن پرسیارا (ج) ێ	$p=2.4x+1.5y$	مەزنترین بەها

نموونە 3

8 **نۆژداریّ ددانە:** نۆژداریّ ددانە ریبوار، 7 دەمژمێران ڕۆژانە کاردکەت. نیڤ دەمژمێرێ تەرخاندکەت بۆ وی نەخۆشی دڤێت ددانێ خو پاقژبکەت و 40 000 دیناران ژێ وەردگرت. و دەمژمێرەکێ تەرخان دکەت بۆ وی نەخۆشی دڤێت پدوێن خۆ چارەسەر بکەت و 95 000 دیناران ژێ وەردگرت. نۆژدار دشێت بزێداهێ 4 نەخۆشێن چارەسەریا پدوێ ببینت دڕۆژەکێدا . ژمارا پارەیێن پاقژکرنا ددانان و ژمارا پارەیێن چارەسەریا پدوان چەندە دا پترترین داهاتی بۆ نۆژداری بهێتە دابینکرن؟

ڕاهێنان و شیکاکرنا پرسیاران

هەر دەقەرەکا کونجایی ب ویێنەیێ ڕوونکرنێ دیاربکە.

ڕاهێنانێن نازاد	
بۆ شیکارکرنا بەرێ خۆ بدە	
ڕاهێنانان	نموونە
11 -9	1
14 -12	2
15	3

9 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \geq 4x - 4 \\ y \leq x + 5 \end{cases}$

10 $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 9 \\ y \geq -2x - 7 \end{cases}$

11 $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 5 \\ y \geq \frac{1}{5}x - 3 \\ y \leq -x + 4 \end{cases}$

بهایێن x و y بهەژمێرە ئەوێن مەزنترین بەها یان بچویکترین بەها دەدنە نەخشەیا بمفا.

	مەرج	نەخشەیا بمفا	مەزنترین بەها یان بچویکترین بەها
12	مەرجێن پرسیارا (9) یێ	$p = -21x + 11y$	مەزنترین بەها
13	مەرجێن پرسیارا (10) یێ	$p = -2x - 4y$	بچویکترین بەها
14	مەرجێن پرسیارا (11) یێ	$p = x + 3y$	مەزنترین بەها

15 **ڕێکلام:** کۆمپانیەکێ 60 ملیۆن دینار تەرخانکرن بۆ ڕێکخستنا هەلمەتەکا پرۆپاگەندێ بۆ بەرهەمێن خو لسەر تەلەفزیونێ ل دەمێ ئیڤاری، و لسەر ژمارەیەکا ویستگەهان. بەرپرسێ هاوێ بریاردا لناڤبەرا 30 هەتا 60 جاران بەخشێ ویستگەهێ بکاربینت. خشتێ بەرامبەر بکاربینە بۆ هەژمارتنا ژمارا ریکلامان لسەر تەلەفزیۆنێ ل دەمێ ئیڤاری و لسەر ویستگەهێ کو دریژترین دەمێ گونجای ژ ریکلامێ دابیندکەت د سنووردا پۆجێ دا.

جۆر	ماوە (چرکە)	تێچوو (دینار)
ویستگەهـ	20	400 000
تەلەفزیۆن (دەمێ ئیڤاری)	30	1 500 000
تەلەفزیۆن (دەمێ شەڤێ)	30	1 200 000
ڕۆژنامە		300 000

16 پلێتێن بەریکانا ڕۆژهەلات یا ترومبێلان ب دوو نرخان هاتنە فرۆتن، 25 000 دینار بۆ کورسییێن ل سەری و 45 000 دینار بۆ کورسییێن ل خوارێ. ڕێڤەبەریا بەریکانێ بریاردا ژمارا تەماشەکەران نەزێدەتربیت ژ 160 000 کەسان.

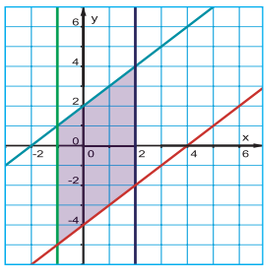
أ ژمارا پلێتێن ژ هەر جۆرەکی بێنە فرۆتن بهەژمێرە بۆ دەستکەفتنا پترترین قازانج، بۆ زانین ژمارا کورسییێن ل سەری نە زێدەترە ژ 120 000 کورسییان و ژمارا کورسییێن ل خوارێ نە زێدەترە ژ 60 000 کورسییان.

ب سیستەم و شیکار چەوا دێ هێنە گوهۆڕین هەکەر ڕێڤەبەریا بەریکانێ پێشبینیێ بکەت کو داهاتێ هەر کورسییەکی ژ کورسییێن ل سەری 60 000 دینار بن و داهاتێ هەر کورسییەکی ژ کورسییێن ل خوارێ 30 000 دینار بن، ژ ئەگەرێ فرۆتنا پیتزا و تەزیاتییان؟

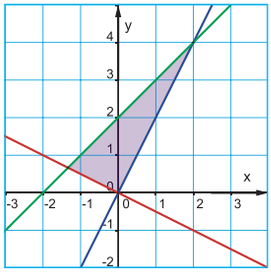
17 **پیشەسازی:** دەزگەهێ الـ(سباح) دوو جۆرێن پانکان دروستدکەت، دروستکرنا پانکەیەکا ژ جۆرێ ئێکێ 4 دەمژمێر پێدڤێن و 40 000 دیناران قازانج دکەت، و دروستکرنا پانکەیەکا ژ جۆرێ دووێ 6 دەمژمێر پێدڤێن و 80 000 دیناران قازانج دکەت. هێزا بەرهەمئینانا ڕۆژانە نە زێدەترە ژ 15 پانکەیان ژ جۆرێ ئێکێ و 4 پانکە یان ژ جۆرێ دووێ. ژمارا کێمترین دەمژمێرێن کاری ل ئەڤی دەزگەهی چەندە دابرێ قازانجێ ڕۆژانە نە کێمتر بیت ژ 400 000 دیناران؟

ئەندازە: ئەڤێن ل خوارێ وێنەیێن ڕوونکرنێنە بۆ دەڤەرێن کونجای د پرسیارێن پرۆگرامێ هێلی دا، بۆ هەر ئێکێ ژ وان سیستەمێ لاسەنگەیێن هێلی بنڤیسە.

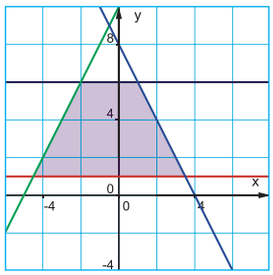
18



19



20



21 **هاتن و چۆن:** ڕێڤەبەریا ریێن بلەز بریاردا مەڤرەزەکا تایبەت پێکبینت بۆ هاریکاریا وان ترومبێلێن سووتەمەنیا وان نەمینت یان تایرەکی وان ژ کار بکەڤیت. 15 خولەك پێدڤیێن بۆ پێدانا سووتەمەنیێ و 45 خولەك بۆ چێکرنا تایری. پترترین ژمارا وان ترومبێلێ مەڤرەزە دکارت هاریکاریا وان بکەت د 8 دەمژمێراندا چەندە؟ بۆ زانین مەڤرەزە نەشێت زێدەتر ژ 28 گالۆنێن سووتەمەنیێ هەلگریت.

22 **هزرکرنا ڕەخنەگر:** ئەرێ چێدبیت پرسیارەکا پرۆگرامێ هێلی شیکارنەبت؟ نموونەیەکێ بینە بۆ پالپشتیا بەرسڤا خۆ.

23 **خوارن:** کارگەهەکا خوارنا تەندروستی دوو جۆرێن خوارنێ بەرهەم دئینت ب زێدەکرنا پرۆتینا صویا و ڤیتامینان. چێکرنا یەکەیەکێ ژ جۆرێ ئێکێ پێدڤی هەیە ب دوو ئۆنسێن پرۆتینا صویا و ئونسەکا فیتامینا، و 25 000 دیناران قازانج دکەت. و چێکرنا یەکەیەکێ ژ جۆرێ دووێ پێدڤی هەیە ب 3 ئونسێن پرۆتینان صویا و ئۆنسەکا ڤیتامینان، و 32 000 دیناران قازانج دکەت. چەند یەکە ژ هەر جۆرەکی دڤێت کارگەهـ بەرهەم بینت دا پترترین قازانج بکەت هەکەر بزانی کو گەنجینەیێ کارگەهێ ژ پروتینا صویا و ڤیتامینان 100 ئونسە؟

24 **هزرکرنا رەخنەگر:** نموونەکێ بنڤیسە لسەر پرسیارەکا پرۆگرامێ هێلی دەڤەرا کونجای یا وێ بەهایەکی سالب بخوڤە بگرت.

25 **بنڤیسە:** هەکەر یا پێدڤی بوو تو ل دویڤ بلندترین بەها یان بچویکترین بەهایێ نەخشەیا بمفا بگەری ل پرسیارا پرۆگرامێ هێلی ل دووڤ مەرجێن پرسیارێ. چەوە ئەڤێ دیار دکەی؟

26 **بنڤیسە:** چەوا پۆتانێن سەرێن دەڤەرا بمفا دیاردکەی.

دەروازەیەك

بۆ مێژوویا بیرکاریێ

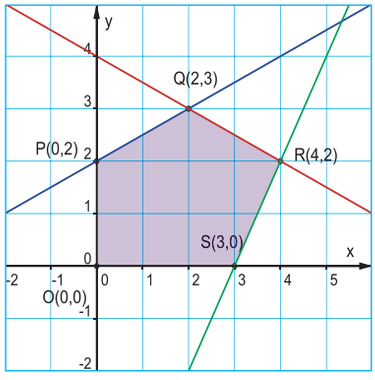
پەرەپێدانا زانستێ پرۆگرامێ هیلی هاتە ئەنجامدان ل دەمێ چەنگێ جیهانیێ یێ دووێ د سەدێ بیستیدا. ئەڤی زانستی، کو ئەو بەشەکە ژ زانستەکی بەرفرەهتر دبێژنێ تویژینا کرداران رۆلەکێ گرنگ ئینا بۆ سەرکەفتنێ ل ئەوی چەنگی ژ ئەگەرێ دابەشکرنا پێدڤیێن سەربازیێ ب شێوەیەکێ باش.

ئامادەکرن بۆ ئەزموونێ

27 کیژ خال مەزنترین بها دەتە نەخشەیا بمفا $P = -x + y$ ل پرسیارا پرۆگرامێ هێلی کو شێوەیێ بەرامبەر دەڤەرا بمفایا وێ دنوێنت؟

أ) p ب) Q

ج) R د) S



28 سەرێن دەقەرا بمفا ل پرسیارەکا پرۆگرامێ هێلی ئەڤ خالەنە $(0,0)$، $(-1,2)$، $(-2,6)$.

کیژ نەخشەیا بمفا ل خوارێ کێمترین بهایێ سالب هەیە د دەقەرا کونجایدا.

أ) $P=-4x+y-1$ ج) $P=-x+3y+2$

ب) $P=12x+7y$ د) $P=-5x-y$

29 کۆمپانیەکا مەزن یا ئاڤاکرنێ پلانەك دروستکر بۆ ئاڤاکرنا هندەك ئاڤاهییێن بازرگانیێ و هندەك ئاڤاهییێن ئاکنجیبوونێ لسەر پارچەکا ئەردی رووبەرێ وی $30\,000\ m^2$. بۆ ئاڤاکرنا هەر ئاڤاهیەکا ئاکنجیبوونێ $250\ m^2$ دڤێت، و ئێك ملیون دینار قازانج دکەت، و بۆ ئاڤاکرنا هەر ئاڤایەکا بازرگانیێ $3000\ m^2$ دڤێت، و 20 ملیون دینار قازانج دکەت. کیژ ڤانێن ل خوارێ دبیتە نەخشەیا بمفا بۆ ڤێ پرسیارا پرۆگرامێ هێلی، و مەزنترین بەهای دابین دکەت؟

هەکەر ژمارا ئاڤاهییێن بازرگانیێ نە زێدەتربیت ژ 6 ئاڤاهیان.

أ) $P=250x+3000y$ ج) $P=1000000x+20000000y$

ب) $P=250x+100000y$ د) $P=300\ 000-x-6y$

بەرهنگاری و بەرفرەهکرن

30 **دەرمان:** کۆمپانیەکا چێکرنا دەرمانان پلانەك دانە بۆ ئەنجامدانا تاقیکرنا جۆرەکی نوو ژ دژێن زیندی (المضادات الحیویة) لسەر دوو جۆرێن بەکتریان A و B. دڤێت تاقیکرن وی دەرمانێ نوو بکێماتی لسەر 700 سامپلێن بەکتریان ئەنجام بدەت. ژ وان ب کێماسی 400 سامپل ژ جۆرێ B هەنە ژ بۆ هاریکاریا کومپانیێ بۆ کێمکرنا بڕێ لێچوویێ.

أ ب وێنەیێ روونکرنێ دەقەرا گونجایی بۆ پرسیارێ بنوێنە.

ب هەردوو خال $(400,350)$ و $(350,400)$ چ دخوینن بۆ ڤێ پرسیارێ؟

ج ئەرێ هەر ئێك ژ وان هەردوو خالان مەرجێن پرسیارێ ساخ دکەن؟ هۆیێ روونبکە.

پێداچوونا لوولپێچی

ل هەر پرسیارەکێ $f(7)$ و $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ بهەژمێرە (پۆلێن پێشتر).

31 $f(x)=\frac{1}{2x-3}$ **32** $f(x)=0.5x$ **33** $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$

نەخشەیا رووتی $f(x)=|x|$ بگوهۆڕە ب مەرجەکی سەرێ وێ بکەڤتە د خالا دیارکری دا. وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ نەخشەیا نوو بکێشە. (پۆلێن پێشتر)

34 $(6,-3)$ **35** $\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$ **36** $(-2.5,0.75)$

ئەندازە: ب وێنەیێ روونکرنێ هەر سیستەمەکی لاسەنگەیان بنوێنە. ئەوان شێوەیێن ئەندازەی ئەوێن دەقەرا شیکارێ دنوێنن پۆلینبکە. (وانەیا 2 – 3)

37
$$\begin{cases} y\le 6 \\ y-2x\ge 0 \\ x\ge 0 \end{cases}$$

38
$$\begin{cases} y\ge 0 \\ y\le 2 \\ y\le x \\ x+y\le 6 \end{cases}$$

بەشی 2

ئەزموونا نیڤا بەشی

1–2 لاسەنگەییێن هێلی ب دوو نەزانراوان

ب ویێنەیێ ڕوونکرنێ هەر لاسەنگەیەکا هێلی ب دوو نەزانراوان شیکاربکە.

1. $y-1\le 5$
2. $2x+5y>10$
3. $3x-4y>5x+12$
4. $3(2x-1)+y>6x-4$

5. تارایێ 30 000 دینار هەنە بۆ کرینا کارتێن پیرۆزباهیێ. نرخێ کارتا مەزن 2500 دینارن و نرخێ کارتا بچووک 1500 دینارن. لاسەنگەیەکێ بۆ نواندنا ڤی حالەتی بنڤێسە بکارئینانا دوو نەزانراوان هەر ئێك هێمایێ ژمارا جۆرەکی کارتان بیت. ب ویێنەیێ ڕوونکرنێ ڤێ لاسەنگێ شیکاربکە.

2–2 سامپلیێن هیلی

6. نۆژدارەکا زاروکان ئەڤێن ل خواری ل چەند حەفتیان تۆمارکرن، کو ئەو دبیتە ژمارا دەمژمێرین کارێ وێ دحەفتیەکێدا، و پارێن وەرگرتین ب هەزاران دیناران. خشتێ ل خوارێ وان پێداییان دیاردکەت ل چەند حەفتیان و ب هەرەمەکی هاتینە هەلبژارتن.

ژمارا دەمژمێران	8	23	18	30	12	28
کرێ	152	465	315	530	240	525

أ ڤان پێداییان ب خالێن ڕوونکرنێ بنوێنە بکارئینانا ژمارەیان دەمژمێران وەك گۆڕاوێ ئازاد.

ب بژمێرا ڕوونکرنێ بکاربینە بۆ هەژمارتنا هاوکۆلکێ پێکڤەگرێدانێ و هاوکێشەیا راستەهێلی باشترین نواندن بۆ ڤان پێداییان. لارێ راستەهێلی چ دگەهینت بۆ نۆژدارێ؟

ج هاوکێشەیا تە دیارکری بکاربینە بۆ خەملاندنا پارێ نۆژدار وەردگرت هەکەر 40 دەمژمێران کاربکەت د حەفتیەکێدا.

3–2 شیکارکرنا سیستەمێن لاسەنگەییێن هێلی

ب ویێنەیێ ڕوونکرنێ هەر سیستەمەکی لاسەنگەیان شیکاربکە.

7. $\begin{cases} y-x<3 \\ y+x<3 \end{cases}$
8. $\begin{cases} y+x\le 0 \\ y\le 4-x \end{cases}$
9. $\begin{cases} y\ge 2x+3 \\ y>-x \end{cases}$

4–2 پرۆگرامێ هێلی

ل هەر پرسیارەکێ، دەڤەرا بمفا ب ویێنەیێ ڕوونکرنێ دیاربکە، پاشی مەزنترین بەها یان بچووکترین بەها بۆ نەخشەیا بمفا $P=4x+5y$ دیاربکە.

10. بچووکترین بها $\begin{cases} x\ge 0 \\ y\le x-1 \\ y\le -\frac{1}{2}x+4 \end{cases}$
11. مەزنترین بها $\begin{cases} x\le 2 \\ y\ge 0 \\ y\le 2x+4 \\ y\le -3x+9 \end{cases}$

5-2

شیکارکرنا سیستەمێن هێلی ب سێ نەزانراوان

Solving Linear systems in 3 unknowns

بۆچی ئەم فێری قی بابەتی دبین؟

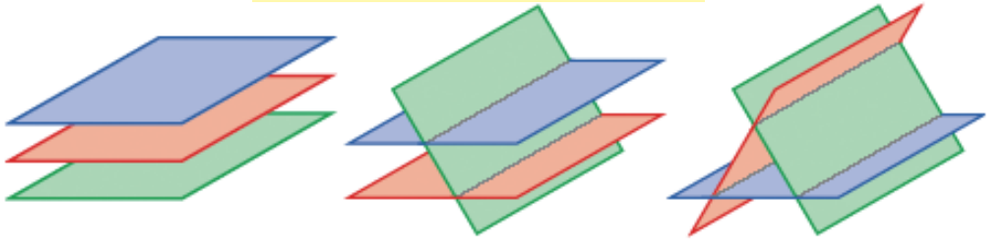
تو دشێی سیستەمێ هێلی ب سێ نەزانراوان بکاربینی بۆ شیکارکرنا گەلەك پرسیاران د ژیانا رۆژانەدا، وەك دیارکرنا سیستەمێ گرانکرنا نمران بۆ وەرگرتنێ ل کولیژا ئەندازەیێ (نموونە 2).

ئارمانج

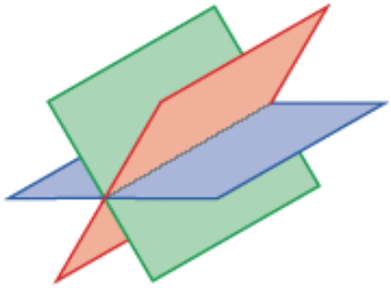
- نواندنا شیکارین سیستەمێ هێلی ب سێ نەزانراوان د بۆشایێ پۆتانیدا.
- شیکارکرنا سیستەمێ هێلی ب سێ نەزانراوان ب جەبرێ

ل پۆلێن پێشتر تو فێربوویی چەوا سیستەمێن هێلی یێ دوو هاوکێشەیێن هێلی ب دوو نەزانراوان یان سیستەمێن هێلی 2×2 شیکاربکەی. گەلەك جاران دبێژنە سیستەمێ هیلی یێ سێ هاوکێشەیێن هێلی ب سێ نەزانراوان سیستەمێ 3×3 .بۆ دیتنا شیکارەکا بتنێ بۆ سیستەمێ هاوکێشەیێن هێلی، دڤێت ژمارا هاوکێشان یەکسان بیت ب ژمارا نەزانراوان بشێوەیەکی گشتی. ل بیرا تە بیت دبەشێ پێشتردا، هاوکێشەیا هێلی ب سێ نەزانراوان د هاتە نواندن ب رووتەختەکی دبۆشایێ پۆتانیدا. دەمێ سیستەمەکی هێلی یێ سێ هاوکێشەیێن هێلی ب سێ نەزانراوان دبۆشایێ پۆتانیدا بنوێنی، دێ سێ رووتەخت بدەست تە کەڤن. چێدبیت ئەو رووتەخت ئێکودوو ببڕن یان نە برن. هەر خالەکا هاوبەش لناڤبەرا هەرسێ رووتەختان، شیکارا سیستەمی دنوێنت. ژ ئەڤێ دەرئەنجام دکەین کو چێدبیت سیستەمی بتنێ ئێك شیکار هەبیت یان ژمارەیەکا بێ سنوور یان شیکاران هەبیت، یان هیچ شیکارەك نەبیت.

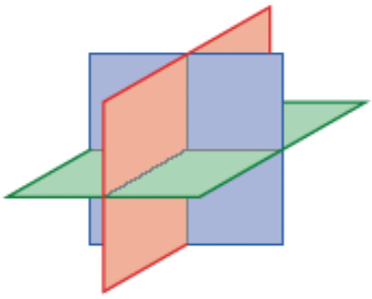
سیستەمێ ستەم (شیکار نینە)



سیستەمێ بێ سنوور
(ژمارەکا بێ دوماهیك یا شیکاران هەیە)



سیستەمێ سنووردار
(شیکارەکا بتنێ هەیە)



چێدبیت دیارکرنا شیکارێن سیستەمێ هێلی 3×3 بکارئینانا نواندنێ دبۆشایێ پۆتانیدا کارەکی زۆر زەحمەت بیت. لێ تو دکاری قی سیستەمی ب رێین جەبرێ شیکاربکەی بکارئینانا لادانێ و لجهدانانێ دا ژ سیستەمێ هێلی 3×3 بگۆهۆری بۆ سیستەمێ هێلی2×2 ، پاشی ئەو سیستەمێ پەیدابوویی ب رێین بەری نۆکە تو فێربوویێ شیکاربکە.

نموونـــــه 1 شیکارکرنا سیستەمێ هێلی 3 هاوکێشەی ب سێ نەزانراوان

ڕێیا لادانێ بکاربینە بۆ شیکارکرنا سیستەمێ هێلی ل خوارێ.

$$\begin{cases} x+2y-3z=-2 & \text{❶} \\ 2x-2y+z=7 & \text{❷} \\ x+y+2z=-4 & \text{❸} \end{cases}$$

پێنگاڤا (1) یێ: نەزانراوەکی لا بدە، باشترە نەزانراوێ y لا بدەی، چونکی هاوکۆلکێن y ل هاوکێشەیا ❶ و ❷ دوو نیشانێن بەرۆڤاژی هەنە.

❶ $x+2y-3z=-2$

❷ $2x-2y+z=7$

❹ $3x-2z=5$ ← هاوکێشا ❶ و ❷ کۆمبکە

هەردوو هاوکێشەیان ❶ و ❸ بکاربینە بۆ دیتنا هاوکێشەیەکا دی ب دوو نەزانراوان x و z

❶ $x+2y-3z=-2$

❸ $-2(x+y+2z=-4)\rightarrow$ $-2x-2y-4z=8$

❺ $-1x-7z=6$ ← هاوکێشە ❸ ل ژمارە -2 بدە پاشی ئەنجامی ل گەل هاوکێشا ❶ کۆمبکە.

تە نۆکە سیستەمێ هیلی 2×2 هەیە.

❹ $3x-2z=5$

❺ $-x-7z=6$

پێنگاڤا (2) یێ: نەزانراوەکی دی لا بدە، پاشی هاوکێشەیا پەیدابوویی شیکاربکە، بەهایێ نەزانراوێ سێیێ دێ بدەست تە کەڤت. نەزانراوێ x لابدە.

❹ $3x-2z=5$

❺ $3(-x-7z=6)\rightarrow$ $-3x-21z=18$

$-23z=23$

$z=-1$ ← هاوکێشە ❺ ل ژمارە 3 بدە پاشی ئەنجامی ل گەل هاوکێشا ❹ کۆمبکە.

پێنگاڤا (3) یێ: هاوکێشەیەکێ ژ هەردوو هاوکێشەیێن سیستەمێ 2×2 بکاربینە بۆ هەژمارتنا بەهایێ x.

❶ $-x-7z=6$

❷ $-x-7(-1)=6$ ← ل جهێ z بهایێ وێ -1 دانە

$x=1$

پێنگاڤا (4) یێ: بەهایێن x و z د هاوکێشەیەکا بنەرەتدا دانە، بهایێ y بەهەژمێرە.

❶ $x+y+2z=-4$

❷ $(1)+y+2(-1)=-4$ ← لجهدانانێ بکاربینە

$y=-3$

شیکارا سیستەمی دبیتە $(1,-3,-1)$

خالا چاڤدێریێ

1. ڕێیا لادانێ بکاربینە بۆ شیکارکرنا سیستەمێ ل خوارێ.

$$\begin{cases} -x+y+2z=7 \\ 2x+3y+z=1 \\ -3x-4y+z=4 \end{cases}$$

تو دکاری ڕێیا لجهدانانێ بکاربینی بۆ شیکارکرنا سیستەمێ هێلی 3×3 ، و دڤێت بیرۆکێ گوهۆڕینا سیستەمێ هێلی 3×3 بۆ سیستەمێ 2×2 بکاربینی.

نموونـــــه 2

بجهێنان لسەر بەریکانا وەرگرتنێ ل کولیژەکێ

ئەوێن دڤێن ل کولیژا ئەندازیاریێ بهێنە وەرگرتن پشت بەست دبن لسەر بەریکانا نمرێن 3 بابەتان، بیرکاری، زانست و زمانێ ئینگلیزی. بۆ هەژمارتنا سەرجەمێ نمرەیێن پالیوراوان، لیژنا پشکنینێ

پالێوراو	بیرکاری	زانستەکان	زمانی ئینگلیزی	سەرجەم
سۆزان	90	60	70	700
ئازاد	60	70	80	590
هوشیار	0	60	60	240

پشت بەست دبیت ب سیستەمێ (گرانکرنێ)، بلندکرنا نمرا هەر بابەتەکی (تثقیل الدرجة) بۆ هەر پالیوراەکی (نمرە دئێتە لێکدان لە گەل ژمارەکێ). چێدبیت گرانکرنا نمرا هەر بابەتەکی یا جیاواز بیت ژ نمرەیێن هەردوو بابەتێن دی. خشتێ بەرامبەر نمرەیێن 3 ، پالیوراوان ل سێ بابەتان و سەرجەمێ هەر ئێکێ ژوان پشتی گرانکرنا نمرا وی دیاردکەت. پێدایێن خشتێ بۆ هەژمارتنا گرانکرنا نمرا هەر بابەتەکی بکاربینە.

پێنگاڤا (1) یێ: هێمایێ گۆڕاوێ x بۆ بلندکرنا نمرا بابەتێ بیرکاری و گۆڕاوی y بۆ بلندکرنا نمرا بابەتێ زانستی و z بۆ بلندکرنا نمرا بابەتێ زمانی ئینگلیزی بکاربینە.

سیستەمێ هاوکێشان بنڤیسە کو پێدایێن خشتەی بنوێنت.

$$\begin{cases} 90x+60y+70z=700 \ \textcircled{1} \\ 60x+70y+80z=590 \ \textcircled{2} \\ 60y+60z=240 \ \textcircled{3} \end{cases}$$

نمرەیێن سۆزان
نمرەیێن ئازاد
نمرەیێن هشیار

بەرێ خو بدە هاوکێشا (3)یێ، کۆراوێ x تێدا نەیی دیارە، چونکی هشیار سفر وەرگرتییە ل بابەتێ بیرکاری، نەبوونا گۆراوەکی هیچ کارەکی ناگۆڕێت، هەکەر تو بەرێ خو بدەیە هاوکێشا (3)، تو دکاری بەهایێ گۆراوی y پێ بەهایێ گۆڕاوێ z بهەژمێری. ئەڤ کارە هاریکاریێ دکەت بۆ بکارئینانا لجهدانانێ ب مەرەما گۆهۆرینا ڤی سیستەمی بۆ سیستەمێ هیلی یێ دوو هاوکێشەیێن ب دوو نەزانراوان

پێنگاڤا (2) یێ: ل هاوکێشا ❸ گۆڕاوێ y پێ گۆراوێ z بهەژمێرە.

$$60y+60z=240$$
$$y=4-z$$

گۆراوێ y پێ گۆراوێ z بهەژمێرە.

پێنگاڤا (3) یێ: ل هەردوو هاوکێشان ❶ و ❷ ، لجهێ (y) بەهایێ وێ دانە.

$$\begin{cases} 90x+60(4-z)+70z=700 \rightarrow \\ 60x+70(4-z)+80z=590 \rightarrow \end{cases} \begin{cases} 90x+10z=460 \ \textcircled{4} \\ 60x+10z=310 \ \textcircled{5} \end{cases}$$

لجهدانان و سادەکرن

پێنگاڤا (4) یێ: لادانێ بکاربینە بۆ شیکارکرنا وی سیستەمێ بدەست تەکەفتی هاوکێشا ❺ ژ هاوکێشا ❹ دەربکە

$$\begin{array}{rl} 90x+10z=460 & \textcircled{4} \\ 60x+10z=310 & \textcircled{5} \\ \hline 30x \quad =150 & \textcircled{6} \end{array}$$

پێنگاڤا (5) یێ: وێ هاوکێشا بدەست تە کەفتی شیکاربکە.

$$30x=150$$
$$x=5$$

پێنگاڤا (6) یێ: د هاوکێشا ❹ دا ل جهێ x بەهایێ وێ دانە بۆ هەژمارتنا بەهایێ z .

$$90(5)+10z=460$$
$$10z=10$$
$$z=1$$

پێنگاڤا (7) یێ: د هاوکێشا ❶ دا، بەهایێن x ، z دانە بۆ هەژمارتنا بەهایێ y

$$90(5)+60y+70(1)=700$$
$$60y=180$$
$$y=3$$

شیکارا سیستەمی دبیتە $(5, 3,1)$ ، نمرەیێن بیرکاریێ ب هاوکولکێ 5 و زانستێ ب هاوکولکێ 3 و ئینگلیزی ب هاوکۆلکێ 1 دئینە بلندکرنا (گرانکرن).

2. بلندکرنا (گرانکرنا)نمرا هەر بابەتەکی ل بەریکانا وەرگرتنێ ل کولێژا نۆژداریێ ل دووڤ خشتێ پێداییان دیاربکە.

پالیۆراو	بیرکاری	زانست	زمانێ ئینگلیزی	سەرجەم
شیرین	80	70	50	430
سولاف	70	80	0	370
سانا	90	70	80	490

بۆ هەر سیستەمەکی دنموونەیا (1) و (2) دا، بتنێ ئێك شیکار هەیە، لێ چێدبیت سیستەمێ هیلی 3×3 شیکار نەبیت یان ژمارەکا بێ سنوور یا شیکاران هەبیت.

نموونـــــه 3 پۆلینکرنا سیستەمێن هاوکێشەییێن هێلی 3×3

ڤی سیستەمی پۆلینبکە و ژمارا شیکارین وی دیاربکە.

$$\begin{cases} 4x-2y+4z=8 & \text{❶}\\ -3x+y-z=-4 & \text{❷}\\ -2x+2y-6z=4 & \text{❸}\end{cases}$$

تو دکاری ڕێیا لادانێ بکاربینی، چونکی هەردوو هاوکولکێن گۆراوێ y دهەردوو هاوکێشەییێن ❶ و ❸ دا دژێ کۆمکرنێنە بۆ ئێکودوو، ڤان هەردوو هاوکێشان کۆمبکە.

$$\begin{array}{rl} 4x-2y+4z=8 & \text{❶}\\ -2x+2y-6z=4 & \text{❸}\\ \hline 2x\qquad -2z=12 & \text{❹}\end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 4x-2y+4z=8 & \\ -6x+2y-2z=-8 & \\ \hline -2x\qquad +2z=0 & \text{❸}\end{array} \qquad \begin{array}{l} 4x-2y+4z=8\\ 2(-3x+y-z=-4)\rightarrow \end{array}$$

سیستەمەکی دوو هاوکێشەییێن هێلی ب دوو نەزانراوان بدەست تە کەفت.

$$\begin{cases} 2x-2z=12 & \text{❹}\\ -2x+2z=0 & \text{❺}\end{cases}$$

گۆڕاوێ x لا بدە. هەردوو هاوکێشان ❹ و ❺ کومبکە.

$$\begin{array}{rl} 2x-2z=12 & \text{❹}\\ -2x+2z=0 & \text{❺}\\ \hline 0=12 & \times\end{array}$$

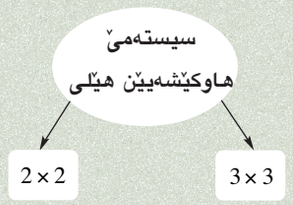
ئەڤ یەکسانبوونە نەیا دروستە، چونکی 0 نەیەکسانە ب 12 ، و ژ ڤێ دیاردبیت ئەڤ سیستەمە ستەمە.

3. هەر سیستەمەکی پۆلینبکە و ژمارا شیکاران دیاربکە.

أ
$$\begin{cases} 3x-y+2z=4\\ 2x-y+3z=7\\ -9x+3y-6z=-12\end{cases}$$

ب
$$\begin{cases} 2x-y+3z=6\\ 2x-4y+6z=10\\ y-z=-2\end{cases}$$

هزربکه و گەنگەشیێ بکه



1. بەرێ خو بدە سیستەمێن ستەم و سیستەمێن بێ سنوور، کو د لاپەرێ ئێکدا ژ قێ وانێ هاتینە. بەحسێ بارەکی دی بکە بۆ سێ رووتەختان کو سیستەمەکی ستەم بنوێنت، و بارەکی دی کو سیستەمەکی بێ سنوور بنوێنت.
2. ریٚکخەربە قێ خشتێ کوپیبکە، پاشی تەمامبکە، بەحسێ لایەنێن هاوشێوە و لایەنێن جیاواز بکە لناڤبەرا سیستەمێ هێلی 3×3 و سیستەمێ هێلی 2×2.

فێربە و خۆبەرێبکە

5-2 ڕاهێنان

ڕاهێنانێن ئاراستەکری

بەرێ خو بدە نموونـە 1 ڕێیا لادانێ بۆ شیکارکرنا هەر سیستەمەکی بکاربینە.

1) $\begin{cases} -2x+y+3z=20 \\ -3x+2y+z=21 \\ 3x-2y+3z=-9 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+2y+3z=9 \\ x+3y+2z=5 \\ x+4y-z=-5 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+2y+z=8 \\ 2x+y-z=4 \\ x+y+3z=7 \end{cases}$

بەرێ خو بدە نموونـە 2

4) **کارگێریا کاری:** ریٚڤەبەریا باغچێ ئاژەلان سێ جۆرێن کارتان دفرۆشیت بۆ زارۆك و ناوجوان و مەزنان. خشتێ ل خوارێ فرۆتنا کارتێن چوونا ژۆرێ بۆ باغچێ ئاژەلان دیاردکەت ل ماوەیێ 3 دەمژمێران. نرخێ هەر کارتەکا ژ جۆرەکی دیاربکە.

چوونا ژۆر بۆ باغچێ ئاژەلان				
کارت	بۆ مەزنان	بۆناوجوانان	بۆ زارۆکان	نرخێ فرۆشتنان
16:00 – 15:00	5	10	12	310 000
17:00 – 16:00	5	5	4	155 000
18:00 – 17:00	4	2	3	92 000

بەرێ خو بدە نموونـە 3 هەر سیستەمەکی هێلی پۆلینبکە و ژمارا شیکاران دیاربکە.

5) $\begin{cases} 2x+4y-2z=4 \\ -x-2y+z=4 \\ 3x+6y-3z=10 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x+4y-5z=-10 \\ -x-2y+8z=16 \\ -2x+4y+2z=4 \end{cases}$

7) $\begin{cases} -2x+3y+z=15 \\ x+3y-z=-1 \\ -5x-6y+4z=-16 \end{cases}$

ڕاهێنان و شیکارکرنا پرسیاران

ڕاهێنانێن ئازاد

بۆ شیکارکرنا پرسیاران	بەرێ خۆ بدە نموونە
10 -8	1
11	2
14 -12	3

بۆ شیکارکرنا هەر سیستەمەکی ڕێیا لادانێ بکاربینە.

8 $\begin{cases} 2x-y-3z=1 \\ 4x+3y+2z=-4 \\ -3x+2y+5z=-3 \end{cases}$ **9** $\begin{cases} 5x-6y+2z=21 \\ 2x+3y-3z=-9 \\ -3x+9y-4z=-24 \end{cases}$ **10** $\begin{cases} 4x+7y-z=42 \\ -2x+2y+3z=-26 \\ 2x-3y+5z=10 \end{cases}$

11 **بۆ خۆشیێ:** ل بەریکانا ((سترانبێژێ پاشەرۆژێ)) لیژنەیەك هاتە پێکئینان، هەلسەنگاندنا سترانبێژان بکەت پێ سێ پیڤەران ((بەهرە و سەکنین لسەر شانویێ و بجهئینان)). کو بۆ هەر پیڤەرەکی ڕێژەیا سەدی یا هەلسەنگاندنا دوماهیێ دیاربکەت. خشتێ ل خوارێ هەلسەنگاندنا سێ سترانبێژان پێ هەر پیڤەرەکی و هەلسەنگاندنا دوماهیێ دیاردکەت. ڕێژەیا سەدی یا هەلسەنگاندنا دوماهیکێ بۆ هەر پیڤەرەکی چەندە؟

بەریکانا سترانبێژێ پاشەرۆژێ				
بەریکانکەر	بەهرە	ڕاوەستیان لسەر شانۆیێ	بجهئینان	هەلسەنگاندنا دوماهیێ
زانا	8	9	10	9.2
ڤیان	9	7	8	8.1
ئاراس	6	10	8	7.8

هەر سیستەمەکێ هێلی پۆلینبکە و ژمارا شیکاران دیاربکە

12 $\begin{cases} 4x-3y+z=-9 \\ -3x+2y-z=6 \\ -x+3y+2z=9 \end{cases}$ **13** $\begin{cases} 3x+3y+3z=4 \\ 2x-y-5z=2 \\ 5x+2y-2z=8 \end{cases}$ **14** $\begin{cases} -x+y+z=8 \\ 2x-2y-2z=-16 \\ 2x-y+4z=-6 \end{cases}$

15 **ئەندازە:** دسێگۆشەیا (ABC) دا پیڤانا گۆشە یا A دوو جارانی سەرجەمێ پیڤانێن هەر دوو گۆشەیێن C و B یە. و پیڤانا گۆشەیا B سێ جارانێ پیڤانا گۆشە C یە. پیڤانا هەر ئێك ژ وان چەندە؟

16 **وەرزش:** ل مێژوویا ئێکەتیا تەپا سەبەتێ یا ئەمریکا (لوێ دامبیە) ئێکەمێن کەس بوو ل تۆمارکرنا خالان. خالێن وی تۆمارکرین دگەهشتنە 726 13 خال، و دابەشکربوون لسەر کۆلێن سێ خال و گۆلێن دوو خال و گۆلێن ئێك. دامبیە 144 2 خال ل کۆلێن دووخال زێدەتر ژ ئەوێن ل گۆلێن ئێك خال تۆمارکرن. و 558 1 خال ل گولێن ئێك خال زێدەتر ژ ئەوێن ل گۆلێن سێ خال تۆمارکرن. چەند خال ل هەر جۆرەکی تۆمارکرن؟

17 **هزرکرنا ڕەخنەگر:** ئەڤ سیستەمێ ل خوارێ ژ دوو هاوکێشەیێن سێ نەزانراو پێکهاتیە.

$$\begin{cases} x+2y+4z=4 \\ 2x+3y+z=12 \end{cases}$$

أ دێ چ روودەت دەمێ هەولبدەی ڤی سیستەمی شیکاربکەی؟ بەحسبکە

ب روونبکە بۆچی دڤێت ژمارا هاوکێشەیان دسیستەمێ هیلی دا نەکێمتربیت ژ ژمارا نەزانراوان هەتا سیستەمی بتنێ ئێك شیکار هەبیت؟

18 **بنڤیسە:** هەردوو روونەخت ژ ناڤبەرا سێ روونەختێن ب سیستەمێ هاوکێشەیێن هیلی 3×3 هاتینە نواندن ب ڕاستەهێلەکی ئێکودوودبڕن. جۆرێ ئەوێ شیکارا دشیاندا بۆ ڤی سیستەمی چییە؟

19 ئەڤ سیستەمێ ل خوارێ هەر سێ روویێن هەرەمەکا بنکێ وێ سیانێ (سێگۆشە) دنوێنت (هەر هاوکێشەیەك رووتەختەکی دنوێنت). بنکێ هەرەمێ دکەڤتە د رووتەختێ پۆتانێ (XY) دا، و پیڤانێن وێ ب مترانە.

$$\begin{cases} x+y+z=53 \\ 3x-2y+z=69 \\ -x+2y-z=-59 \end{cases}$$

أ پۆتانێن سەرێ هەرەمێ دیاربکە.

ب ئەندازیاری دڤێت ستوونکەکێ بۆ هەرەمێ دانت بۆ راگرتنا سەرێ هەرەمێ. بلندهیا ئەڤێ ستوونکێ چەندە؟

ج پۆتانێن خالا راگرتنا ستوونکێ چەندە؟

ئامادەکرن بۆ ئەزموونێ

20 کیژ خال شیکارا ڤی سیستەمی دنوێنت؟

$$\begin{cases} 2x+y+3z=-1 \\ 4x+2y+3z=1 \\ x-y+4z=-6 \end{cases}$$

أ $(2,-2,-1)$ ج $(2,1,-1)$

ب $(0,2,-1)$ د $(3,-2,2)$

21 سۆزان و میران و ساڤان خوشك و برایێن ئێکودوونە: ژیێ سوزانێ دووجارانی ژیێ میرانییە کو ئەو ب 12 سالان ژ ژیێ ساڤانێ کێمترە. پشتی 5 سالان ژیێ ساڤانی دبیتە دوو جارانێ ژیێ میرانێ. ژیێ هەر ئێك ژوان چەندە؟

أ سۆزان 6 میران 3 ساڤان 15

ب سۆزان 34 میران 17 ساڤان 29

ج سۆزان 5 میران 10 ساڤان 22

د سۆزان 14 میران 7 ساڤان 91

22 **بەرسڤا کورت:** بەهایێ x چەندە ل شیکارا سیستەمێ

$$\begin{cases} x+4y=6 \\ 2x+3z=12 \\ 4y+z=10 \end{cases}$$

بەرهنگاری و بەرفرەهکرن

23 رێیا گونجای بۆ شیکارکرنا ئەڤی سیستەمی بکاربینە.

$$\begin{cases} w+2x+2y+z=-2 \\ w+3x-2y-z=-6 \\ -2w-x+3y+3z=6 \\ w+4x+y-2z=-14 \end{cases}$$

24 **ئابووری:** سێ هەڤالان سێ جۆرێن دراڤی: أ ، ب ، ج ئێخستنە کاری، هەر ئێکی ژ وان ئێك ملیون دینار دانا ژ هەرسێ جۆرێن دراڤی. خشتێ ل خوارێ هەر جۆرەکی دراڤی، ل گەل قازانجێ وی ل دوماهیا سالێ بۆ هەر هەڤالەکی دیاردکەت. ڕێژەیا سەدی بۆ دەستکەفتنا هەر جۆرەکی بهەژمێرە.

پارە				
ناڤێ وی	أ	ب	ج	قازانج
ئازاد	300 000	300 000	400 000	56 000
نوزاد	600 000	200 000	200 000	76 000
دڵسۆز	100 000	300 000	600 000	30 000

پێداچوونا لوولپێچی

هەردوو پۆتانێن وێنەیێ خالا $(-3, 2)$ ل هەر راکێشانەکێ چەندە؟ (پۆلێن پێشتر)

25 6 یەکە بۆ ڕەخێ ڕاستێ، ئێك یەکە بۆ ڕەخێ سەری. **26** 4 یەکە بۆ ڕەخێ چەپێ، دوو یەکە بۆ ڕەخێ خوارێ.

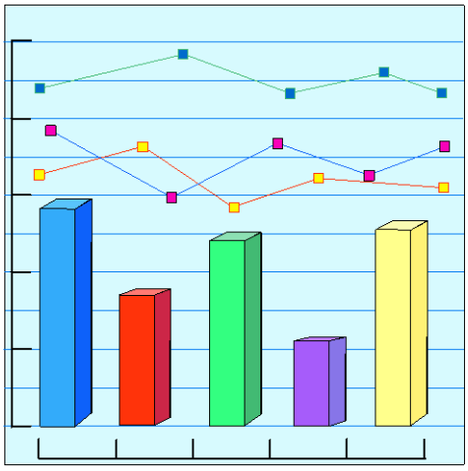
27 **ئاڤاهی:** پیڤانێن ژۆرا خوارنێ لسەر نەخشی خانیەکی $8cm \times 11cm$ بوو. پیڤانێن دروست بۆ ژۆرا خوارنێ چەندە، هەکەر پیڤەرێ نەخشێ $1cm : 0.65m$ بیت؟ (پۆلێن پێشتر)

هەر هاوکێشەیەکا ل خوارێ لسەر شێوەیێ لاری – ئێکودووبڕینێ بنڤیسە. پاشی وێنەیێ وی ڕاستەهێلی بکێشە. (پولێن پێشتر)

28 $4x - 3y = -6$ **29** $3y - 2x = -12$ **30** $2x + 5y = 15$

6-2 پیڤەرێن ئامارەیی

Statistical Measurements



ئارمانج

- هەژمارتنا پیڤەرێن رووکرنا چەقی و پیڤەرێن پرتبوونی بۆ کۆمەلەکا پیدایێن ئامارەیی.
- لێکۆلینا بهایێ پەرگر (القيمة المتطرفة) د کۆمەلّەکا پێداییاندا.

کی ئەقێ بکاردئینت؟

ئامارناس پیڤەرێن رووکرنا چەقی و پیڤەرێن پرتبوونێ بۆ شلۆڤەکرنا پێدایێن ئامارەی بکاردئینن (نموونە 2).

ل بیرا تەبت کو ناڤەندێ ژمارەی و ناڤەراست و باو پیڤەرێن رووکرنا چەقی نە. ئانکو ئەو پیڤەرە بەحسێ چەقێ کۆمەلەکا پێداییان دکەن.

ناڤەندێ ژمارەیی Mean : ئەو ئەنجامێ دابەشکرنا سەرجەمێ هەمی بهایانە لسەر ژمارا وان بەهایان و ب هێمایێ $\bar{x}$ دئیتە دیارکرن. **باو Mode**: ئەو بهایە کو پترترین دووبارەبوون هەبیت دکۆمەلا بهایاندا. چێدبیت کومەلا پێداییان پتر ژ ئێك باو هەبیت و چێدبیت باو نەبت.

ناڤەراست Median : ئەو بهایەیە کو دکەڤتە ناڤەراستا بهایان پشتی هاتینە ڕێزکرن بەرەڤ ژێریان بەرەڤ ژوور و ژمارا بهایان کت بت. و ناڤەراست دبیتە تێکرایێ هەردوو بهایێن دکەڤنە ناڤەراستێ هەکەر ژمارا بەهایان جووت بیت.

زاراڤ
Vocabulary

ناڤەندێ ژمارەیی یێ گرانکری (المتوسط المثقّل)
Weighted average

بەلاڤکرنا ئەگەرێ
Propability Distribution

لێکنەچوون
Variance

لادانێ پیڤانەیی
Standard Deviation

بەهایێن پەرگر
Outliers

بەهایێ پێشبینکری
Expected value

چواریك
Quartile

نموونـــــە 1 هەژمارتنا پیڤەرێن رووکرنا چەقی

ناڤەندێ ژمارەی و ناڤەراست و باو بۆ ڤێ کۆمەلا پێداییان بهەژمێرە.

{4،3،4،2،5،3،3،5،2،3،4،6}

ناڤەندێ ژمارەی: $\bar{x} = \frac{4+3+2+5+4+3+5+2+4+3+4+6}{12} = \frac{45}{12} = 3.75$

ناڤەراست: 2 2 3 3 3 **3 : 4** 4 4 5 6 $= \frac{4+3}{2} = 3.5$

باو: ئەو بهایێ کو پتر ژ وانێن دی دوبارەبوویی 3 یە ئانکو باو دبیتە 3

خالا چاڤدێریێ

1. ناڤەندێ ژمارەی و ناڤەراست و باو بۆ هەر کۆمەلەکا پێداییان بهەژمێرە.

أ {6،9،3،8}　　ب {2،5،6،2،6}

ناڤەندێ گرانکری ئەو ناڤەندێ ژمارەییە Weighted average کو ل دەمێ هەژمارتنا وی، دووبارەبوونا هەر بهایەکی بەرچاڤ دئێتە وەرگرتن وەکی هەلسەنگاندنا 30 پەرتووکان ل خشتێ ل خوارێ.

هەلسەنگاندنا پەرتووکان					
هەلسەنگاندن	★ ★ ★ ★	★ ★ ★	★ ★	★	بێ ستیر
ژمارا پەرتووکان	8	12	7	2	1

ناڤەندێ گرانکری بۆ هەلسەنگاندنا پەرتووکان دبیتە $\frac{(4)8+(3)12+(2)7+(1)2+0(1)}{8+12+7+2+1} = \frac{84}{30} = 2.8$

بهایێ پێشبینکری Expected value بۆ ڤێ تاقیکرنێ. بهایێ پێشبینکری بۆ ژمارا وان ستێرێن پەرتووکەك دەربگرت ژ ناڤ 30 پەرتووکان، بشێوەیەکی هەرەمەکی بێتە هەلبژارتن دبیتە 2.8 .

بەڵاڤکرنا ئەگەرەیی Probability distribution یا تاقیکرنەکا هەرەمەکی نەخشەیەکە هەر ئەنجامەکی دشیاندا گرێددەت ل گەل ژمارەکێ کو ئەگەرا وی بنوێنت.

نموونـــــە 2 هەژمارتنا بەهایێ پێشبینکری

خشتێ ل خوارێ بەلاڤکرنا ئەگەرێ بۆ ژمارەکا یارییێن هەر خولەکا جیهانێ ژ سالا 1923 هەتا سالا 2004 دیاردکەت. ژمارا یارییێن پێشبینکری دئێك خۆلێدا چەندە؟

خۆلێن یارییان				
ژمارەیا یارییان n	4	5	6	7
ئەگەرا n یاریێ	$\frac{5}{27}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{11}{27}$

بهایێ پێشبینکری: $4\left(\frac{5}{27}\right)+5\left(\frac{5}{27}\right)+6\left(\frac{6}{27}\right)+7\left(\frac{11}{27}\right)$ ناڤەندێ ژمارەی یێ گرانکری بکاربینە

سادەبکە $=\frac{20}{27}+\frac{25}{27}+\frac{36}{27}+\frac{77}{27}=\frac{158}{27}\approx 5.85$

ژمارا یارییێن پێشبینکری ل دەمێ ئێك خۆلی 5.85 یاری بنێزیکی.

رۆناهیەك

سەرجەمێ هەموو ئەگەران د هەر بەلاڤکرنەکا ئەگەرێدا یەکسانە 1. دنموونەیا 2 دا دبینین:

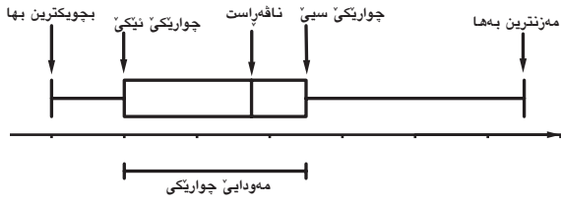
$\frac{5}{27}+\frac{5}{27}+\frac{6}{27}+\frac{11}{27}=1$

خالا چاڤدێریێ

2. خشتەیێ ل خوارێ بەلاڤکرنا ئەگەرەیێ بۆ ژمارەکا ڕووداندێ هاتن و چۆنێ د دەمێ حەفتیەکێدا ل چار ڕێیانەکێ دیاردکەت. پشت بەستن ب ئاماریێن سالا پێشتر، بهایێ پێشبینکری بۆ ژمارا ڕووداندن د حەفتیەکێدا بهەژمێرە.

ژمارا ڕووداندن n	0	1	2	3
ئەگەرا ئەنجامدانا n ڕووداندن	0.75	0.15	0.08	0.02

ڕوونکرنا سمبێلی Box - and - Whisker - Plot ئەڤە هێلکارەکە بەلاڤکرنا کومەلەکا پێداییان دنوێنت. ئەڤی وێنەیێ ڕوونکرنێ 5 خالێن سەرەکی هەنە: مەزنترین بها، بچویکترین بها، ناڤەڕاست، چاریکێ ئێکێ، چاریکێ سێیێ.



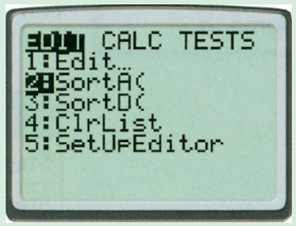
چاریکێ ئێکێ First quartile : دبیتە ناڤەڕاستێ وان بهایێن بچووکتر ژ ناڤەڕاستێ کۆمەلا پێداییان و هێمایێ وی Q_1 .

چاریکێ سێیێ Third quartile : دبیتە ناڤەڕاستێ وان بهایێن مەزنتر ژ ناڤەڕاستێ کومەلا پێداییان و هێمایێ وی Q_3 .

مەودایێ چاریکی Interquartile range : جیاوازیا لناڤبەرا چاریکێ سێیێ و چاریکێ ئێکێ ئانکو دبیتە Q_3-Q_1 و 50٪ ژ پێداییان دنوێنت.

ژ قوتابی بۆ قوتابی — **وێنەکرنا ڕوونکرنا سمبێلێ**

دڤێت ل دەستپێکێ پێداییان ڕێزبکەی بەری وێنەکرنا ڕوونکرنا سمبێلی، پێداییان تۆماربکە د بژمێرا ڕوونکرنێ دا بکارئینانا لیستێ. پێ هەلبژارتنا STAT پێداییان بەرەڤ ژۆر ڕێزبکە. تو دکاری پرۆگرامەکی بژمێرێ وەك EXCEL بکاربینی بۆ ڕێزکرنا پێداییان.



نموونـــــه 3 وێنەکرنا ڕوونکرنا سمبێلی و دیارکرنا مەودایێ چواریکی

ڕوونکرنا سمبێلی بۆ ڤان بکێشە و مەودایێ چواریکی بۆ ڤان پێداییان دیاربکە.

$\{5, 3, 9, 2, 14, 6, 8, 9, 5, 8, 13, 3, 15, 7, 4, 2, 12, 8\}$

پێنگاڤا (1) ئ: پێداییان بەرەڤ ژۆر ڕێزبکە.

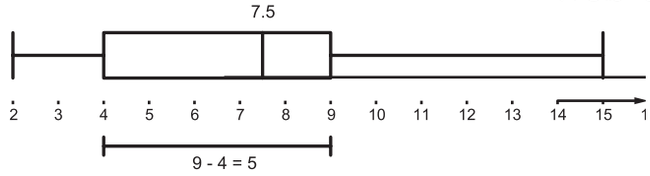
2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 12, 13, 14, 15

پێنگاڤا (2) ئ: مەزنترین بها و بچووکترین بها و ناڤەڕاست و جواریکێ ئێکێ و چواریکێ سێیێ بهەژمێرە.

2، 2، 3، 3، 4، 5، 5، 6، 7 ، 8, 8, 8, 9, 9, 12, 13, 14, 15

بچووکترین بها — چواریکێ ئێکێ — ناڤەڕاست 7.5 — چواریکێ سێیێ — مەزنترین بها

پێنگاڤا (3) ئ: وێنەکرنا ڕوونکرنا سمبێلی، تەوەرێ ژماران بکێشە، پاشی وان بەهایان بنوێنە، کو خالەکێ بۆ هەر بهایەکی ژ وان پێنج بها یان ژ دەرقەی تەوەرێ ژماران دیاربکە، پاشی لاکێشەکێ وێنەبکە لناڤبەرا هەردوو خالێن چواریکێ ئێکێ و چواریکێ سێیێ، و پارچەڕاستەهێلەکی ستوون د ناڤەڕاستی دا بکێشە، پاشی دوو سمبیلان وێنەبکە ژ خالا چواریکێ ئێکێ بۆ خالا بچووکترین بها و ژ خالا چواریکێ سێیێ بۆ مەزنترین بها.



مەودایێ چواریکی: دبیتە 5 ، ئەو دووریە لناڤبەرا چواریکێ ئێکێ و چواریکێ سێیێ ئانکو دریژیا لاکێشێیە.

خالا چاڤدێریێ

3. ڕوونکرنا سمبێلی بکێشە و مەودایێ چواریکی بۆ ڤێ کۆمەلا پێداییان دیاربکە.

{13, 12, 17, 15, 12, 13, 19, 11, 14, 14, 18, 22, 23}

چێدبیت دوو کۆمەلێن جیاواز وەك $\{19, 20, 21\}$ و $\{0, 20, 40\}$ هەمان ناڤەندێ ژمارەی و هەمان ناڤەڕاست هەبن، لەورا ئامارناس گەلەك گرنگیێ ب پرتبوونا پێداییان ددەن ل دەرقەی ناڤەندێ ژمارەی یان ل دەرقەی ناڤەڕاستی، و هندەك پیڤەرێن نوو بۆ پرتبوونێ دیارکرن وەك مەودا و **مەودایێ چواریکی و لێکنەچوون و لادانێ پیڤانەیێ**.

لێکنەچوون Variance ب هێمایێ σ^2 دەردبڕن، ئەو دبیتە ناڤەندێ ژمارەیێ بۆ دووجایێن دووریان لناڤبەرا ناڤەندێ ژمارەیی و بهایێن جیاواز.

لادانێ پیڤانەیی Standard deviation ب هێمایێ σ دەردبڕن، ئەو ڕەگێ دووجایێ لێکنەچوونێیە، ئەو ژ هەموو پیڤەرێن ئامارەی بمفاترە و پتر دهێتە بکارئینان. هەکەر بهایێ لادانێ پیڤانەیی یێ بچووك بیت رامانا وێ ئەوە زۆربەی پێداییان ل تەنیشت پیڤەربن ڕووکرنا چەقی نە، و هەکەر بهایێ لادانێ پیڤانەیی یێ مەزن بیت رامانا وێ پرتبوونا پێداییانە و دووریا وانە ژ ڤان پیڤەران.

خواندن

ئامار ناس هێمایێ $\bar{x}$ بخوینە (ئێکس بار) بۆ ناڤەندێ ژمارەی بکاردئینن و پیتا یۆنانی σ (سیگما) بۆ لادانێ ناڤەندی بکاردئینن.

هەژمارتنا لێکنەچوون و لادانێ پیڤانەی	
پێنگاڤا 1	ناڤەندێ ژمارەی بۆ پێداییان بهەژمێرە.
پێنگاڤا 2	جیاوازیێ لناڤبەرا ناڤەندێ ژمارەی و هەر پێدایەکی بهەژمێرە پاشی دووجایێن وان بهەژمێرە.
پێنگاڤا 3	لێکنەچوون σ^2 بهەژمێرە ب ڕێیا کۆمکرنا وان ژمارەییێن بدەست تە کەتین ل پێنگاڤا (2) ئ و دابەشکرنا وی سەرجەمێ لسەر ژمارا وان بهایان.
پێنگاڤا 4	لادانێ پیڤانەیی ب هەژمارتنا ڕەگێ دووجایێ لێکنەچوونێ بینەدەر.

نموونـــــه 4 هەژمارتنا ناڤەندێ ژمارەی و لادانێ پیڤانەیی

ئەڤ کۆمەلا پێداییان $\{14, 13, 16, 9, 3, 7, 11, 12, 11, 4\}$ ڕێژەیا ماددەیەکی دیارکری دخوینا نەخۆشەکی دا ل ماوەیێ 10 ڕۆژان دنوێنت. ناڤەندێ ژمارەی و لادانێ پیڤانەیی بۆ ڤان پێداییان بهەژمێرە.

پێنگاڤا (1) ئ: ناڤەندێ ژمارەی بهەژمێرە.

$$\bar{x} = \frac{4+11+12+11+7+3+9+16+13+14}{10} = 10$$

پێنگاڤا (2) ئ: جیاوازیێ لناڤبەرا ناڤەندێ ژمارەی و هەر بەهایەکی بینەدەر، و دووجاییا وی بهەژمێرە.

بەهایێ x	4	11	12	11	6	1	3	7	9	16	13	14
$x-\bar{x}$	−6	1	2	1	−1	−7	−3	1	−1	6	3	4
$(x-\bar{x})^2$	36	1	4	1	1	49	9	1	1	36	9	16

پێنگاڤا (3) ئ: لێکنەچوونێ بهەژمێرە.

$$\sigma^2 = \frac{36+1+4+1+9+49+1+36+9+16}{10} = 16.2$$

پێنگاڤا (4) ئ: لادانێ پیڤانەی بهەژمێرە.

$\sigma = \sqrt{16.2} \approx 4.02$ لادانێ پیڤانەیی یەکسانە ڕەگێ دووجاییێ مووجەب یێ لێکنەچوونێ ناڤەندێ ژمارەی یێ پێداییان 10 و لادانێ پیڤانەی 4.02 ب نێزیکی.

خالا چاڤدێریێ

4. ناڤەندێ ژمارەی و لادانێ پیڤانەی بۆ پێداییێن ل خوارێ بهەژمێرە دەربارەی ژمارا جارێن ڕاوەستیانا سەر ئێخەکێ ل هاتن و چۆنا وێ:

$\{0, 3, 1, 1, 0, 5, 1, 0, 3, 0\}$

بهایێ پەرگر Qutiliers دکۆمەلەکا پێداییان دا، ئەو بهایە یە کو دکەڤتە ژ دەرڤەی ڕێسایا پتریا بهایێن کۆمەلێ، وەک ئەوی بهایی کو گەلەک مەزنتربیت ژوان یان گەلەک بچووکتر بیت ژ وان. هەبوونا ڤی جورێ بهایی ب توندی کارتێکرن هەیە لسەر ناڤەندێ ژمارەیی و لادانێ پیڤانەی. هەگەر بەهایێ پەرگر ژ ئەنجامێ شاشیەکێ دپیڤانێ دا پەیدا ببت، ئەمار ناس ئەوێ لا ددەن. گەلەک ڕێ هەنە بۆ دیارکرنا بهایێ پەرگر، ئێک ژوان ڕێیان دەمێ بهایەک سێ جارانی لادانێ پیڤانەی یێ دوور بیت ژ ناڤەندێ ژمارەی، ئەو بهایە دهێتە هەژمارتن بهایەکێ پەرگر.

نموونـــــه 5 خواندنا بهایێ پەرگر

ئەڤ کۆمەلا پێداییان نمرەیێن قوتابیێن پۆلا دەهێ ل ئەزموونا بیرکاریێ دیاردکەت: $\{51, 55, 56, 53, 56, 48, 96, 48, 54, 47, 50, 52, 57, 58, 59, 45, 55\}$

ل بیرا تەبت

پێدایی د بژمێرا ڕوونکرنێ دا دڤێنە تۆمارکرن ب کلیکرنا دوگمێ STAT و هەلبژارتنا 1:Edit .

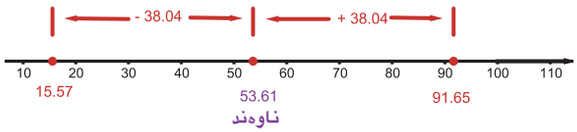
پێنگاڤا (1) ئ: پێداییان دلیستا L1 دناڤ بژمێرا ڕوونکرنێ دا تۆماربکە.

پێنگاڤا (2) ئ: ناڤەندێ ژمارەی و لادانێ پیڤانەی بهەژمێرە: کلیک بکە ڕەگێ STAT پاشی CALC هەلبژێرە. پاشی 1:1-variable هەلبژێرە، ENTER کلیک بکە لسەر شاشا بەرامبەر ئەڤە دیاربیت ناڤەندێ ژمارەی 55.29 بنێزیکی.

لادانێ پیڤانەی: 10.92

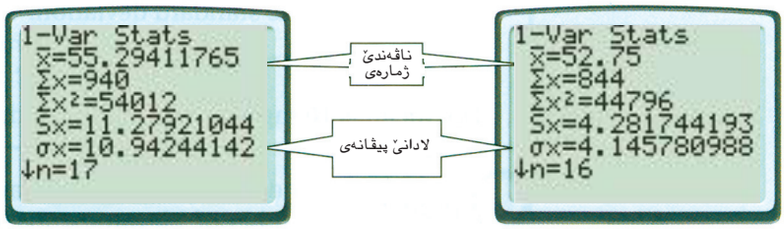
پێنگاڤا (3) ئ: بهایێ پەرگر دیاربکە ل دووڤ ئەوی بەهایی بگەرە ئەوێ ژ ناڤەندێ ژمارەی یێ دووربیت ب سێ جارانی لادانێ پیڤانەی.

سێ جارانی لادانێ پیڤانەی دبیتە: $3 \times 10.92 = 32.76$



بهایێ پەرگر ئەو بهایەیە کو زێدەتر بیت ژ 91.65 = 53.61 + 38.04 یان کێمتر بیت ژ 15.57 = 38.04 − 53.61. ل ڤێ نموونێ ئێك بهایێ پەرگر هەیە 96

پێنگاڤا (4) یێ: بهایێ پەرگر لابدە بۆ دیارکرنا کارتێکرنا وی لسەر ناڤەندێ ژمارەی و لادانێ پیڤانەی .



هەبوونا بهایێ پەرگر بوویە هۆیێ بلندبوونا ناڤەندێ ژمارەی ژ 51.11 بۆ 53.61، و بلندبوونا لادانێ پیڤانەیی ژ 7.64 بۆ 12.68 .

5. بهایێ پەرگر دناڤ ڤێ کومەلا پێداییان دا دیاربکە $\{3, 19, 4, 4, 2, 3\}$، و کارتێکرنا وی لسەر ناڤەندێ ژمارەی و لادانێ پیڤانەی روونبکە.

هزربکە و گەنگەشێ بکە

1. کارتێکرنا زێدەکرنا هەمان ژمارە بۆ هەر بهایەکی دکۆمەلا پێداییاندا لسەر ناڤەندێ ژمارەیێ وێ کۆمەلێ روونبکە.
2. کارتێکرنا زێدەکرنا هەمان ژمارە بۆ هەر بهایەکی دکۆمەلا پێداییان دا لسەر لادانێ پیڤانەیێ وێ کۆمەلێ روونبکە.
3. کارتێکرنا دووجارانکرنا لێکنەچوونێ لسەر لادانێ پیڤانەی چییە؟
4. رێکخەربە، هێلکاری کۆپی بکە و تەمامبکە. د هەر خانەیەکێدا پێناسا ئەوێ تێدا بنڤیسە و نموونەکێ لسەر بینە.

6–2 ڕاهێنان

ڕاهێنانێن ئاراستەکری

1 **زاراف:** ئەو پێڤەڕێ پرتبوونێ کو پترترین بکاردهێت ـــــ؟

(لێکنەچوون یان لادانێ پێڤانەی)

نموونە 1 بۆ هەر کۆمەڵەکا پێدایین ناڤەندێ ژمارەی وناڤەڕاست و باو بهەژمێرە.

2 $\{5,7,4,7,6,7\}$

3 $\{2,4,4,6,6,6,7,8\}$

4 $\{10,14,18,22,26\}$

نموونە 2

5 بهایێ پێشبینکری یێ خەلاتی بهەژمێرە.

بەدەستکەفتنا خەلاتی						
بها	0	1 000	5 000	20 000	100 000	1 000 000
ئەگەر	0.9359	0.05	0.01	0.003	0.001	0.0001

نموونە 3 ڕوونکرنا سمبێلی بۆ هەر کۆمەلەکا پێدایین وێنەبکە و مەودایێ چواریکی بهەژمێرە.

6 $\{3, 5, 2, 2, 8, 9, 1, 11\}$

7 $\{2, 4, 1, 4, 2, 2, 7, 4\}$

8 $\{33, 34, 31, 27, 22\}$

نموونە 4 لێکنەچوون و لادانێ پێڤانەی بۆ هەر کۆمەلەکا پێدایین بهەژمێرە.

9 $\{3, 3, 4, 5, 5\}$

10 $\{10, 12, 14, 15, 18, 20, 23\}$

11 $\{7, 14, 21, 28, 35, 42\}$

نموونە 5

12 **پێڤان:** ماموستایێ پۆلا چارێ داخوازی ژ قوتابیان کر، درێژیا وی کورسیێ لسەر ڕوونشتین ب سانتیمەتران بپێڤن. ماموستای پێڤانێن قوتابیان ب ڤی شێوەی تۆمارکرن: و: 49، 50، 49، 48، 48، 19، 50، 49، 48، 50، 49، 50 بهایێ پەرگر دیاربکە. ڕوونبکە چەوە بهایێ پەرگر کارتێکرنێ دکەت لسەر ناڤەندێ ژمارەی و لادانێ پێڤانەی.

ڕاهێنان و شیکارکرنا پرسیاران

بۆ هەر کۆمەلەکا پێدایین ناڤەندێ ژمارەیی و ناڤەڕاست و باو بهەژمێرە.

13 $\{4, 16, 25, 9, 36, 49\}$

14 $\{5, 10, 15, 20, 25\}$

15 $\{1, 7, 7, 2, 3, 14, 127, 8\}$

16 ژمارا پێشبینکری بۆ ژمارا جارێن دەستکەفتنا شێری بهەژمێرە.

هەلدانا سێ پارچە پارەیێ کانزای				
ژمارا جاران	0	1	2	3
ئەگەر	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

ڕاهێنانێن نازاد	
بۆ شیکارکرنا پرسیاران	بەرێ خۆ بدە نموونە
15-13	1
16	2
19-17	3
22-20	4
23	5

ویَنەیێ رووونکرنا سمبیلی بۆ هەر کۆمەلّەکا پێدایییان بکێشە و مەودایێ چواریَکی بهەژمێرە.

17 $\{12, 15, 12, 6, 18, 29\}$ **18** $\{2, 2, 3, 8, 2, 8, 2, 42\}$

19 $\{3, 4, 3, 1, 2\}$

لێکنەچوون و لادانێ پێڤانەی بۆ هەر کومەلەکا پێدایییان بهەژمێرە.

20 $\{4, 4, 4, 4, 5\}$ **21** $\{8, 12, 30, 35, 48, 50, 62\}$

22 $\{14, 26, 40, 52\}$

23 **تەپا سەبەتێ:** ئاری د 13 یاریێن تەپا سەپەتێدا پشکداربوو، و ئەف خالنە تۆمارکرن 24، 16، 9، 17، 17، 23، 20، 26، 17،14، 58، 27، 28 ناڤەندێ ژمارەیی و لادانێ پێڤانەی بهەژمێرە. بهایێ پەرگر دیاربکە، بەحسێ کارتێکرنا وی لسەر ناڤەندێ ژمارەی و لادانێ پێڤانەی بکە.

24 **هزرکرنا رِەخنەگر:** کۆمەلّەکا پێدایییان بنڤیسە کو ناڤەندێ ژمارەی و لادانێ پێڤانەی نە دناڤ واندا بن.

25 **بازارکرن:** هەرێم چۆ بازاری بۆ کرینا گەرمە پێڤەکی باش بۆ پێڤانا پلەیێن گەرمیێ ل ژۆرا خۆ، ل دوکانەکێ 4 گەرمە پێڤ هەبوون ئەڤ پلەیێن گەرماتیێ نیشاندان 25، 26، 24، 8. دڤێت هەرێم کیژ پێڤەر ژ پێڤەرێن رووکرنا چەقی بکارنەئینت بۆ هەلبژارتنا گەرمە پێڤێ گونجای.

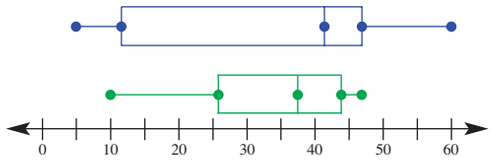
هندەك ئامار ناس وەسا ددانن کو بەهایەك ژ بهایێن کۆمەلەکا پێدایییان دبیتە بەهایێ پەرگر، هەکەر ئەو بهایە کێمتر بیت ژ (چواریَکێ ئێکێ− 1.5 × مەودایێ چواریکێ) یان زێدەتربیت ژ (چاریَکێ سێیێ+ 1.5 × مەودایێ چواری).

ل دووڤ بۆچوونێن وان ئامار ناسان کیژ بها ژ ناڤ کۆمەلا پێدایێن ل خوارێ دبیتە بهایێ پەرگر؟

26 $\{2, 3, 4, 5, 5, 25\}$ **27** $\{91, 90, 79, 15, 82, 90, 88\}$

28 $\{1, 36, 34, 33, 35, 92\}$

هەردوو رِوونکرنێن سمبیلی یێن بەرامبەر بکاربینە بۆ دوو کۆمەلێن پێدایییان. بۆ شیکارکرنا پرسیاران ژ 29 هەتا 32.



29 کیژ کۆمەلێ مەزنترین بها هەیە؟ ب چەندێ زێدەترە ژ بەهایێ مەزنێ کۆمەلا دی؟

30 کیژ کۆمەلە ناڤەراستێ وێ مەزنترە؟ بخەملینە ب چەندێ مەزنترە ژ ناڤەراستێ کۆمەلا دی؟

31 مەودایێ چواریکی یێ هەر کۆمەلەکێ بخەملینە.

32 کیژ کۆمەلێ بچووکترین لادانێ پێڤانەی هەیە؟ ئەڤێ رووبکە.

33 چانسێ تە ل برنا خەلاتێ نیڤ ملیون دیناری 0.01%. چانسێ تە ل زەرەرا هزار دیناری ئەوێ تە دای وەك نرخێ پلێتێ 99.9% . بهایێ پێشبینکری بۆ قازانجێ تە چەندە؟ (هاریکاری: دوو بەهایێن دشیاندا بۆ قازانجێ تە هەنە (000 500 و 1000−)

34 چانسێ تە ل برنا خەلاتێ سەد هزار دیناری10% . و چانسێ تە ل زەرەرا 2000 دیناران 30%. ئەگەرا راوەستاندنا یاریێ 60% . بهایێ پیشبینکری بۆ قازانجێ تە چەندە؟

35 **شاشی ل شیکارکرنێ** ئەڤێن ل خوارێ دوو بزاڤن بۆ هەژمارتنا لادانێ پیڤانەی بۆ پێدایین 4، 6، 8، 10 . کیژ بزاڤ نەیا دروستە؟

أ

7-4 =3	→9
7-6 =1	→1
7-8 =-1	→1
7-10 =-3	→9
	20
20÷4 =5	
√5 ≈2.24	

ب

7-4 =3	→3
7-6 =1	→1
7-8 =-1	→1
7-10 =-3	→3
	8
8÷4 =2	
√2 ≈1.4	

36 **بنڤیسە:** ئەرێ بەهایێ پێشبینکری بۆ کۆمەلەکا پێداییان هەردەم ئێك ژ وان پێداییانە؟ ئەرێ هندەك جاران سەرب کۆمەلێڤەیە یان هەردەم نە سەر ب کۆمەلێڤەیە؟

37 یارییەك پێکدئێت ژ هەلدانا دوو بەرکێن زارێ و لێکدانا هەردوو ژمارەیێن دیاردبن لسەر هەردوو زاران.

أ بهایێ پێشبینکری ل ڤێ یاریێ چەندە؟

ب ئەگەرا ئێك ژ ئەنجامێن لێکدانێ مەزنتربیت ژ بهایێ پێشبینکری چەندە؟

ج ئەگەرا ئێك ژ ئەنجامێن لێکدانێ بچووکتربیت ژ بهایێ پێشبینکری چەندە؟

د ئەرێ بەرسڤێن لقێ (ب) و (جـ) دیەکسانن؟ ئەڤێ روونبکە.

38 ئەڤ خشتێ ل خوارێ تێکرایێ باران بارینێ دسالەکێدا ب سانتیمەتران ژ 1994 هەتا 2003 ل باژێرەکی دیاردکەت.

سال	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
تێکرای	9.4	17.0	7.3	7.0	16.1	5.4	6.9	8.5	4.2	9.2

أ ناڤەندێ ژمارەی و لادانێ پیڤانەی بۆ ڤان پێداییان بهەژمێرە.

ب ل کیژ ساڵێ دووریا تێکرایی ژ ناڤەندێ ژمارەی مەزنترە ژ لادانێ پیڤانەی.

ج ناڤەڕاست و مەودایێ چواریکی بۆ کۆمەلا پێداییان بهەژمێرە.

ئامادەکرن بۆ ئەزموونێ

39 کیژ ڤان کۆمەلا پێداییان بچووکترین لادانێ پیڤانەی هەیە؟

أ $\{1, 5, 7, 50\}$

ب $\{100, 200, 300, 400\}$

ج $\{2, 10, 102, 110\}$

د $\{100, 101, 102, 105\}$

40 کیژ ئەڤانێن ل خوارێ نەیا دروستە لسەر ڤان هەردوو کۆمەلێن پێداییان $\{0, 1, 2, 50, 98, 99, 100\}$ $\{0, 48, 49, 50, 51, 52, 100\}$

أ هەمان ناڤەندێ ژمارەی هەنە.

ب هەمان مەودا هەنە.

ج هەمان لێکنەچوون هەنە.

د هەمان ناڤەراست هەنە.

41 ناڤەندێ ژمارەی بۆ ئەنجامێن ئەزموونەکێ 50 بوو. کیژ ئەڤانێن ل خوارێ ناگونجت یا دروست بیت؟

أ نیڤا وان سفر بیت و نیڤا دی سەد بیت.

ب مەودایێ وان 50 بیت.

ج نیڤا ئەنجامان 25 بیت و نیڤا دی 50 بیت.

د هەموو 50 بن.

بەرهنگاری و بەرفرەهکرن

42 ناڤەندێ ژمارەی بۆ کۆمەلەکا پێڕاییان 4 و ناڤەراست 3 و لادانێ پیڤانەی 1.6 .

أ وەسا دانە کو هەر بهایەك لێکدا ل گەل 5 ، ئەرێ ناڤەندێ ژمارەی یێ کۆمەلا نوو چەندە؟ ناڤەراست چەندە؟ لادانێ پیڤانەی چەندە؟

ب وەسا دانە کو هەر بهایەك ل گەل 5 کۆمکر. ئەرێ ناڤەندێ ژمارەی و ناڤەراست و لادانێ پیڤانەی بۆ کۆمەلا نوو چەندە؟

پێداچوونا لوولپێچی

43 **بازرگانی:** سارا ل پەرتووکخانەکا مەزن کاردکەت. مووجەیێ وێ ل مەهەکێ 725 000 دینار بوو، و بڕێ 1 750 دیناران بۆ زێدەدکەن ل فرۆتنا هەر پەرتووکەکێ. سارایێ 1 425 000 دینار ل مەها پێشتر وەرگرت. ئەرێ وێ چەند پەرتووك فرۆتبوون؟ (پۆلێن پیشتر)

ئەنجامێ ئەڤان لێکدانان بهەژمێرە *(پۆلێن پیشتر)*

44 $(2-x^2)(2x^2+5x-3)$

45 $4xy^2\left(x^2y+3x^2-2y\right)$

شەشپالۆیەکا ژماران (زارەك) هەلدان. ئەگەرا هەر رووداندەکێ چەندە؟

46 دەستکەفتنا ژمارە 1 یان ژمارەکا جووت.

47 دەستکەفتنا ژمارە 4 یان ژمارەکا کت.

48 دەستکەفتنا ژمارەکێ شیانا دابەشکرنێ لسەر 2 یان 6 هەبیت.

کۆمکرنا پێداییان ب شێوەیێ تاقیکرنێ

Collecting Experimental Data

تو دشێی تاقیکرنەکێ ئەنجام بدەی بۆ پەیداکرنا پێداییان، و وان پێداییان خرفە بکەی و رێك بئێخی، پاشی شلۆڤەبکەی بۆ دارشتنا هندەك رستەیێن بیرکاری.

چالاکی 1

خشتەکی پێکبینە ژ خرفەکرنا دوو ژمارێن دیاربووین ژ ئەنجامێ هەلدانا دووبەرکێن زاران.

بەرکێ زارا شین

بەرکێ زارا سۆر	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

هەوڵبدە

1. بەحسێ هەر هاوجێبوونەکا د خشتەیدا بکە.
2. ئەگەرێ تیوری بکاربینە بۆ دروستکرنا بەلاڤکرنا ئەگەرەی.

سەرجەم	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ئەگەرا وێ											

3. بەلاڤکرنا ئەگەرەی یا پێشتر بکاربینە بۆ هەژمارتنا بهایێ پێشبینکری.
4. کیژ سەرجەمی مەزنترین ئەگەر هەیە. کیژ سەرجەمی بچووکترین ئەگەر هەیە؟
5. ئەرێ هندەك کۆمەل هەنە ئەگەرێن وان یەکسانبن؟ هەکەر هەبوون بنڤیسە.
1. دوو بەرکێن زارێ 36 جاران هەلدە، و ئەنجامان دخشتەیدا تۆماربکە.
2. بەلاڤکرنەکا ئەگەرەی دروستبکە ژ وان ئەنجامێن بدەست تە کەفتین.
3. وێ بەلاڤکرنا ئەگەرەی ئەوا بدەست تە کەفتی ل پرسیارا (7) ێ بکاربینە بۆ هەژمارتنا بهایێ پێشبینکری.

پشت بەستن ب تاقیکرنا توپێ رابوویی، بەرسڤا ڤان پرسیاران بدە:-

4. کیژ سەرجەمی مەزنترین ئەگەر هەیە؟ و کیژ سەرجەمی بچووکترین ئەگەر هەیە؟
5. ئەرێ هندەك کۆمەل هەنە ئەگەرێن وان یەکسانبن؟ هەکەر هەبوون بنڤیسە.
6. بەراوردیێ بکە لناڤبەرا ئەنجامێن تیۆری و ئەنجامێن بدەست تە کەفتین.
7. وان ئەنجامێن بدەست تە کەفتین بئێخە پال ئەنجامێن هەڤاڵێ خۆ، بەراوردیێ بکە لناڤبەرا وان ئەنجامێن بدەست وەکەفتین پشتی خرڤەکرنێ و ئەنجامێن بدەست تە کەفتین ل تاقیکرنێ. بەراوردیێ بکە لناڤبەرا وێ ئەنجامێ و ئەنجاما تیۆری.

7-2

بەڵاڤکرنێن دووانی (ڤەکریێ ڕادەداریێ دووانی)

Binomial Distributions

ئارمانج

- سەلمێنراوا دوو ڕادەداران بکاردئینن بۆ ڤەکرنا ڕادەداریێ دووانی و هەژمارتنا ئەگەرێن دووانی و تاقیکرنا مگرتییان.

بۆچی ئەم فێری ڤی بابەتی دبین؟

تو دشێی بەلاڤکرنێن دووانی بکاربینی بۆ دیارکرنا چانسێ خۆ ل قازانجێ خەلاتێن پیشانگەهێن بازرگانیێ (نموونە 3).

ل پۆلا دەهێ تو فێری لێکدانا ڕادەداران بووبی. نوکە دێ فێری بارەکی تایبەت بی ژ لێکدانا ڕادەداران، کو ئەو ڤەکریێ هێزا ڕادەداریێ دووانییە.

زاراڤ
Vocabulary

سەلمینراوا دوو ڕادەداران
Binomial theorem

تاقیکرنا دووانی
Binomial experiment

ئەگەرا دووانی
Binomial probability

نموونـــــە 1 (ڤەکریێ) هێزا ڕادەداریێ دووانی

$(x+y)^3$ ڤەکە.

ل سەر شێوێ لێکدانێ بنڤیسە. $(x+y)^3=(x+y)(x+y)(x+y)$

دوو کۆلکان لێکبدە. $=(x+y)\left(x^2+2xy+y^2\right)$

بەلاڤکرنێ بکاربینە. $=x\left(x^2\right)+x(2xy)+x\left(y^2\right)+y\left(x^2\right)+y(2xy)+y\left(y^2\right)$

لێکبدە. $=x^3+2x^2y+xy^2+x^2y+2xy^2+y^3$

سادەبکە $=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

خالا چاڤدێرییێ

1.ئەڤێن ل خوارێ ڤەکە

أ $(x+4)^4$ ب $(2x-1)^3$

هاوکۆلکێن ڤەکریێ $(x+y)^3$ ئەو ژمارەنە کو دکەڤنە سەر ڕێزا خانەیا 3 ژ سێگۆشا باسکال.

	ڤەکریێ هێزا ڕادەداریێ دووانی	سێگۆشا باسکال
$(a+b)^0=$	1	1
$(a+b)^1=$	$a+b$	1 1
$(a+b)^2=$	$a^2+2ab+b^2$	1 2 1
$(a+b)^3=$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4=$	$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5=$	$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$	1 5 10 10 5 1

ژمارەیێن د هەر ڕێزەکێدا ژ ڕێزێن سێگۆشەیا باسکال هاوکۆلکێن ڤەکریێ هێزا ڕادەداریێ دووانی پێکدئینن ب توانەکێ یەکسانە ب خانا وێ ڕێزێ (بەرێ خۆ بدێ کو خانەیێن ڕێزێن سێگۆشا باسکال ژ سفرێ دەستپێدکەن نەك ژ ئێکێ دەستپێدکەت). یا دشیاندایە شێوازێ ڕێزێن سێگۆشەیا باسکال بکاربینن بۆ دیارکرنا هاوکۆلکێن ڤەکریێ هێزا ڕادەداریێ دووانی هەکەر ب هەر توانەکێ بێت $(a+b)^n$، کو n ژمارەکا تەواوە مووجەبە.

ڤەکریێ هێزێن رادەداریێ دووانی

ل دەمێ ڤەکرنا $(a+b)^n$ ئەڤە ل بیرا تەبیت:

1. ژمارا رادەیان ل ڤەکریێ $(a+b)^n$ یەکسانە $n+1$ رادە.
2. هاوکۆلکێن ڤەکریێ $(a+b)^n$ دبنە ژمارین سێگۆشا باسکال دریژا n دا.
3. توانا هێزا a د رادەیێ ئێکێدا دبیتە (n)، (ئانکو ڕادێ ئێکێ a^n)، پاشی ئەو توانە ب (1) ێ کێم دبیت هەر چەند بچی بۆ رادەیەکی دی.
4. توانا هێزا b سفرە د رادەیێ ئێکێدا، پاشی ئەو توانە ب (1)ێ زێدە دبیت هەر چەند بچی بۆ رادەیەکی دی.
5. سەرجەمێ توانێن هێزا (a) و هێزا (b) د هەر ڕادەکی دا یەکسانە n .

ژ قوتابی بۆ قوتابی — ڤەکریێ هێزا ڕادەداریێ دووانی

هێلکارەکی بۆ ڤەکریێ هێزا رادەداریێ دووان دێ بکارئینم.
$(x+y)^4$ وەك نموونە دێ بکارئینم. د ڕیزا ئێکێ دا ژ خشتێ بەرامبەر،
ژمارەیێن ریزا 4 ل سێگۆشەیا باسکال دێ نقیسم، پاشی د ڕیزا دووێ دا ل خشتەی، دێ هێزێن x ب توانێن بەرەڤ ژێر ژ لایێ چەپێ نقیسم، پاشی دریزا سێیێ دا ل خشتەی دێ هێزێن y بتوانێن بەرەڤ ژوێر ژ لایێ راستێ نقیسم. ل دوماهیکێ دێ رادەیێن هەر ستوونەکێ لێکدەم بۆ دەستکەفتنا. $x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$

1	4	6	4	1
x^4	x^3	x^2	x	
	y	y^2	y^3	y^4

نموونـــــە 2 بکارئینانا سێگۆشەیا سکال بۆ ڤەکرنا هێزا رادەداریێ دووانی

هێزا رادەداریێ دووانی ڤەکە.

أ $(y-3)^4$

1 4 6 4 1 ژمارەیێن ل ڕیزا 4 یا سێگۆشا باسکال بنقیسە

$$\left[1(y)^4(-3)^0\right]+\left[4(y)^3(-3)^1\right]+\left[6(y)^2(-3)^2\right]+\left[4(y)^1(-3)^3\right]+\left[1(y)^0(-3)^4\right]$$

$$y^4-12y^3+54y^2-108y+81$$

ب $(4z+5)^3$

1 3 3 1 ژمارەیێن ل ڕیزا 3 یا سێگوشایا باسکال بنقیسە

$$\left[1(4z)^3(5)^0\right]+\left[3(4z)^2(5)^1\right]+\left[3(4z)^1(5)^2\right]+\left[1(4z)^0(5)^3\right]$$

$$64z^3+240z^2+300z+125$$

خالا چاڤدێریێ

2. ڤەکریێ رادەداریێ دووانی بەهەژمێرە

أ $(x+2)^3$ ب $(x-4)^5$ ج $(3x+1)^4$

ل لایەکی دی، پەیوەندییەك هەیە ل ناڤبەرا سێگۆشەیا باسکال و ژمارێن کونجینێ.

سێگۆشەیا باسکال	کونجین	ڤەکریێ هێزا رادەداریێ دووانی	
1	${}_0C_0$	1	$(a+b)^0=$
1 1	${}_0C_0$ ${}_1C_1$	$a+b$	$(a+b)^1=$
1 2 1	${}_2C_0$ ${}_2C_1$ ${}_2C_2$	$a^2+2ab+b^2$	$(a+b)^2=$
1 3 3 1	${}_3C_0$ ${}_3C_1$ ${}_3C_2$ ${}_3C_3$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	$(a+b)^3=$

تو دشێی مفایی ژ شوازێ خشتەیێ لسەری ببینی بۆ ڤەکرنا هێزا رادەدارێ دووانی بکارئینانا سەلمێنراوا دوو رادەداران.

فێربە

سەلمینراوا دوو رادەداران

هەکەر n هەر ژمارەیەکا تەواو، نە یا سالب بیت دێ:-

$$(x+y)^n = {}_nC_0x^ny^0 + {}_nC_1x^{n-1}y^1 + {}_nC_2x^{n-2}y^2 + \ldots + {}_nC_{n-1}x^1y^{n-1} + {}_nC_nx^0y^n$$

نموونـــــه 3 ڤەکرنا هێزا ڕادەدارێ دووانی

سەلمینراوا دوو رادەداران بکاربینە بۆ ڤەکرنا ڤان رادەدارێن دووانی.

أ $(x+y)^4$

ژمارەیێن ل ڕێزا 4 یا سێگۆشا باسکال بنڤیسە 1 4 6 4 1

$$(x+y)^4 = {}_4C_0x^4y^0 + {}_4C_1x^3y^1 + {}_4C_2x^2y^2 + {}_4C_3x^1y^3 + {}_4C_4x^0y^4$$
$$= 1x^4y^0 + 4x^3y^1 + 6x^2y^2 + 4x^1y^3 + 1x^0y^4$$
$$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

ب $(3p+q)^3$

ژمارەیێن ل ڕێزا 3 یا سێگۆشا باسکال بنڤیسە 1 3 3 1

$$(3p+q)^3 = {}_3C_0(3p)^3q^0 + {}_3C_1(3p)^2q^1 + {}_3C_2(3p)^1q^2 + {}_3C_3(3p)^0q^3$$
$$= 1\times 27p^3\times 1 + 3\times 9p^2q + 3\times pq^2 + 1\times 1q^3$$
$$= 27p^3 + 27p^2q + 9pq^2 + q^3$$

ڕوونـاهیـەك

ل دەمێ ڤەکرنا $(x+y)^n$ توانا x ژ n بۆ سفرێ کێم دبیت و توانا y ژ سفرێ بۆ n زێدەدبیت و سەرجەمێ هەردوو توانان دهەر رادەیەکی دا یەکسانە n.

3. سەلمینراوا رادەدارێ دووانی بۆ ڤەکرنا ڤان رادەدارێن ل خوارێ بکاربینە.

خالا چاڤدێریێ

أ $(x-y)^5$ ب $(a+2b)^3$

تاقیکرنا دووانی: تاقیکرنەکا هەرەمەکییە، کردارەکا هەرەمەکی ب سەرەبەخویی تێدا دووبارەدبیت، وێ دوو ئەنجامێن دشیاندا هەنە، سەرکەفتن یان کەفتن. کو ئەگەرا سەرکەفتنێ p بیت ل هەر جارەکێ، و ئەگەرا کفتنێ q بیت ل هەر جارەکێ. چونکی وی کردارا هەرەمەکی دوو ئەنجامێن دشیاندا هەنە، دی $p+q=1$ یان $q=1-p$. ئەڤا ل خوارێ نموونەیەکە لسەر تاقیکرنا دووانی.

تاقیکرن	سەرکەفتن	کەفتن	ئەگەرا سەرکەفتنێ	ئەگەرا کەفتنێ
هەلدانا پارچە دراڤەکی کانزایی 10 جاران	شێر	خەت	$p=0.5$	$q=0.5$
هەلدانا پارچە دراڤەکی کانزایی سەد جاران	دیاربوونا ژمارە 3	دیاربوونا ژمارەکێ ژبلی 3	$p=\frac{1}{6}$	$q=\frac{5}{6}$

مگرتی ئەگەرا کەسەکی کو یی چەپ بیت [بدەستێ چەپێ بنڤیسن] 0.1 بیت. وتە دڤێت ئەگەرا دوو مرۆڤ د چەپ بن دناڤ3 کەسان دا بهەژمێری. ل ڤێدەر ${}_3C_2$ ڕێ هەنە بۆ پێکئینانا کۆمەلەکا دوو کەسی ژ سێ کەسان.

هێمایێ L بکاربینە بۆ ئەگەرا کەسەکی چەپ بیت، و هێمایێ R بکاربینە بۆ ئەگەرا کەسەك نەیی چەپ بیت. ڕیێن هەلبژارتنا دووین چەپ LLR ، LRL، RLL . ئەگەرا هەر ئێك ژ ڤان ئەنجامێن دشیاندا $0.1\times 0.1\times 0.9$.

ئەگەرا دووانی

هەکەر تاقیکرنەکا دووانی n جارێن سەربەخۆ دووبارە بیت، و p ئەگەرا سەرکەفتنێ بیت و q ئەگەرا کەفتنێ بیت دێ ئەگەرا سەرکەفتنا r جاران ژ ناڤ n جاران بیتە:

$$P(r) = {}_nC_r p^r q^{n-r}$$

دبێژنە ئەڤێ ئەگەرێ، **ئەگەرا دووانی**.

نموونـــــە 4 هەژمارتنا ئەگەرا دووانی

ژ 5 پاپوورێن ڕێڕەوەکی دەریایی دەربارزدکەن، ئێك ژ وان ڕاستەو خۆ دچیتە دناڤ فرەهیا ئاڤا دەریایێدا بێی ئەو بچیتە بەندەری. 4 پاپوور دڕێڕەوێ دەریایێ دا دچن.

أ ئەگەرا دوو پاپوور بتنێ بەرەڤ فرەهیا ئاڤادەریایێ ئێکسەربچن چەندە؟

ئەگەرا چوونا پاپوورەکێ بۆ فرەهیا ئاڤا دەریایێ دبیتە $0.2 = \frac{1}{5}$.

$P(r) = {}_nC_r p^r q^{n-r}$ $n=4$ چونکی تاقیکرن 4 جاران دەربارددبیت

$P(2) = {}_4C_2 p^2 q^{4-2}$ ژمارا سەرکەفتنا $r=2$ (دوو پاپوور بەرەڤ فرەهیا ئاڤایا دەریایێ دچن)

$= 6(0.04)(0.64) = 0.1536$

ئەگەرا دوو پاپوور بتنێ بەرەڤ فرەهیا ئاڤا دەریایێ ئێکسەر بچن دبیتە 15.36%

ب ئەگەرا دوو پاپوور بکێماسی بەرەڤ فرەهیا دەریایێ ئێکسەر بچن چەندە؟

دوو پاپوور بکێماسی بەرەڤ فرەهیا دەریایێ ئێکسەر بچن (ئانکو دوو یان سێ یان چار پاپوور ئێکسەر بەرەڤ فرەهیا ئاڤا دەریایێ بچن).

$P(2) + P(3) + P(4)$

$${}_4C_2(0.2)^2(0.8)^{4-2} + {}_4C_3(0.2)^3(0.8)^{4-3} + {}_4C_4(0.2)^4(0.8)^{4-4}$$

$0.1536 + 0.0256 + 0.0016 = 0.1808$

ئەگەرا دوو پاپوور بکێماسی بەرەڤ فرەهیا ئاڤا دەریایێ بچن دبیتە 18.08%

4. **أ** ڕێڤەبەریا قوتابخانێ بۆ هەر قوتابیەکی مامۆستایەکی ب هەرەمەکی ژ ناڤ چار ماموستایان دەستنیشاندکەت دا ببیتە ژێدەرێ وێ بۆ کارێ خواندنێ. ئەگەرا ماموستا ئومید ببیتە ژێدەرێ دوو قوتابیان ژ ناڤ سێ قوتابییێن نوو هاتین؟

ب شیرین دێ چیتە ئەزموونەکێ ژ جۆرێ هەلبژارتن ژ چەند بەرسڤان، ئەڤ ئەزموونە ژ 5 پرسیاران پێکدئێت کو هەر ئێك ژ وان 4 بەرسڤێن ڤەکری هەنە. ئەگەرا شیرین بکێماسی دوو پرسیاران بدروستی بەرسڤ بدەت چەندە؟

نموونـــــە 5 بجهئینان لسەر شیکارکرنا پرسیاران

کۆمپانیەکا تەزیاتییێن پیشانگەهەکا بازرگانی ڤەکر بۆ بکرێن شووشێن بەرهەمێ خو. ویێنەیەك لسەر ڤەپاغێن هندەك شووشان کۆپیکر بوو بۆ وی کەسێ چانس هەبیت. کۆمپانیێ ویێنەیەکی خەلاتی لسەر ئێك شووشەی ژ هەر 4 شووشەیان کۆپیکریە. شیرۆانی 10 شووشەکرین. ئەگەرا شیرۆان بکێماسی دوو خەلاتان قازانج بکەت چەندە؟

1 د پرسیارێ بگەهە

داخوازێ ئەوە کو شێروان بکێماسی دوو خەلاتان ببەت [وەربگرت].

زانیارییێن گرنگ بێژە:

- شیروانی 10 شووشە کڕین.
- ئەگەرا دووانێ بۆ برنا شووشێ خەلاتی $\frac{1}{4} = 0.25$

2 پلانێ دانە

رێیا سەربەخو بۆ شیکارکرنا پرسیارێ دبیتە هەژمارتنا $P(2)+P(3)+...+P(10)$ لێ هەژمارتنا ئەگەرا تەواوکەر ساناهی تر، ئانکو هەژمارتنا $P(0)+P(1)$. چونکی رووداندا تەواوکەر بۆ قازانجکرنا دوو خەلاتان بکێماسی دبیتە قازانجێ خەلاتەکی یان هیچ قازانج نەکەت. ئەگەرا رووداندا تەواوکەر بهەژمێرەو دەربکە ژ (1) ێ.

3 شیکاربکە

پێنگاڤا (1) ێ:

بهەژمێرە $P(0) + P(1)$

$$P(0) + P(1) = {}_{10}C_0(0.25)^0(0.75)^{10-0} + {}_{10}C_1(0.25)^1(0.75)^{10-1}$$

$$= 1(1)(0.75)^{10} + 10(0.25)(0.75)^9$$

$$\approx 0.0563 + 0.1877$$

پێنگاڤا (2) ێ: رووداندا تەواوکەر بکاربینە بۆ هەژمارتنا بەرسڤێ.

$$1-0.2440 \approx 0.7560$$

ئەگەرا شێروان دوو خەلاتان ببەت 0.76 بنێزیکی.

4 ساخبکە

بەرسڤ یا رەوایە، چونکی بەهایێ پێشبینکری بۆ قازانجی دبیتە $\frac{1}{4} \times 10$ ئانکو $2.5 = \frac{10}{4}$ ئەوی نێزیکە بۆ 2 ئەگەرا شیروان دوو خەلاتان بکێماسی ببەت زێدەترە ژ 0.5

خالا چاڤدێریێ

5. أ بیستۆن دێ ئەزموونەکێ ئەنجامدەت ژ جۆرێ هەلبژارتن ژ چەند بەرسڤان، و ژ 20 پرسیاران پێکهاتییە بۆ هەر پرسیارەکێ 4 بەرسڤێن ڤەکری هەنە. ئەگەرا بیستۆن دوو پرسیاران بکێماسی دروست بەرسڤ بدەت چەندە؟

ب ئامیرەیەك جۆرەکی ژ پارچێن یەدەکێ ترومبێلان بەرهەمدئینیت. ئەگەرا کو پارچە یا باش بیت 98% . ئامیرێ 25 پارچە بەرهەمئینان. ئەگەرا ژمارا پارچێن باش نە زێدەتر بن ژ 23 پارچان چەندە؟

هزربکە و گەنگەشێ بکە

1. پلەیا قەکریێ رادەداریێ $(2x+8)^7$ چەندە؟ ژمارا رادەییێن وی چەندە؟
2. ل تاقیکرنەکا دووانی $p+q$ چەندە؟ بەرسڤا خۆ روونبکە.
3. ئەو هەرسێ بڕ کێژ وانن کو ل گەل ئێکودوو دئێنە لێکدان بۆ هەژمارتنا ئەگەرا سەرکەفتنا r جاران ل تاقیکرنەکا دووانێ n جاران دووبار بیت؟
4. ڕێکخەربە: خشتەیێ کۆپیبکە، هەر پرسیارەکاتو بنقیسی شیکاربکە.

فێربە و هزربکە

تاقیکرنێن دووانێ	
ئەگەر	نموونە
ئەگەرا سەرکەفتنا r جاران ل تاقیکرنەکا n جاران دووبارەبیت.	
ئەگەرا سەرکەفتنا r بکێماسی ل تاقیکرنەکا n جاران دووبارەبیت.	
ئەگەرا سەرکەفتنا r جاران ب زێداهی ل تاقیکرنەکا n جاران دووبارەبیت	
ئەگەرا بکارئینانا ڕووداوا تەواوکەر	

7-2 ڕاهێنان

ڕاهێنانێن ئاراستەکری

1 زاراڤ: ژمارا ئەنجامێن دشیاندا ل تاقیکرنەکا دووانی دبنە ____؟

بەرێ خۆبدە نموونە 1

ئەنجامێ هەر ئێکێ ب لێکدانێ بهەژمێرە.

2 $(x+2)^3$ 3 $(x+y)^4$ 4 $(x+1)^4$ 5 $(x-3y)^3$

بەرێ خۆبدە نموونە 2

ڤەکریێ هەر ئێکی ل خوارێ بکارئینانا سێگۆشەیا باسکال بهەژمێرە.

6 $(x-2)^4$ 7 $(2x+y)^4$ 8 $(x+2y)^3$ 9 $(2x-y)^5$

بەرێ خۆبدە نموونە 3

سەلمینراوا رادەداریێ دووانی بۆ هەژمارتنا ڤەکریێ هەر برەکی بکاربینە.

10 $(x+3)^4$ 11 $(3x+5)^3$ 12 $(p-2)^6$ 13 $(x+y)^6$

بەرێ خۆبدە نموونە 4

14 ڕێڤەبەرێ قوتابخانێ دڤییا 6 قوتابیان هەلبژێرت بۆ پشکداریێ ل وێنەگرتنا یادگاریێ بۆ قوتابیێن قوتابخانێ. ئەگەر چەندە کو ژ ناڤ هەر شەش قوتابیان 4 وەرزشڤان بن بۆ زانین ئەگەرا قوتابی یی وەرزشڤان بیت 30% ؟ ئەگەرا 4 قوتابی ب کێماسی وەرزشڤان بن چەندە؟

بەرێ خو بدە نموونە 5

15 **بازارکرن:** بەشێ شیرینا هیێ ل سۆپەرمارکیتەکێ پاکیتێن شوکولاتە پیشان ددەت. دپاکێتەکێدا ژ 5 پێکێتان پلپتەکا ڤەشارتی هەیە، ئەو بکرێ پلێت بۆ دەرکەڤت دێ پاکێتێ وەك خەلات بەت. ڤیانێ 4 پاکێت کرین، ئەگەرا ئەو سێ پلێتان ببەت چەندە؟ ئەگەرا ئەو بکێماسی 2 پلێتان ببەت چەندە؟

نموونـــــه 5

16 **پیشەسازی:** کارگەەک بەرهەمێن خو دسندوقێن کارتونیدا هەلدگرت. لسەر رووییێ سەری یێ هەر سندوقەکێ پوولەکی تایبەت چاپ دکەت. ئەگەرا هەبوونا پوولی لسەر هەردوو رووییێن سەریی و ژێرەی 2% . ترومبێلەکا بارهەلگر 30 سندوق هەلگرتن، ئەگەرا کو دوو سندۆقان پوول لسەر هەردوو رووییێن سەرە و ژێرەییێ وان هەبیت چەندە؟

ڕاهێنان و شیکارکرنا پرسیاران

ڕاهێنانێن نازاد

بۆ شیکارکرنا بەریێ خۆ بدە نموونە	ڕاهێنانان
1	20-17
2	24-21
3	28-25
4	29
5	30

هەر برەکی ب لێکدانێ ڤەکە.

17 $(2x-2)^3$ **18** $\left(x+\frac{1}{3}\right)^4$ **19** $(x-y)^4$ **20** $(4+y)^3$

هەر برەکی بکارئینانا سێگۆشا باسکال ڤەکە.

21 $(x-3y)^4$ **22** $(x-2)^5$ **23** $(x+y)^5$ **24** $(2x-3y)^4$

هەر برەکی بکارئینانا سەلمینراوا رادەدارێ دووانی ڤەکە.

25 $(y+5)^4$ **26** $(2m-1)^3$ **27** $(4+3x)^5$ **28** $(2a+3c)^3$

29 **مافێ شارستانیێ:** ڕاپرسینەك سەبارەت مافێ رادەربڕینێ ل گەل 100 000 هاولاتیان هاتە ئەنجامدان. 83% ل گەل وی مافی بوون. 8 مرۆڤ ژ وان بهەرەمەکی هاتنە هەلبژارتن. ئەگەرا (6) مرۆڤ ژ وان بکێماسی ل گەل وی مافی بن چەندە؟

30 5 گۆ ژ تویرکەکی تاری هاتنە ڕاکێشان ئێك ل دویڤ ئێك پشتی ڤەگەراندنا هەر گۆیەکێ پشتی ڕاکێشانا وێ. ئەگەرا ڕاکێشانا گۆیەکا ڕەش 15% . ئەگەرا دوو گۆ ژ 5 گۆیێن هاتینە ڕاکێشان د ڕەش بن چەندە؟

31 **چین:** ئافرەتەکا دوو گیان چاڤەرێبوو 3 زارۆکان پێکڤە ببیت. ئەگەرا ئێك ژ وان کوربیت و دوو کچ بن چەندە؟ ئەگەرا هەرسێ کچ بن چەندە؟

32 **ڕووەك زانی:** ئەگەرا دارەکا ژ جۆرەکی دیارکری گۆلان بگرت 25% بوو. ئەگەرا 4 دار ژ ناڤ 15 داران ژ وی جۆری دیارکری گۆلان بگرن چەندە، هەکەر ب هەرەمەکی هاتبیتە هەلبژارتن؟

هەر برەکی بکارئینانا سەلمینراوا دووانی ڤەکە:

33 $(x-y)^5$ **34** $(c+6)^3$ **35** $(4k-1)^4$ **36** $(p+q)^7$

37 **گەشت:** کۆمپانییێن فرۆکەڤانییێ جهێن زێدەتر ژ ژمارا کورسییێن دناڤ فرۆکێدا بۆ خەلکێ تومار دکەن، چونکی. هندەك گەشتیار جهگرتنا خو ل دەمێ دوماهیێ هەلدوەشینن. ئەگەرا هەر گەشتیارەك جهگرتنا خو هەلنەوەشینت 0.91 بوو. کۆمپانییێ 22 جهـ بۆ فرۆکێ تۆمارکرن کو ژ 20 کورسییان پێکهاتبوو. ئەگەرا هەر گەشتیارەکی ئامادەبیت کورسییەك بدەست بکەڤت چەندە؟

38 **جین:** ژ ڤژییەکا مێ 4 تێشك بوون. ئەگەرا هەر چار تێشك دنێربن چەندە؟ ئەگەرا سیێ تێشك بکێماسی دنێر بن چەندە؟

پارچەکا پارەی 10 جاران هاتە هەلدان ئەگەرا هەر ئێکێ ژ ڤان بهەژمێرە.

39 زێدەتر ژ 7 خەتان بیت **40** ب کێماسی دوو خەت بن **41** بتنێ 5 خەت بن.

42 **چاڤدێریا جوّری:** کارگەهەك پارچەیێن یەدەك بۆ ترومبێلان دروست دکەت. ئەگەرا باشیا پارچەیێ 95%. ئەگەرا پارچێن خراب یێن دناڤ سندوقەکێدا کو 8 پارچە تێدانە ژ ئێك پارچەی زێدەتر نەبیت چەندە؟

43 **بژمێرا ڕوونکرنێ:** بژمێرا ڕوونکرنێ نەخشەیان randBin بخوّڤە دگرت بۆ ئەنجامدانا تاقیکرنا دووانی و هەژمارتنا بارێن سەرکەفتنێ. بۆ ئەنجامدانا تاقیکرنەکا دووانی $n = 6$ کارێن هەرەمەکی بیت و ژمارا سەرکەفتنان $r = 5$ بیت MATH کلیکبکە و PRB هەلبژێرە پاشی(randBin و ژمارە (6) تۆماربکە پاشی 0.3 پاشی 5. بۆشایێ "," لناڤبەرا ژماران دانە.

أ تاقیکرنا هەرەمەکی یا دووانی $n = 5$ کارێن هەرەمەکی ئەنجام بدە. ئەگەرا سەرکەفتنێ $p = 0.8$ و ژمارا سەرکەفتنان $r = 5$ بیت.

ب یاسایێ بۆ ڤەدیتنا ئەگەرا سەرکەفتنێ بکاربینە.

ج بەراوردیێ دناڤبەرا هەردوو ئەنجاماندا بکە.

44 **پێنگاڤێن جوّرا و جوّر:** $p = 0.8$ و $n = 10$ ، بژمێرا ڕوونکرنێ بکاربینە بۆ هەژمارتنا ئەگەرا دووانی بۆ ژمارا سەرکەفتنان ژ 0 هەتا 10 . بەرسڤان بۆ نێزیکترین بەش ژ سەدێ نێزیکبکە، ستوونێن ڕوونکرنێ بۆ نواندنا ئەنجامێن بدەست تە کەفتین دروستبکە. بەحسێ ڕووخسارێ وێنەیێ ڕوونکرنێ بکە. پەیوەندی ل ناڤبەرا وێنەیێ ڕوونکرنێ و بهایێ هاتیە پێشبینکرین چییە؟

45 **هزرکرنا ڕەخنەگر:** کیژ وان ئەگەرا وێ پترە، خیزانەك ژ 4 زاروّکان دوو کوڕ و دوو کچ بن، یان خیزانەك ژ 4 زاروّکان سێ ژ وان ژئێك رەگەزبن و یێ چارێ ژ رەگەزێ دی بیت؟

46 ژمارا ڕوّژێن پێشبینکری کو باران ل دەڤەرەکێ ببارت 82 ڕوّژ بوون ل سالەکێ. وەسا دانە کو باران بارێن ل ڕوّژێن جوّدا، ڕوودانێن سەربەخوّنە.

أ ئەگەرا کو ڕوّژەك بهەرەمەکی بهێتە هەلبژارتن ڕوّژەکا باران بارین بیت چەندە؟

ب ئەگەرا هەلبژارتنا 3 ڕوّژێن باران بارین ل حەفتیەکێ چەندە؟

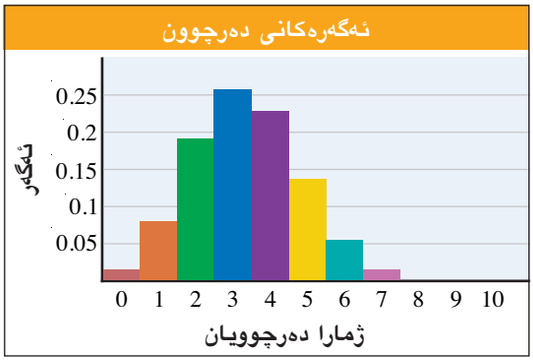
ج ئەگەرا هەلبژارتنا 3 ڕوّژێن باران بارین بکێماسی بهەرەمەکی ل حەفتیەکێ چەندە؟

47 تویرکەك 10 گوّ تێدا هەنە، نیڤ ژ وان دسوّرن و نیڤێن دی دشینن، ئومێدی 3 گوّ ئێك ل دووڤ ئێکێ راکێشان بێ ڤەگەراندن و ل هەر جارەکێ ڕەنگێ گوّیا راکێشایی تۆمارکر. ئەوێ هویێ ڕوونبکە وەسا دکەت ئەو تاقیکرنا هەرمەکی نەیا دووانی بیت.

48 **گەشت:** کوّمپانیەکا فرۆکەڤانێ تویژینەك ئەنجام دا، و دیارکر کو 45% ژ گەشتیاران ل دەمێ سەردکەڤن بوّ ناڤ فرۆکی زێدەتر ژ جانتەکی هەلدگرن. ل گەشتەکێ مێڤاندارێ فرۆکێ پێشوازیا 5 گەشتیارێن ئێکێ کر. ئەگەرا ژمارا وان کەسێن ژ جانتەکی زێدەتر هەلگرتێن نە کێمتربیت ژ 3 کەسان چەندە؟

49 **بنڤیسە:** بەحسێ بارەکی بکە تێدا یا گونجای بیت ڕوودانا تەواوکەر بۆ هەژمارتنا ئەگەرا دووانی بکار هاتبیت.

خەملاندن: وێنەیێ رووبکرنێ یێ بەرامبەر بکاربینە بۆ شیکارکرنا هەردوو پرسیارێن 50 و 51. وێنە ئەگەرێن r سەرکەفتنان ل تاقیکرنا دووانی دنوێنیت کو کردارا هەرەمەکی 10 جاران دووبارە دبیت.



50 ئەگەرا ژمارا سەرکەفتنان نە زێدەتربیت ژ (2) بخەملینە.

51 بهایێ ئەگەرا دەرچوونێ p خەملینە. ڕوونبکە تە چەوا بەرسڤ هەژمارت.

ئامادەکرن بۆ ئەزموونێ

52 کیژ ڤانێن ل خوارێ ل تاقیکرنا هەرەمەکی نەیا دروستە.

(أ) ئەنجامێن دشیاندا دوونە: سەرکەفتن یا کەفتن.

(ب) ئەگەرا سەرکەفتنێ یا نەگۆرە.

(ج) کردارێن هەرەمەکی پێکڤە دگرێدایینە.

(د) کردارێن هەرەمەکی هەمان کردارن.

53 تاقیکرنەکا دووانی پێکدهێت ژ دووبارەبوونا کردارەکا هەرەمەکی 2 جاران، ئەگەرا سەرکەفتنێ 40% ئەگەرا سەرکەفتنێ ل ئێك جارێ چەندە؟

(أ) 16% (ب) 36% (ج) 48% (د) 52%

54 تاقیکرنەکا دووانێ پێکدهێت ژ دووبارەبوونا کردارکا هەرەمەکی 5 جاران ئەگەرا سەرکەفتنێ 20% کیژ ڤانێن ل خوارێ ئەگەرا سەرکەفتنا 3 جاران دنوێنت؟

(أ) $3(0.2)^3(0.8)^2$ (ب) $10(0.2)^3(0.8)^2$ (ج) $3(0.2)^2(0.8)^3$ (د) $10(0.2)^2(0.8)^3$

55 **بەرسڤ بتنێ:** کارگەهەك پارچەیێن یەدەك بۆ بژمێرێن ئەلکترونی دروست دکەت. ئەگەرا پارچە نەیا باش بیت 4% . 10 پارچە ب شێوەیەکی هەرەمەکی هەلبژارتن. ئەگەرا نە زێدەتر ژ (1) پارچێ دناڤ واندا نەیا باش بیت چەندە؟ بەرسڤا خو بۆ نێزیکترین ڕێژەیا سەدی یا دروست نێزیکبکە.

56 **بەرسڤا کورت:** 18.8% ژ ئاکنجیێن وەلاتەکی هەلگرێن ناڤکینە ژ وان 100 ناڤێن بەربەلاڤ. ب شێوەیەکی هەرەمەکی 10 کەس هەلبژارتن ئەگەرا 3 کەس ژ وان یان زێدەتر هەلگرین ناڤەکی ژ وان ناڤێن بەربەلاڤبن چەندە؟

بەرهنگاری و بەرفرەهکرن

57 **چین:** ئەگەرا ئێك یی چەپ بیت 0.1. هۆلەکی 650 کەس تیدانە.

أ ژمارا پێشبینکری بۆ کەسێن چەپ دناڤ هۆلێدا چەندە؟ ئەڤێ ڕوونبکە.

ب لادانێ پیڤانەی بۆ تاقیکرنەکا دووانی کوپیکهاتبیت ژ دووبارەبوونا کردارەکا هەرەمەکی n جاران دهێتە هەژمارتن بکارئینانا $\sigma = \sqrt{npq}$. بهایێ لادانێ پیڤانەی بهەژمێرە؟

58 هەر ئێك ژ ڤان هەردوو ئەگەران بهەژمێرە، و دیاربکە کیژ وان مەزنترە.

أ دیاربوونا ژمارە 1 بکێماسی ئێك جارێ ل هەلدانا بەرکێ زارەکێ 6 جاران.

ب دیاربوونا ژمارە 1 بکێماسی دوو جاران ل هەلدانا بەرکێ زارەکێ 12 جاران.

59 دیاربکه کو هەر ژمارەیەك ${}_{n+1}C_{r+1}$ د سێگۆشەیا باسکال دا یەکسانە، سەرجەمێ هەردوو ژماران ${}_nC_r$ و ${}_nC_{r+1}$، دەمێ $r \neq 0$ $r \neq n$ $n > 1$.

60 **بوڵینگ**: ئەگەرا سەرکەفتنا یاریزانەکی بۆ لیٚنك جارەکا بتنێ ل دوو هەولدانان 40% بوو.

أ هاوکێشەیا هەژمارتنا p بنقیسە و پاشی شیکاربکە.

ج ئەگەرا سەرکەفتنا یاریزانی ل هەردوو هەولدانان چەندە؟

پێداچوونا لوولپێچی

ل هەر بارەکی ل خوارێ: $f(-3)$، $f(0)$، $f(2)$ بهەژمێرە. (پوٚلێن پێشتر)

61 $f(x) = -x^2 + 2x - 4$

62 $f(x) = (-x)^2 - 3x + 1$

دیاربکە ئەرێ y نەخشەیەکا تواییە پێ x، هەکەر وەسا بوو بژمێرا ڕوونکرنێ بکاربینە بۆ هەژمارتنا نەخشەیەکا توانی کو پێدایێن قێ خشتەی بنوێنت.

63

x	1	2	3	4	5
y	1.4	2.6	3.8	5.0	6.2

64

x	1	2	3	4	5
y	10	22	36	52	70

ناڤەندێ ژمارەی و ناڤەراست و باو بۆ هەر کۆمەلەکا پێداییان بهەژمێرە (وانەیا 2 – 6)

65 $\{2, 18, 15, 14, 18\}$

66 $\{6, 13, 9, 7, 6, 4\}$

67 $\{24, 20, 32, 24, 16, 34\}$

68 $\{10, 5, 15, 5, 8\}$

بەشی 2

ڕێبەری خواندنی: پێداچوون

ڤان لاسەنگەییێن ل خوارێ ب ویێنەیێ ڕوونکرنێ شیکاربکە:

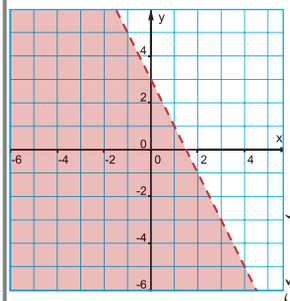
1 $y > -3$

2 $y \le x + 3$

3 $2x + 4y > -12$

4 $6x - 2y > 8$

5 لاسەنگەیەکا ب دوو نەزانراوان بنڤیسە، ب مەرجەکی ویێنەیێ ڕوونکرنێ یێ بەرامبەر ببیتە شیکار بۆ وێ



6 ڕێڤەبەریا مۆزەخانەکێ دوو جۆرێن پلیتێن چوونا ژۆرێ دفرۆشیت پلیتەك بۆ ڕۆژەکێ بهایێ وێ 12 000 دینار و پلیتا ژ جۆرێ دووێ بۆ دوو ڕۆژان بهایێ وێ 21 000 دینار بوو، ل ڕۆژەکێ بهایێ فرۆتنا پلیتان زێدەتر بوو ژ 2 520 000 دیناران، لاسەنگەیەکێ بنڤیسە و ب ویێنەیێ ڕوونکرنێ شیکاربکە.

7 خالێن ڕوونکرنێ بۆ نواندنا پێدایێن خشتەی دانە، هاوکۆلکێ پێکڤەگریدانێ و هاوکێشەیا ڕاستەهێلێ باشترین نواندن دیاربکە.

x	2	5	9	13	16
y	8	10	24	16	29

8 خشتەیێ ل خوارێ داهاتێ سالانە یێ هندەك کەسان، و بهایێ خانیێن وان هەین دنوێنت.

داهاتێ سالانە ب ملیۆنێن دیناران	بهایێ خانیێ وان ب ملیۆنێن دیناران
96.5	130.2
46.3	94.5
56.7	115.5
65.2	106.4
54.7	98.6
59.6	115.5

أ) ڤان پێداییان ب ویێنەیێ ڕوونکرنێ بنوێنە داهاتێ وەك گۆڕاوێ ئازاد بکاربینە.

ب) هاوکولکێ پێکڤەگرێدانێ و هاوکێشا ڕاستەهێلێ باشترین نواندن دیاربکە.

9 فرۆتنێن دوو لقێن کۆگەهەکا مەزن گەهشتە 12 ملیۆن دیناران. فرۆتنێن ئێکێ ژ وان بکێماسی 75% ژ سەرجەمێ فرۆتنان بوو. سیستەمەکی لاسەنگەیێن هێلی بنڤیسە، و ب ویێنەیێ ڕوونکرنێ شیکاربکە بۆ دیارکرنا فرۆتنێن دشیاندا بۆ هەر لقەکی.

سیستەمێ لاسەنگەیێن هێلی ب ویێنەیێ ڕوونکرنێ شیکاربکە:

10 $\begin{cases} y + 1 > 4x \\ y \le x + 1 \end{cases}$

11 $\begin{cases} y - 3x < 3 \\ 3y \ge x + 3 \end{cases}$

سیستەمێ لاسەنگەیێن هێلی ب ویێنەیێ ڕوونکرنێ شیکاربکە، و شێوێ دەڤەرا شیکارێ پۆلینبکە:

12 $\begin{cases} y \le -x + 2 \\ x > -1 \\ y > -1 \end{cases}$

13 $\begin{cases} y \ge 2x \\ y < 4 \\ y > 2 \\ y \le \frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$

14 **کارگیریا کاری:** خودانێ دوکانەکا قەهوە فرۆتنێ دڤێت تێکەلەکی قەهوێ ژ دوو جۆران ئامادەبکەت کو نە زێدەتر بیت ژ 120 کیلۆ گرامێن تێکەلی و بهایێ هەر کیلۆگرامەکێ 10000 دینار بیت. بۆ ڤێ مەبەستێ دوو جۆرێن قەهوێ بکارئینان، بهایێ کیلۆگرامەکا جۆرەکی 8000 دینار بوو و بهایێ کیلۆگراما جۆرێ دی 11500 دینار بوو.
سیستەمەکی لاسەنگەیێن هێلی بنڤیسە بو دیارکرنا بڕێن هەردوو جۆرێن قەهوێ، پاشی ئەڤی سیستەمی ب ویێنەیێ ڕوونکرنێ شیکاربکە.

15 خوارنگەهەك لەڤێن سار و گەرم دفرۆشیت خشتەیێ ل خوارێ پێدایێن لەڤێن خوارنگەهە دفرۆشیت دیاردکەت. ژمارا لەڤێن خوارنگەهە د فرۆشیت نە زێدەترە ژ 125 لەڤان ژ هەردوو جۆران ل ڕۆژەکێ. خوارنگەهە ژ فرۆتنا هەر لەفەکا سار 750 دیناران و ژ فرۆتنا هەر لەفەکا گەرم 1000 دیناران قازانج دکەت. دڤێت خوارنگەهە دڕۆژەکێدا چەند لەفان ژ هەر جۆرەکی بفرۆشیت بۆ ب دەستڤەئینانا ئەوی بهایێ دشیاندا قازانج بکەت؟

لەڤێن هاتینە فرۆتن	نزمترین ڕادە	بلندترین ڕادە
سار	60	80
گەرم	40	60

ب ویێنەیێ ڕوونکرنێ دەڤەرا بمفا دیاربکە.

16 $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ y \le 3x + 1 \\ y \le -\frac{3}{4}x + 6 \end{cases}$

17 $\begin{cases} y < 3 \\ y \ge 0 \\ y < 2x + 1 \\ y \le -x + 4 \end{cases}$

18 $\begin{cases} x>0 \\ y<0 \\ y>\frac{1}{2}x-6 \end{cases}$

19 $\begin{cases} y\le 2 \\ y\ge -1 \\ y\ge -1 \\ y\le -x+3 \end{cases}$

20 ئەو پەڕە بهایێ نەخشەیا بمفا $p=6x+10y$ چەندە؟ کو مەرجێن راهێنانا 16 ساخدکەت.

21 ئەو پەڕە بهایێ نەخشەیا بمفا $p=14x+9y$ چەندە؟ کو مەرجێن راهێنانا 17 ساخدکەت.

کارگەهەك دوو جۆرێن پیلاڤان دروستدکەت. جۆرەکی ستوور دروستکرنا ئێکێ ژ وان 6 خولەك پێدڤێن و 8000 دیناران قازانج دکەت. و جۆرەکی تەنك، بۆ دروستکرنا ئێکێ ژ وان 4 خولەك پێدڤێن و 9000 دیناران قازانج دکەت. تۆرا بەرهەمئینانێ دشێت 12 دەمژمێران کاربکەت ئانکو 750 خولەك رۆژانە. ل دووڤ پێدڤیێن بازاری، کارگەهـ پێلاڤێن ژ جۆرێ ستوور دوو جارانی پێلاڤێن ژ جۆرێ تەنك بکێماسی دروست دکەت.

22 پرۆگرامێ هێلی بۆ نواندنا ڤێ پرسیارێ بنڤیسە، و ب وێنەیێ ڕوونکرنێ دەڤەرا بمفا دیاربکە.

23 نەخشەیا بمفا بنڤیسە.

24 بلندترین قازانجێ دشیاندا درۆژەکێدا بدەست کارگەهێ بکەڤیت چەندە؟

25 **فرۆتن:** دوکانەکا مۆبایلان رۆژانە لناڤبەرا 10 هەتا 52 موبایلان ل گەل بەلینیا چێکرنا وان دفرۆشیت و 35000 دیناران قازانج دکەت ل فرۆتنا هەر ئێکێ ژ وان. و لناڤبەرا 5 هەتا 10 موبایلان بێی بەلینیا چێکرنا وان دفرۆشت و 5000 هزار دیناران قازانج دکەت. ل فرۆتنا هەر ئێك ژ وان. دڤێت دوکان چەند موبایلان ژ هەر جۆرەکی بفرۆشیت بۆ دەستڤەئینانا پەرە قازانجێ دشیاندا؟

لادانێ بکاربینە بۆ شیکارکرنا هەر سیستەمەکی؟

26 $\begin{cases} x+3y+2z=13 \\ 2x+2y-z=2 \\ x-2y-3z=-12 \end{cases}$

27 $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3x+2y-z=-1 \\ 3x-y=4 \end{cases}$

سیستەمی پۆلینبکە و ژمارا شیکارێن وی دیاربکە:

28 $\begin{cases} x+y+z=-2 \\ -x+2y-5z=4 \\ 3x+3y+3z=5 \end{cases}$

29 $\begin{cases} -x-y+2z=-3 \\ 4x+4y-8z=12 \\ 2x+y-3z=-2 \end{cases}$

ناڤەندێ ژمارەیی و ناڤەراست و باو بۆ هەر کومەلەکا پێداییان بهەژمێرە.

30 6 ، 8 ، 0 ، 8 ، 5

31 12 ، 15 ، 13 ، 13 ، 15 ، 12

32 خشتەیێ ل خوارێ بەڵاڤکرنا ئەگەرێ بۆ ژمارا ڕووداندنێن ڕۆژانە ل باژێرەکی بچووك دیاردکەت. ژمارا ڕووداندنێن پێشبینکری ل ڕۆژەکێ بهەژمێرە.

ژمارا ڕووداندن n	0	1	2	3
ئەگەرا n ڕووداندن	0.65	0.22	0.1	0.03

33 ڕوونکرنا سمبێلی بۆ ڤێ کۆمەلا پێداییان دروستبکە، پاشی مەودایێ چارێکی دیاربکە:
71, 50, 29, 83, 48, 65, 52, 33

34 ژمارا بەریکانێن شۆفێرەکی تورمبێلان ل وەرزشێ بەرکەفتی ل ساڵەکێ ژ دەھـ سالێن بۆری ب ڤی شێوەی بوو: 5، 7، 4، 11، 8،10، 6، 9، 7 ...؟ ژمارا وان بەریکانان بهەژمێرە کو دووریا وان ژ ناڤەندێ ژمارەی نەزێدەتر بیت ژ ئێك لادانێ پیڤانەی.

35 قوتابیێن پۆلا دوماهیکێ ئەزموونا وەرگرتنێ ل زانکۆیێ ئەنجامدان. ناڤەندێ ژمارەی بۆ نمرەیێن وان 81.3 بوو، و لادانانێ پیڤانەی 4.4 بوو. کاوەی 96 نمرە ژ 100 بر بوو. ئەرێ نمرەیا وی بهایەکی پەڕگرە؟

36 نمرەیێن نەشمیلێ ل (6) ئەزموونان ب ڤی شێوەی بوون: 73، 88، 86، 90، 87، 29 ناڤەندێ ژمارەی و لادانێ پیڤانەی بۆ ڤان پێداییان بهەژمێرە. هەکەر نمرا وێ ل ئەزموونا حەفتێ 32 بیت، کارتێکرنا ڤێ نمرێ لسەر ناڤەندێ ژمارەیی و لادانێ پیڤانەی روونبکە.

سەلمینراوا رادەدارێ دووانی بۆ ڤەکرنا هەر ئێکی ژ ئەڤانێن ل خوارێ بکاربینە:

37 $(5+2x)^3$

38 $(x-2y)^4$

39 سەردار گۆلکەرێ تیپا تەپا پێیە، ئەگەرا ئینانا گۆلەکێ ل دانانەکا سەر بەخو 0.65 بوو. سەرداری 57 دانانێن سەربەخو بجهئینان. ژمارا پێشبینکری بۆ بدەستڤەئینانا گۆلان ل ڤان دانانان و لادانێ پیڤانەی بهەژمێرە؟

بەشی 2

ئەزموونا بەشی

1 یانەیا دهوك قەمیس و كۆلاڤێن دروشمێ یانەیێ لسەر نەخشەكری د فروشیت بۆ كۆمكرنا 2400000 دیناران بكێماسی. بهایێ قەمیسەكی 15 000 دینار و نرخێ كۆلاڤەكی 8 000 دینارەوو. لاسەنگەیەكێ بنڤیسە بۆ نواندنا ژمارا قەمیس و كۆلاڤێن دڤێت یانە بفرۆشت، پاشی ب وێنەیێ روونكرنێ شیكاربكە.

2 تیپەكا توێژەران ب ڤەكولینەكێ رابوو لسەر نەخوشخانەیان. ژمارا قەریۆلان و ژمارا كارەمەندان دخشتەیێ پێداییاندا تۆمارکرن:

ژمارا قەریۆلان	ژمارا كارمەندان
23	69
29	95
35	118
42	126
46	123
54	178
64	156
76	176

أ پێداییێن خشتەی ب وێنەیێ روونكرنێ بنوێنە ب وەرگرتنا ژمارا قەریۆلان وەك گۆڕاوێ ئازاد.

ب هاوكۆلكێ پێكڤەگرێدانێ و هاوكێشەیا راستەهێلی باشترین نواندن بهەژمێرە، وێنەیێ ڤی راستەهێلی ل گەل خالێن ڕوونكرنێ بكێشە.

ج ژمارا وان قەریۆلێن ل نەخۆشخانەكێ كو 80 كارمەند تێدا كاربكەن بخەملینە.

سیستەمێ لاسەنگەیان ب وێنەیێ روونكرنێ شیكاربكە:

3 $\begin{cases} 2y-4x\geq 4 \\ y-x\geq 1 \end{cases}$ **4** $\begin{cases} y+x\geq 3 \\ y-4\leq 0 \end{cases}$

5 **كیمیا:** كێمیا زانایەك كاردكەت لسەر پێكئینانا ئاویتەكی 250 ml كو سویراتیا وی بزێداهی 18% بیت، بكارئینانا دوو گیراوان. سویراتیا یێ ئێكێ 9% و سویراتیا یێ دووێ 24%. سیستەمێ لاسەنگەیان بنڤیسە و شیكاربكە بۆ دیاركرنا برِێ هەر گیراوەكی بكاردئێت.

6 بچووكترین بها بۆ نەخشەیا $P=5x+9y$ ل دووڤ ڤان مەرجان بهەژمێرە:

مەرج $\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ y\leq 2x+1 \\ y\leq -3x+6 \end{cases}$

سیستەمێن هێلی پۆلینبكە و ب ڕێیا لادانێ سیستەمێ سنووردار شیكاربكە.

7 $\begin{cases} x-y+z=-2 \\ 4x-y+2z=-3 \\ 2x-3y+2z=-7 \end{cases}$ **8** $\begin{cases} 3x-y-z=-1 \\ x+y+2z=8 \\ 6x-2y-2z=5 \end{cases}$

خشتەیێ ل خوارێ ژمارا هەیڤێن هەر هەسارەكێ دسیستەمی روژێدا دیاردكەت.

هەسار	ژمارا هەیڤان
عەتارد	0
زوهرە	0
ئەرد	1
مەریخ	2
موشتەری	63
زوحەل	33
ئۆرانۆس	27
نیبتۆن	13
بلۆتۆ	1

9 ئەرێ بهایێ 63 بهایەكی پەرگرە؟ ئەڤێ روونبكە.

10 ناڤەندێ ژمارەی و ناڤەراست و باو و لادانێ پیڤانەی بۆ كۆمەلا پێداییان: 90, 114, 99, 128, 111, 12, 95, 98, 103, 110, 107, 93 بهەژمێرە. بەهایێن پەرگر دڤێ كۆمەلێ دا دیاربكە، روونبكە چەوا بەهایێن پەرگر كارتێكرنێ دكەن لسەر ناڤەندێ ژمارەی و لادانێ پیڤانەی.

11 رادەدارێ دووانی $(3x+4)^4$ ڤەكە.

ئەگەرا سەركەفتنێ ل یارییەكێ 15% ، هوشیاری 10 جاران یاریكر.

12 ئەگەرا سەركەفتنا وی دوو جاران بهەژمێرە.

13 ئەگەرا سەركەفتنا وی بكیماتی دووجاران بهەژمێرە.

بەشی 2

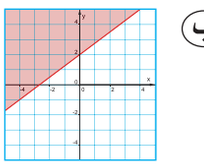
ئەزموونا کەلۆکی

1 کێژ ئەڤانێن ل خوارێ هاوکێشەیا وی راستەهێلی دنوێنت کو دخالا (7 ,2−) را دبۆرت و لاری وی 3-؟

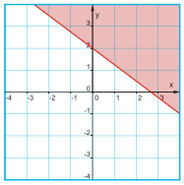
أ) $y=-3x-1$ ب) $y=-3x+1$

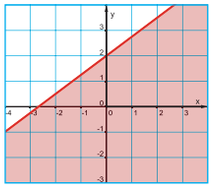
ج) $y=-3x+13$ د) $y=-\frac{1}{3}x+1$

2 کێژ ئەڤانێن ل خوارێ دەڤەرا شیکارا لاسەنگەیا $y+\frac{3}{4}x\geq 2$ دنوێنیت؟

أ) 

ب)

ج) 

د) 

3 کێژ ئەڤان کۆمەلێن ل خوارێ (3−) نەدانەیە تێدا؟

أ) تەواو ب) راستی

ج) ڕێژەی د) سروشتێ

4 بڕی $4\sqrt{50}+3\sqrt{72}$ ب سادەترین شێوە بنڤیسە:

أ) $4\sqrt{7}$ ب) $7\sqrt{112}$

ج) $12\sqrt{5}$ د) $38\sqrt{2}$

5 لارێ ڕاستەهێلی $-3y=6x+12$ چەندە؟

أ) 4− ب) 2− ج) $-\frac{1}{2}$ د) $-\frac{1}{4}$

6 خشتەیێ پێدایێن ل خوارێ کرێیا ڕۆژانە یا کۆمەلەکا کرێکارێن ل کومپانیەکێ کاردکەن ل دویڤ ژمارا سالێن شارەزاییا وان دنوێنت. کێژ ئەڤێن ل خوارێ بهایەکی گونجاییە بۆ لارێ راستەهێلێ باشترین نواندن؟

ژمارا سالێن شارەزاییێ	کرێ ب دیناران
0	33 407
2	34 273
5	37 882
8	40 185
10	42 977
12	45 864
15	53 811

أ) 450 ب) 750 ج) 1275 د) 2650

7 پارێ بکرێگرتنا ترومبێلەکێ 950 39 دینارە، ل گەل زێدەکرنا 400 دیناران بۆ هەر کیلومەترەکا ترومبێل ببرت. کێژ ڤانێن ل خوارێ باشترین پەیوەندیێ دنوێنت لناڤبەرا لێچوونێ C و ژمارا کیلۆ مەترێن هاتینە بڕین.

أ) $C=39\ 950+400$

ب) $C=39\ 950k+400$

ج) $C=39\ 950+400k$

د) $C=39\ 950k+400k$

8 خالێن ئێکودووبڕینا رووتەختێ $2x+y-5z=20$ ل گەل تەوەرین بۆشایی پۆتانێ ل بۆشایێ کێژ وانن؟

أ) $x=0$ ، $y=0$ ، $z=0$

ب) $x=2$ ، $y=1$ ، $z=-5$

ج) $x=10$ ، $y=20$ ، $z=-4$

د) $x=10$ ، $y=20$ ، $z=4$

9 سەرێن دەڤەرا کونجای ئەڤ خالەنە: $(0,0)$ $(-2,6)$ $(3,-1)$ $(-1,1)$ $(-5,-5)$ مەزنترین بهایێ نەخشەیا بمفا $P=4x-y$ دڤێ دڤەرێ دا؟

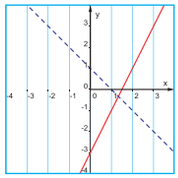
أ) 0 ب) 7 ج) 13 د) 25

10 مالا ڕەڤەند 660 km ژ زانکۆیێ یا دوورە. 8 دەمژمێر بنێزیکی بۆ وی دڤێن هەکەر ترومبێلا خو ب لەزەکا نەگۆر 90 km / h پاژۆت. کێژ ڤان نەخشەیێن ل خوارێ ژمارا وان کیلۆمەترین ڕەڤەند دبڕت دنوێنت، پشتی x دەمژمێران ژ دەرکەفتنا وی ژ مال؟

أ) $f(x)=660-90x$ ب) $f(x)=660+90x$

ج) $f(x)=660-80x$ د) $f(x)=90x$

11 کێژ سیستەمێ لاسەنگەیان ئەڤێ دەڤەرا شیکارێ دنوێنیت؟



أ) $\begin{cases} y\leq 2x-3 \\ y\geq -x+1 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} y\leq 2x-3 \\ y>-x+1 \end{cases}$

ج) $\begin{cases} y<2x-3 \\ y>-x+1 \end{cases}$ د) $\begin{cases} y\geq 2x-3 \\ y<-x+1 \end{cases}$

بەشێ 2 سیستەمێن لاسەنگەیێن هێلی.

12 کیژ سیستەمێ هێلی ل خوارێ سیستەمەکی سنووردارە؟

أ) $\begin{cases} 2y+3x=-8 \\ 9x=-24-6y \end{cases}$ ب) $\begin{cases} 2y+7x=24 \\ 5y-6=-4x \end{cases}$

ج) $\begin{cases} y=-x+4 \\ 3y+3x=-21 \end{cases}$ د) $\begin{cases} 2y=3x-6 \\ 8y-12x=80 \end{cases}$

بەرسڤا کورت

13 دەمێ سەرجەمێ نمرەیێن پالیوراوەکی بۆ ئەزموونێن وەرگرتنێ ل کولیژا نۆژداریێ دەهـ‌ژمێرن، نمرەیا زانستێ لێکدانی 2 دکەن و نمرەیا بیرکاری لێکدانی 3 دکەن و نمرەیا زێندەوەرزانێ لێکدانی 4 دکەن، لێ نمرەیێن زمانی لێکنادەن ل گەل هێچ ژمارەیەکێ. نمرا شیرزاد 49 بوو ل زمانی و 32 بوو ل زانستی، و 20 ل بیرکاری و سەرجەمێ خالێن وی 411 بوو. ئەرێ نمرا وی ل زێندەزانێ چەندە؟

14 بچووکترین ژمارەیا تەواوا مووجەب کو ببتە شیکار بۆ قێ لاسەنگێ $\frac{|430-3x|}{3} > 816$ بهـ‌ژمێرە.

15 هـەلۆ 3 پارچەیێن پیتزایێ و لبێن شلیکێ خوارن، 975 گەرمۆکێن گەرماتیێ، وەرگرتن، لێ بلندی 950 گەرمۆکێن گەرماتیێ وەرگرتن پشتی خوارنا 4 پیتزا و 6 لبێن شلیکێ. ئەرێ چەند گەرمۆکێن گەرماتیێ دپارەچەکا پیتزایێ دا هـەنە.

بەرسڤا کورت

16 کۆمەلەکا سەردانکەرێن باغچێ ئاژەلان 4 پلیتێن چۆنا ژورێ بۆ مەزنان و 5 پلیتێت چۆنا ژۆرێ بۆ زاروکان ب برێ 68 000 دیناران کڕین، کۆمەلەکا دی 216000 دینار دان بۆ بهایێ کڕینا 12 پلیتێن مەزنان و 17 پلیتێن زاروکان.

أ) سیستەمێ هاوکێشەیان بۆ نواندنا قێ پرسیارێ بنڤیسە.

ب) سیستەمی ب وێنەیێ روونکرنێ شیکاربکە.

ج) سیستەمی ب رێیەکا دی شیکاربکە. روونبکە بۆچی ئەڤ رێیە باشترە ژ رێیا وێنەیێ روونکرنێ. بهایێ بلیتا ژ هـەر جۆرەکی چەندە؟

17 خالا B وێنەیە بۆ خالا $A(3,4)$ ب وێنەدانەوە ل دۆر تەوەرێ ئێکێ.

أ) پۆتانێ خالا B چەندە؟

ب) خالا C وێنەیە بۆ خالا B ب راکێشانا 3 یەکەیان بەرەڤ لایێ چەپێ و دوو یەکەیان بەرەڤ خوارێ. پۆتانێ خالا C چەندە؟

18 نەخشەیا $g(x)$ نەخشەیەکە پەیدابوویە ژ جهگۆهۆرکا نەخشەیا $f(x)=4x-3$ ب راکێشانا 5 یەکەیان بەرەڤ خوارێ:

أ) هاوکێشەیا نەخشەیا $g(x)$ بنڤیسە.

ب) هاوکێشەیا نەخشەیا $h(x)$ بنڤیسە کو پەیدابوویە ژ ئەنجامێ جهگوهورکا نەخشەیا $g(x)$ ب وێنەدانە ل دۆر تەوەرێ ئێکێ

بەرسڤا دریژ

19 ل کارگەهـەکا پەردان 820 پاکێت ژ دەزیێ بەمبووی و 1250 پاکێت ژ دەزیێ نایلونی هـەنە: بۆ چێکرنا پەردەکا ئەرزان 18 پاکێت ژ دەزیێ بەمبوویی و 32 پاکێت ژ دەزیێ نایلونی دڤێن، لێ چێکرنا پەردەکا باش پێدڤی ب 36 پاکێت ژ دەزیێ بەمبوویی و 28 پاکێت ژ دەزیێ نایلۆنی هـەیە.

أ) مەرجێن پرسیارێ بنڤیسە.

ب) دەڤەرا کونجای وێنەبکە و سەرێن وێ دیاربکە.

ج) کارگەهـەك 170 000 دیناران قازانج دکەت ژ چێکرنا پەردەکێ ژ جۆرێ ئەرزان و 190 000 دیناران قازانج دکەت ژ چێکرنا پەردەکێ ژ جۆرێ باش. نەخشەیا بمفا بنڤیسە.

د) دڤێت کارگەهـ چەند پەردان ژ هـەر جۆرەکی چێبکەت هـەتا پەرە قازانج بدەست بکەڤیت؟

بەشێ

3

ڕێزکری

Matrices

بەشێ سێیێ

وانە

3–1 ڕێزکری

3–2 لێکدانا ڕێزکرییان

3–3 ڕێزکری و جهگوهۆڕکێن ئەندازەیی

3–4 سنووردار و ڕێسایا گرامە

ئەزموونا نیڤا بەشی

3–5 هەڵگەڕاوێ ڕێزکریێ

لاپەڕێ تەکنەلۆژیا شیکارکرنا سیستەمەکی هێلی بکارئینانا Excel

3–6 ژمارەییێن ئاوێتە

3–7 کردار ل سەر ژمارەییێن ئاوێتە

جیهانا تەکنیکی

تو دشێی ڕێزکرییان بکاربینی بۆ بەرچاڤکرن و شیتەلکرنا پێداییان، وەك زێدەبوونا ژمارەیا ئەوان سنێلێن ئامیرێن تەکنەلۆژیێ بکاردئینن.

ئەرێ تو یێ ئامادەی

زاراڤ

هەر زاراڤەکی دگەل پێناسا وی یا ل ڕەخێ چەپێ هاتی گرێدە:

1. نیڤتیرێ بازنێ
2. سیستەمێ ستەم
3. سیستەمێ بێ دوماهیك
4. جهگۆهورکیا ئەندازەیی

أ. کردارەکە ئەنجام ناهێتە گوهۆڕین هەکەر جهێن هەردوو کۆلکان بگوهۆڕی $ab = ba$, $a+b = b+a$

ب. دووراتیا ل ناڤبەرا چەقێ بازنێ و خالەکا ل سەر بازنێ.

ج. سیستەمێ وان هاوکێشەیانە کو شیکار نینە.

د. گوهورپنەك دجهێ شێوەیەك ئەندازەییدا یان دپیڤانێن ویدا یان د سیمایێ وێدا.

هـ. سیستەمێ وان هاوکێشەیانە کو ژمارەیەکا بێ دوماهیك ژ شیکاران هەیە.

کۆمکرن و لێدەرکرنا ژمارەییێن تەواو

هەر بڕەکی ب سادەترین شێوە بنڤیسە.

5. $2+7+(-10)$
6. $-8+14+(-3)$
7. $-2+(-3)+(-5)$
8. $-9+15-7+1$
9. $20-(-5)+(-3)-2$
10. $9+8-7+5-(-3)+2$

لێکدان و دابەشکرنا ژمارەییێن تەواو.

هەر بڕەکی ب سادەترین شێوە بنڤیسە.

11. $-18\div 9$
12. $-6(-1)$
13. $16(-2)$
14. $-15\div(-3)$

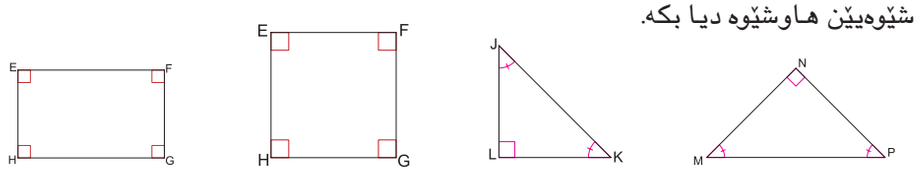
ڕێزبەندیا کرداران

هەر بڕەکی ب سادەترین شێوە بنڤیسە.

15. $2(0.5)+2(0.6)$
16. $0(6.7)+1(0.3)-5(2)-3(8)$
17. $3(2+7+0)-5(3+6+4)$
18. $4(3-6+2)-5(2+0-1)$

ژیکجوداکرنا شێوەییێن هاوشێوە

19. شێوەییێن هاوشێوە دیا بکە.



دەرئینانا پیڤانێن نەدیار د شێوەییێن هاوشێوەدا

20. هەردوو سێگۆشەییێن ABC و DEF هاوشێوەنە $m\widehat{FDE}=35^\circ$. پیڤانا کیژ گۆشەیا دی دبیتە 35° ؟

21. هەردوو سێگۆشەییێن FGH و JKL هاوشێوەنە $JL=12$، $GH=12$، $FH=8$، KL بینەدەر.

بەشێ 3

ڕێبەرێ خواندنێ: لێنێرینەك بۆ بەشی

ل دەمێ بۆری

ئەڤە خواند بوون

- ڕێکخستنا پێزانینان د خشتەیاندا.
- ئەنجامدانا کرداران ل سەر ژمارەیێن راستی.
- شیکارکرنا سیستەمێن دووانی 2 × 2
- شیکارکرنا هاوکێشەیێن دوجایی.

د ڤی بەشیدا

دێ فێری ئەڤان بی

- ڕێکخستنا پێزانینان د ڕێزکریاندا.
- ئەنجامدانا کرداران ل سەر ڕێزکریان.
- شیکارکرنا سیستەمەکێ هاوکێشەیێن هێلی بکارئینانا ڕێزکرییان.
- جهگوهۆڕکیا شێوەیێن ئەندازەیی ئەنجام ددەن بکارئینانا ڕێزکریان.
- ئەنجامدانا کردارن ل سەر ژمارەیێن ئاوێتە.

د ئایندەدا

تو دشێی شارەزایێن ڤی بەشی بکاربینی:

- دەمێ ڤەکۆلینان لسەر هندەك بابەتێن دی بکەی وەکی ئەندازە و ئامار و کارگێریێ.
- ل یاریێن وەرزشێ یێن ئاستێ جودا و ئالۆز تێدا دیار دکەن.
- ل دەرڤەی قوتابخانێ بۆ ڕێکخستنا پێداییان و چارەکرنا وان، لدەمێ شیتەلکرنا ئەنجامێن ئەوان گوهۆڕینن ب سەردا دهێن.

زاراڤ — *Vocabulary*

Adress	ناڤونیشان
Dimensions	خانە (جۆر)
Entry	دانە
Main diagonal	تەوەرێ سەرەکی
Matrix	ڕیزکری
Square matrix	ڕیزکریێ چارگۆشەیی

ڕۆناهییەك ل سەر زاراڤان

دا شارەزابی ل زاراڤێن د ڤی بەشیدا هاتین، ل دویڤ ڤان پێنگاڤان هەرە:

1. **ناڤونیشان** ژمارەیەکا د ڕێزکرییەکێدا، ستوون و ڕێزا ئەو ژمارە دکەڤتە سەر ئێکدووبڕینا وان نیشا تە ددەت. بۆ دیارکرنا ناڤونیشانێ خانییەکی، کیژ دوو دانەیان بکاردئینی؟
2. **خانەیا** ڕێزکریێ، ژمارەیا ڕێز و ژمارەیا ستوونێن وێ دیار دکەت. دێ چ تێگەهی هەکەر هەڤالێ تە گوت: یاریگەها 50 m ب 30 m ؟
3. **تەوەرێ سەرەکی** د ڕێزکرییەکیدا ژ گۆشەیا سەری یا ڕەخێ چەپێ دەردکەڤیت و بەرەڤ گۆشەیا خوارێ یا ڕەخێ ڕاستێ دچیت. ئەرێ ژمارەیا ڤی لاپەری دکەفتە سەر تەوەرەێ سەرەکی؟
4. تو دزانی کو درێژی و پانیا چارگۆشەیێ د یەکسانن، دێ چ زانی ژ ڕێزکرییەکێ هەکەر گوتن، **ڕێزکرییەکا چارگۆشەییە**.

بەشی 3

بیرکاری ب خواندن و نڤیسینێ

ستراتیژییا خواندنێ : خواندنا هێمایێن بیرکاریێ و تێگەهشتنا ڕامانا وان

خواندن و تێگەهشتنا رامانا هێمایێن بیرکاریێ شارەزاییەکا پێدڤییە بۆ تێگەهشتنا بابەتێن بیرکاریێ. دەمێ بیرکاریێ دخوینی، ئەو برێن هێمایێن بیرکاریێ تێدا، ب دەنگەکێ بلند بخوینە دا بشێی ئەوان هێمایان بگوهۆڕی بۆ پەیڤ و ژبیرا تە نەچن.

هێمایێن بەربەڵاڤ

$=$	$\sqrt{\ }$	$\%$	$\lvert x\rvert$	∞
یەکسان	ڕەگێ دووجایی	ژ سەدێ	بهایێ ڕووتێ x	بێ دوماهی

هێمایێن لاسەنگێ

$<$	$>$	$\leq$	$\geq$	$\neq$
بچووکترە ژ	مەزنترە ژ	بچووکترە یان یەکسانە	مەزنترە یان یەکسانە	نە یەکسانە

هێمایێن نەخشە و کۆمەڵان

$f(x)$	$\{$	$\wedge$	$\vee$	$\{x\mid\}$
f نەخشێ x ئێف ئۆف ئیکس	سیستەم	(یەکتربڕین)	یان (ئێکگرتن)	کۆمەڵا x دەمێ

نڤیسین ب هێمایان	وەرگێران بۆ پەیڤان
$f(x)=\sqrt{16x}-4$	ئێف ئۆف x یەکسانە ڕەگێ دووجایی 16 جاران x کێم 4
$\frac{\lvert x-15\rvert}{6}\leq 12$	رووتێ x کێم 15 دابەش 6 بچووکترە یان یەکسانە ب 12
$\{x/(x\leq -19)\vee(x>8)\}$	کۆمەلەیا ژمارەیێن x کو x بچووکترە یان یەکسانە ب 19-و مەزنترە ژ 8
$\begin{cases} y\leq -4x+8 \\ y>x-6 \end{cases}$	سیستەمێ دوو لاسەنگەیێن پێکهاتی «y بچووکترە یان یەکسانە سالب 4 لێکدانی x کۆم 8» و «y مەزنترە ژ x کێم 6»

هەوڵبدە

ئەڤان نڤیسینێن هێمادار ب پەیڤان دەربڕە.

1. $\{x/(x\geq -7)\vee(x\leq -1)\}$
2. $f(y)=\lvert 15y\rvert+\frac{y}{2}$
3. $\begin{cases} y=2x+3 \\ y=x \end{cases}$
4. $[-5,\infty[$

ڕستەیا دهێت بکارئینانا هێمایێن بیرکاریێ دەربڕە.

5. کۆمەڵەیا ژمارەیێن x کو x دناڤبەرا سالب 8 و 10 دایە.

1–3 ڕێزکری Matrices

بۆچی ئەڤی فێردبین؟

ڕیزکری بۆ ڕێکخستنا پێداویان بکاردئین. وەکی ڕێکخستنا کەلوپەلێن بنگەهەکی بازرگانی بکارئینانا ڕێزکرییان. (نموونە 3)

ئارمانج

- ڕیزکرییان بکاردئینیت بۆ نواندنا پێداویێن بیرکاریی و ژیانا ڕۆژانە.
- ڕێزکرییان دێ کۆمکەن و لێدەرکەن.
- ژمارەیەکا راستی دێ ل ڕێزکرییەکێ دەن.

زاراڤ Vocabulary

ڕیزکری
Matrix

خانەیا ڕیزکریێ (جۆرێ وێ)
Dimensions

دانەیێ ڕیزکریێ
Entry

ناڤونیشان
Adress

خشتەیێ ل خوارێ بزاڤێن بازرگانی یێن دوکانەکا فرۆتنا کەلوپەلێن ناڤمالێ د مەها نیسانێدا دیار دکەت. د خشتەیدا کەلوپەلێن د دوکانێدا ل(دەستپێکا مەها نیسانێ) و فرۆتنێن(د مەها نیسانێدا) و تشتێت کڕین (د مەها نیسانێدا) دیار دبن.

	کەلوپەلێن دوکانێ ل دەستپێکا مەها نیسانێ		فرۆتنێن د مەها نیسانێدا		تشتێن کڕین د مەها نیسانێدا	
	بچووك	مەزن	بچووك	مەزن	بچووك	مەزن
میزەیێن باغچەیی	8	10	7	9	15	20
مەقلێ	15	12	15	12	18	24

تو دشێی پێداویێن کەلوپەلێن دوکانێ بکارئینانا ڕیزکرییەکێ بنوێنی.

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 15 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{میزەیێن باغچەیی} \\ \text{مەقلییێن بژارتنێ} \end{matrix}$$

بچووك مەزن

ڕیزکرییا کەلوپەلان

ڕیزکری Matrix خشتەیەکێ لاکێشەییە، ژ چەند خانەیان پێکدئێت و ب دوو کڤانێن ستوونی دەورداییە. هەر خانەیەکێ ژمارەیەك تێدایە دبێژنێ **دانەیەك Entry** ژ دانەیێن ڕێزکریێ. پلەیا **ڕێزکریێ Dimension** دەربڕینێ ژ ژمارەیا ڕیز و ژمارەیا ستوونێن وێ دکەت، و ب ڤی شێوەی دئێتە نڤیسین: **ژمارەیا ڕیزان × ژمارەیا ستوونان**، هەکەر ڕێزکریێ دوو ڕیز و سێ ستوون هەبن، پلەیا وێ دێ بیتە 3 × 2 (بخوینە : 2 لێکدان 3) پلەیا ڕێزکرییێ سەری دبیتە : 2 × 2. هەر دانەیەکی ژ دانەیێن ڕێزکریێ **ناڤونیشانەك Adress** هەیە، کو جهێ وی د ڕێزکرییدا دیار دکەت ناڤونیشانێ دانەی پێکدئێت ژ ژمارەیا ڕیزا لێ و د دویڤدا ژمارەیا ستوونا وی. بۆ نموونە، دانە 10 د ڕێزکریێ سەریدا دبیتە دانەیێ د ڕیزا 1 یێ و ستوونا 2 یدا. و هێمایێ وی دێ بیتە m_{12} .

نموونـــــە 1 بکارئینانا ڕێزکرییان بۆ بەرچاڤکرنا پێداویان

پێداویێن فرۆتنێن مەها نیسانێ بکاربینە.

أ ڕێزکرییەکێ بۆ بەرچاڤکرنا پێداویان بکاربینە.

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 15 & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{میزە بۆ باغچەی} \\ \text{مەقلێ بۆ بژارتنێ} \end{matrix}$$

بچووك مەزن

ڕیزکریێ فرۆتنان

ب پلەیا (خانەیا) ڕێزکریێ S چەندە؟

ڕیزکریێ S دوو ڕیز و دوو ستوون هەنە. خانەیا وێ دبیتە ٢ × ٢.

ج دانـــە s_{12} کیژ وانە؟

دانـــە s_{12} دکەفتە سەر ئێکودوو بڕینا ڕیزا ئێکێ و ستونا دووێ، ئەو 9 ە. ئەڤ دانە دیار دکەت کو دوکانێ ل مەها نیسانێ 9 میزەیێن باغچەی فرۆتینە.

د **ناڤونیشانێ دانەیێ 15 چیە؟**

دانە 15 دکەڤتە سەر ئێکودوو بڕینا ڕێزا دووێ ل گەل ستوونا ئێکێ. ئەو دانە m_{21}

1. ڕێزکریێ بەرامبەر بکارینە دا بەرسڤا پرسیاران بدەی.

$$M=\begin{bmatrix}2 & 1 & 5 & 0\\ 1 & 5 & 0 & 9\\ 12 & 11 & 4 & 12\end{bmatrix}$$

أ پلەیا (خانەیا) ڕیزکریێ M چەندە؟

ب دانەیێ m_{32} کیژ وانە؟

ج سفر د دوو جهاندا دیار دبیت. ناڤونیشانێ هەر ئێك ژ وان چییە؟

دوو ڕێزکری دێ یەکسانبن هەکەر هەمان پلە هەبن، و دانەیێن بەرامبەر ئێك د هەردوو ڕێزکریاندا یەکسانبن (ئانکو دانەیێن هەردوو ڕێزکرییان هەمان ناڤونیشان هەین).

نموونـــــە 2 یەکسانبوونا ڕێزکرییان

بهایێ هەر ئێك ژ x و y دیاربکە کو هەردوو ڕێزکری یەکسان بن.

$$\begin{bmatrix}2x+4 & 5 & 1\\ -2 & -3y+5 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & 5 & 1\\ -2 & 5y-3 & -4\end{bmatrix}$$

ژ بەرکو هەردوو ڕێزکری د یەکسانن، دێ $2x+4=12$ و $-3y+5=5y-3$

$2x=8$ و $-8y=-8$

$x=4$ و $y=1$

2. بهایێ هەر ئێك ژ x و y دیار بکە کو هەردوو ڕێزکری یەکسانبن.

$$\begin{bmatrix}-3 & -2x & -3\\ -2 & 3y & -12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -15 & -3\\ -2 & -2y+15 & -12\end{bmatrix}$$

فێربە و خۆبەرێکە

کۆمکرن و لێدەرکرنا ڕێزکرییان

ب نڤیسین	ب ژمارە	ب جەبری
بۆ کۆمکرن یان لێدەرکرنا دوو ڕێزکرییان دانەیێن بەرامبەر ئێکودوو کۆمبکە یان لێدەربکە.	$\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 12\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12}\end{bmatrix}$

بۆ کۆمکرن یان لێدەرکرنا دوو ڕێزکرییان، دڤێت هەردوو ڕێزکری ژ هەمان پلە بن.

ئەم دشێین کومبکەین، چونکی هەردوو ڕێزکرییان هەمان پلە هەنە

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 6 & 7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1\\ 7 & 6\end{bmatrix}\qquad \begin{bmatrix}5\\ 6\\ 7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\ 8\\ 1\end{bmatrix}$$

ئەم نەشێین کۆمبکەین، چونکی پلەیێن هەردوو ڕێزکرییان جودانە

$$\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5\\ 10\end{bmatrix}\qquad \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_{14} & b_{12} & b_{13}\end{bmatrix}$$

نموونـــــه 3 کۆمکرن و لێدەرکرنا ڕێزکرییان

ڕێزکرییێن دئێن بکاربینە دا بەرسڤا پرسیاران بدەی.

$$A=\begin{bmatrix}4&-2\\-3&10\\2&6\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}4&-1&-5\\3&2&8\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}3&2\\0&-9\\-5&14\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}0&1&-3\\3&0&10\end{bmatrix}$$

کۆمبکە یان لێدەربکە، هەکەر دشیاندا بیت.

أ $A+C$

هەر دانەیەکی د ڕێزکریێ ئێکێدا ل گەل دانەیێ بەرامبەر وی د ڕێزکریێ دوویدا کۆمبکە

$$A+C=\begin{bmatrix}4&-2\\-3&10\\2&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&2\\0&-9\\-5&14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+3&-2+2\\-3+0&10+(-9)\\2+(-5)&6+14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&0\\-3&1\\-3&20\end{bmatrix}$$

ب $C-A$

$$C-A=\begin{bmatrix}3&2\\0&-9\\-5&14\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&-2\\-3&10\\2&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-4&2-(-2)\\0-(-3)&(-9)-10\\-5-2&14-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&4\\3&-19\\-7&8\end{bmatrix}$$

ج $C+B$

چونکی پلەیا ڕێزکریێ C (3×2) جودایە ژ پلەیا ڕێزکریێ B (2×3)، لەوما کردارا کۆمکرنێ د شیاندا نینە.

3. کۆمبکە یان لێدەربکە هەکەر د شیاندا بیت.

خالا چاڤدێریێ

أ $B+D$ ب $B-A$ ج $D-B$

تو دزانی کو لێکدان کۆمکرنا دووبارەکریە، و ئەڤە بۆ لێکدانا ڕێزکریێ ل ژمارەیەکێ یا دروستە هەکەر $M=\begin{bmatrix}2&0\\1&5\end{bmatrix}$ تو دشێی $M+M$ ب شێوەیێ $2M$ بنڤیسی.

تو دشێی ڕێزکریەکێ ل ژمارەیەکێ بدەی. ئەو ژی ب لێکدانا هەر دانەیەکێ ڕێزکریێ ل وێ ژمارێ

$$2\begin{bmatrix}2&0\\1&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\times2&2\times0\\2\times1&2\times5\end{bmatrix}$$

نموونـــــه 4 بجهینانەك ل سەر بازرگانیێ

زڤڕین بۆ دوکانا کەلوپەلێن ناڤمالێ، ڕێزکریێ $M-S+D$ هەژمار بکە، دەمێ M ڕێزکریێ کەلوپەلێن ناڤ دوکانێ بیت و S ڕێزکریێ فرۆتنان بیت و D ڕێزکریێ کڕینان بیت، ڕێزکریێ ئەنجامی، چ دنوێنیت؟

$$M-S+D=\begin{bmatrix}8&10\\15&12\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}7&9\\15&12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}15&20\\18&24\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}8-7+15&10-9+20\\15-15+18&12-12+24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16&21\\18&24\end{bmatrix}$$

گەورە بچووك

$$=\begin{matrix}\text{مێزەیێن باغچەی}\\\text{مەقلێین براژتنێ}\end{matrix}\begin{bmatrix}16&21\\18&24\end{bmatrix}$$

ڕێزکریێ ئەنجامێ کەلوپەلێن دوکانێ ل دوماهیا مەها نیسانێ دنوێنیت. ل دوماهیا مەها نیسانێ 16 مێزەیێن بچووك و 21 یێن مەزن ل دوکانێ هەبوون، و هەروەسا 18 مەقلیێن بچووك و 24 یێن مەزن هەبوون.

4. ڕێزکرێ $A+2B-3C$ بهەژمێرە دەمێ :

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$ و $$B=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ -2 & 5\end{bmatrix}$$ و $$C=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

نموونـــــه 5 نڤیسینا بڕێن ڕێزکریێ ب سادەترین شێوە

ڕێزکرییێن دهێن بکاربینە بۆ بەرسڤدانا پرسیاران

$$A=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 10\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}4 & -1 & -5\\ 3 & 2 & 8\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -9\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}-6 & 3 & 8\end{bmatrix}$$

ب سادەترین شێوە بنڤیسە.

أ $2A-3B$ هەکەر دشیاندا بیت.

$$2A-3B=2\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 10\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}4 & -1 & -5\\ 3 & 2 & 8\end{bmatrix}$$

چونکی لێکدانا ڕێزکرییەکێ ل ژمارەیەکێ، پلەیا وێ(جۆرێ وێ) نا گوهۆریت، لەوما پلەییێن هەردوو ڕێزکریان $2A$ و $3B$ نەد یەکسانن و ژبەر وێ چەندێ نائێنە لێکدەرکرن.

ب $C-2A$

$$C-2A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -9\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}(-2)\times 4 & (-2)\times(-2)\\ (-2)\times(-3) & (-2)\times 10\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-8 & 4\\ 6 & -20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 6\\ 6 & -29\end{bmatrix}$$

ڕونـاهی

هەردوو کڤانێن ڕێزکریێ دبنە هێما بۆ خرڤەکرنێ. بۆ هەژمارکرنا بڕێ: C-2A ، دەستبکە ب بەلاڤکرنا2 – ل سەر هەموو دانەییێن ڕێزکریێ A بەری دەست ب کۆمکرنێ بکەی هەر وەکو بڕێن ژمارەیی.

5. ب سادەترین شێوە بنڤیسە هەکەر د شیاندا بیت.

أ $2B+3C$ **ب** $4A-3C$ **ج** $D+0.5D$

فێربە و شرۆڤە بکە

سیفەتێن کۆمکرنا ڕێزکرییان

ب نڤیسین	ب ژمارە	ب جەبری
سیفەتێ ئالۆگورکرنێ کۆمکرنا ڕێزکرییان کردارەکا ئالۆگۆرە	$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 7\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 7\\ 3 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}$	$A+B=B+A$
سیفەتێ پێکڤەبەستنێ کۆمکرنا ڕێزکرییان کردارەکا پێکڤەبەستنێیە	$\begin{bmatrix}5\\ 4\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}\right)=\left(\begin{bmatrix}5\\ 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}$	$A+B+C$ $=(A+B)+C$ $A+(B+C)$
ڕێزکریێ بێ لایەن د کۆمکرنێدا کۆمەلا سفرێ دبیتە دانەیێ بێ لایەن د کۆمکرنا ڕێزکریاندا	$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}$	$A+0=A$
دژێ ڕێزکریێ دژێ ڕێزکریێ M دبیتە ڕێزکریێ پێکهاتی ژ ئەنجامێ گوهۆڕینا هەر دانەیەکێ ڕێزکریێ M ب دژێ وی.	$\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 9 & -6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & -5\\ -9 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$	هەکەر B دژێ A بیت دێ $A+B=0$ کو 0 دبیتە ڕێزکریێ سفری.

ڕونـاهی

ڕێزکریێ سفرێ ئەو ڕێزکرییە ئەوێ هەموو دانەییێن وێ سفر.

هزربکە و گەنگەشێ بکە

1. هەموو خانەیێن د شیاندا بۆ ڕێزکریەکێ ژمارەیا دانەیێن وێ 8 بینەدەر.
2. کردارەکێ ل سەر ڕێزکرییان وەسفبکە، ببتە ئەگەر بۆ بەروقاژیکرنا نیشانا هەر دانەیەکی ژ دانەیێن وێ.
3. ڕێکخەربە خشتەیێ ل خوارێ دوبارە بنڤیسە و پاشی تەمامبکە. د هەر خانەیەکێدا، نموونەیەکا ژمارەیی و نموونەیەکا ڕێزکریێ بنڤیسە

کردار	ژمارە	ڕیزکری
کۆمکرن		
لێدەرکرن		
لێکدان ل ژمارەیەکێ		

1–3 ڕاهێنان

ڕاهێنانێن ئاراستەکری

1 **زاراڤ** ئەو بهایێ دکەڤنە سەر ئێکدووبڕینا ریزەك و ستوونەکێ د ڕێزکریێدا دبیتە (دانە یان ناڤونیشانێ دانەی).

نموونە 1

2 هشیار و شێرکو و دلسۆز پلێتێن ئاهەنگا دووماهییا سالا خواندنێ فرۆتن. خشتەیێ ل خوارێ، پێدایێن ب فرۆتنێن وانڤە گرێدایی دیاردکەت.

فروتنا پلێتێن ئاهەنگا دووماهییا سالا خواندنێ			
قوتابی	پلێتا کت	دەفتەرێن پلێتان	کۆژمێ گشتی
هشیار	39	15	114 000 دینار
شێرکۆ	108	8	143 000 دینار
دلسۆز	13	25	138 000 دینار

أ ڕێزکریێ A بکاربینە بۆ دیارکرنا پێدایێن خشتەیی.

ب جورێ (خانەیا) ڕێزکریێ A چییە؟

ج دانەیی a_{13} چییە؟ و چ دنوێنیت؟

د ناڤونیشانێ دانەیێ 000 143 چییە؟

نموونە 2

3 بهایێ هەر ئێك ژ x و y دیاربکە کو هەردوو ڕێزکریی یەکسانبن.

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 14-x \\ -13-y & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & x+8 \\ 2y-1 & 0 \end{bmatrix}$$

نموونە 3 ڕێزکرییێن ل خوارێ بکاربینە بۆ شیکارکرنا ڕاهێنانان ژ 4 هەتا 7. کومبکە یان لێدەربکە دەمێ دشیاندا بیت.

$$A=\begin{bmatrix}1.5 & 3.8 & 3\\ -1.2 & 2.4 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0 & 4 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}-1 & 1.1 & 6\\ 4 & 0 & 1\\ 1 & 2.3 & 1\end{bmatrix}$$

4 $A+B$ 5 $B-C$ 6 $B-A$ 7 $B+A$

نموونە 4

8 **مەزاختن** خشتەیێ بەرامبەر بهایێن سێ جۆرێن جلکێن وەرزشێ دیار دکەت بەری داناننا باجێ ل سەر وان. ئەڤان بهایان د ڕێزکرییێ M بنوێنە، پاشی ڕێزکرییێ T ئەو بهایێ باجا هەر جۆرەکی دنوێنیت بینەدەر، بۆ زانین ڕێژەیا سەدی یا باجێ دبیتە 8.25%. ڕێزکرییێ A بنڤیسە ئەوێ بهایێن هەرسێ جۆران پشتی زێدەکرنا باجێ دنوێنیت.

بهایێن جلکان ب دینار			
	سادە	ب دروشم	نایاب
قەسپێ پەمبووی	9 000	13 000	14 000
شۆرتێ کورت	6 000	9 500	11 000
شۆرتێ درێژ	15 000	21 000	23 000

نموونە 5 ڕێزکرییێن ل خوارێ بکاربینە بۆ شیکارکرنا ڕاهێنانان ژ 9 هەتا 12.
ئەنجامی ب سادەترین شێوە بنڤیسە، هەکەر دشیاندا بیت.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ -1 & 2 & 0\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}0 & 4 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 6\\ 4 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

9 $3B$ 10 $\frac{1}{2}C$ 11 $A-2B$ 12 $2C-A$

ڕاهێنان و شیکارکرنا پرسیاران

ڕاهێنانێن نازاد

بۆ شیکارکرنا بەرێ خۆ بدە	
پرسیاران	نموونە
13	1
14	2
18–15	3
19	4
23–20	5

13 پێدایێن خشتەی بکاربینە بۆ بەرسڤدانا پرسیاران.

هەلبژارتنێن گەشتی			
نمرە	پلێت	ئۆتێل	ئرۆمبێل
ئێك	425 500	396 000	65 990
کار	385 980	245 500	45 900
ئابووری	275 120	103 250	29 500

أ ڕێزکرییێ A بکاربینە بۆ دیارکرنا پێدایێن خشتەی.
ب خانەیا جۆرێ ڕێزکرییێ A چییە؟
ج دانەیێ a_{32} چییە؟ چ دنوێنیت؟
د ناڤونیشانێ دانەیێ 385 980 چییە؟

14 بەهای x و y دیاربکە دا هەردوو ڕێزکریی یەکسان بن
$[3-2y \quad 14-x]$ و $[2x \quad y+1 \quad -2y]$

ئەڤان ڕێزکرییان بکاربینە بۆ شیکارکرنا ڕاهێنانان ژ 15 هەتا 18. کۆمبکە یان لێدەبکە هەکەر د شیاندا بیت.

$$D=\begin{bmatrix}5.1 & 2.5\\ -2 & 0\\ 0 & 1.5\end{bmatrix}\quad E=\begin{bmatrix}3.2 & -1\\ -1.5 & 2.4\end{bmatrix}\quad F=\begin{bmatrix}-4.2 & -1\\ 2.2 & 0\end{bmatrix}$$

15 $F-E$ 16 $D+E$ 17 $D+F$ 18 $E+F$

19 **خواندنا زانکۆیێ** خشتەیێ ل خوارێ لێچوویێ سالانە یێ خواندنێ ل زانکۆیان دیار دکەت.

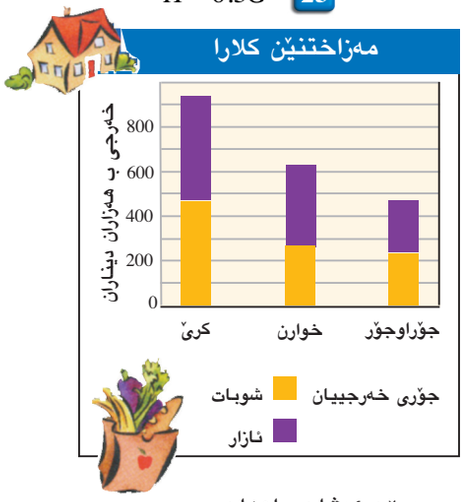
بهایێ خەملاندی بۆ لێچوویێ سالانە بۆ خواندنا زانکۆیێ			
	زانکۆیا تایبەت	زانکۆیا نەتەوەی یافەرمی	زانکۆیا فەرمی یا بیانی
لێچوو ب دینار	27 677 000	12 841 000	19 188 000

شارەزا د خەملینن کو ئەڤ لێچوویە ل سالا بێت دێ 5% زێدەبیت، لێکدانا ڕێزکرییەکێ ل ژمارەیەکێ بکاربینە دا بهایێ خەملاندی بینیەدەر بۆ خواندنا هەر جۆرەکی ژ هەرسێ جۆران.

ڕێزکریێن ل خوارێ بکاربینە بۆ شیکارکرنا ڕاهێنانان ژ 19 هەتا 22. ئەنجامی ب سادەترین شێوە بنڤیسە هەکەر د شیاندا بیت.

$$G=\begin{bmatrix}5 & 2\\ -2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad H=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\\ 0 & 2\end{bmatrix},\quad J=\begin{bmatrix}4\\ 1\\ -2\end{bmatrix},\quad K=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & -1\\ 5 & 0\end{bmatrix}$$

20 $2G$ **21** $\frac{1}{2}(H+J)$ **22** $2K-G$ **23** $H-0.3G$



24 **خەملاندن:** وێنەیێ ڕۆنکرنێ یێ بەرامبەر، ئەوان ئەنجامێن ب دەست کلارا کەفتین دیاردکەت پشتی بکارئینانا کومپیوتەری بۆ تۆمارکرنا مەزاختنێن مەهێن شوبات و ئاداری. ڕێزکریێ $F(3\times1)$ بکاربینە بۆ نواندنا مەزاختنێن وێ د مەها شوباتێدا و ڕێزکریێ M بۆ نواندنا مەزاختنێن مەها ئاداریێ. هەردوو ڕێزکرییان کۆمبکە بۆ بدەستڤەئینانا مەزاختنێن هەردوو مەهان.

25 **ئەندازە** ڕیزکریێ $\begin{bmatrix}2 & 2.5\\ 3 & 3.5\end{bmatrix}$ نیڤتیرەیێن چار بازنان دنوێنیت.

أ ڕێزکریێ چێوەیێن ئەوان بازنان دنوێنیت بنڤیسە.

ب ئەرێ ئەم دێ شێین ڕێزکرییەکێ بدەست خۆڤە بینین کو ڕووبەرێن ئەڤان بازنان بنوێنیت، ب کۆمکرنا وان ڕێزکرییان و لێکدانا وان ل ژمارەیەکێ؟ ڕۆنبکە.

هزرکرنەکا ڕەخنەگر: بێژە هەکەر ئەڤ دەستەواژە،هەموو جاران یا دروست بیت یان هندەك جاران یان هەموو جاران نە یا دروست بیت.

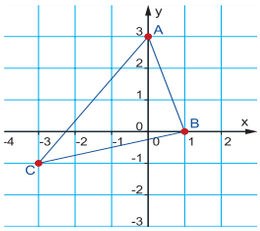
26 د شیاندایە دوو ڕێزکرییان کۆمبکەن هەکەر هەمان ژمارەیا دانەیان هەبن.

27 د شیاندایە دوو ڕێزکرییان کۆمبکەن هەکەر ژمارەیا دانەیێن وان جودابن.

28 د شیاندایە دوو ڕێزکرییان کۆمبکەن هەکەر هەر ئێك ژ وان 3 ڕیز و 4 ستوون هەبن.

29 هەکەر کۆمکرنا دوو ڕێزکرییان دشیاندا بیت، لێدەکرنا وان ژی د شیاندایە

30 **أ** ڕێزکرییەکی بنڤیسە خالێن سەرێن سێگوشەیەکێ بنوێنیت کو پۆیێن خالان ل ڕێزا ئێکێ بن و تانێن وان ل ڕێزا دووێ بن.



ب کردارەکێ ل سەر ڕێزکرییان بکاربینە کو 3 ل سەر هەر پۆیێ خالەکێ زێدەبکەی و 1 ل سەر هەر تانێ خالەکێ زێدەبکەی.

ج ئەوێ سێگوشەیێ وێنەبکە ئەوێ ڕێزکریێ نوی دنوێنیت. چەوا ئەڤێ سێگوشەیێ دێ ب دەستڤەئینی، بکارئینانا سێگوشەیا بنەڕەت؟

31 بهایێ x و y و z دیاربکە کو یەکسانبوونا ڕێزکرییان یا دروست بیت.

$$\begin{bmatrix}3 & x\\ -2 & -8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}11 & -4\\ y & 12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & -10\\ 9 & z\end{bmatrix}$$

32 **شاشی د شیکاکرنیدا** شاشیێ ڕۆنبکە :
$$\begin{bmatrix}2 & 8\\4 & 7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & 3 & 0\\4 & 1 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 11 & 0\\8 & 8 & 9\end{bmatrix}$$

33 **بنڤیسە** ئەرێ لێدەرکرنا ڕێزکریان کردارەکا ئالۆگۆرە؟ بەرسڤێ ب نموونە بدە.

ئامادەکرن بۆ ئەزموونێ

34 $B=\begin{bmatrix}1 & 0.1 & 2\\1.5 & 2.1 & 0\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}2 & 0.4 & 6\\6 & 6.4 & 0\end{bmatrix}$. کیژ بڕێ یەکسانە دگەل ڕێزکریێ $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

أ) $2C-\frac{1}{2}B$ ب) $C-2B$ ج) $B-2C$ د) $2B-\frac{1}{2}C$

35 کیژ دەستەواژە ژ ڤان هەردەم یا دروستە د ڕێزکریێ E ژ جۆرێ $m\times n$ ؟

أ) ژمارەیا دانەیێن وێ دبیتە $m\times n$ ب) دانەیێ e_{nm} هەیە ؟

ج) ژمارەیا دانەیێن وێ $m+n$ د) m ستوون و n ڕیز هەیە

36 بهایێ x چەندە کو $8\begin{bmatrix}12 & 8\\2 & 7\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}48 & 32\\8 & 28\end{bmatrix}$ دروست بکەت؟

أ) 0.25 ب) 0.5 ج) 2 د) 4

37 **بەرسڤەکا کورت:** بهایێ x بینەدەر کو هاوکێشەیا $\begin{bmatrix}-1 & -8\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}5 & -x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -2\end{bmatrix}$ دروست بکەت.

بەرهنگاری و بەرفرەهکرن

38 **هزرکرنەکا ڕەخنەگر:** چ دبێژی دەربارێ ڕێزکریێ دانەیێن وێ ژمارەیێن خۆبەش بن؟ ڕۆنبکە.

39 چ وەدکەت کو هەردوو ڕێزکریێن $A-B$ و $A+(-B)$ یەکسانبن، دەمێ A و B هەمان خانە هەبن؟

40 ل چارگۆشەیێن سحری، وەکی هەردوکێن بەرامبەر، هەر جار هەر ئەو ژمارە ب دەست تە دکەڤیت، دەمێ ژمارەیێن د هەمان ڕێز دا یان د ستوون دا یان لسەر تەوەری کۆم دکەی. ئەرێ سەرجەمێ دوو ڕێزکریێن چارگوشەیێ سیحری دبیتە چوارگۆشەیەکا سیحری؟

4	18	8
14	10	6
12	2	16

8	3	4
1	5	9
6	7	2

41 ڕێزکریێ B بینەدەر دا یەکسانی دروست ببیت. $3\begin{bmatrix}2 & -1\\0 & -4\end{bmatrix}-2B=\begin{bmatrix}1 & 5\\-2 & 2\end{bmatrix}$

پێداچوونا لوولپێچی

بڕەکی بۆ نواندنا هەر حالەتەکی بنڤیسە. (پۆلێن پێشتر)

42 چێوەیێ سێگۆشەیەکێ دڕێژیا لایێن وێ سێ ژمارەیێن چووت ئێك ل دویڤ ئێك بن.

43 ژمارەیا پلێتێن فرۆتینە 20 کەسان. بۆ زانین هەر ئێك ژ وان n پلێت کرین.

44 **پارە** شیلانێ 36 پارچەیێن پارەی ژ جۆرێ 1 000 دیناری و 500 دیناری هەنە. بهایی وی پارەی چەندە هەکەر بزانی کو ژمارەیا پارچەیێن ژ جۆرێ 500 دیناری دوو جارانێ ژمارەیا پارچەیێن ژ جۆرێ 1 000 دینارینە؟ (پۆلێن پێشتر)

دیاربکە هەکەر خالا دایی ببیتە شیکار بۆ سیستەمێ هەردوو هاوکێشەیان. (پۆلێن پێشتر)

45 $\begin{cases}x-y=4\\5x+6y=2\end{cases}$ ؛ $(2,-2)$

46 $\begin{cases}y=2\\2x-4y=1\end{cases}$ ؛ $(4.5,\ 2)$

2-3 لێکدانا ڕێزکرییان

Multiplying Matrices

ئارمانج

• سیفەتێن ڕێزکرییان د لێکدانێدا دێ نیاسن ب لێکدانا ڕێزکریەکێ ل ئێکی دی.

کێ ئەڤێ بکاردئینیت؟

خودانێ کۆمپانییەکێ ڕێزکرییان بکاردئینیت دا بهایێن داهات و لێچوو و قازانجان بینتەدەر. (نموونە 3)

زاراڤ
Vocabulary

ئەنجامێ لێکدانا دوو ڕێزکرییان
Matrix product
ڕیزکریێ چارگۆشەیی
Square matrix
تیرێ سەرەکی
Main diagonal
ڕیزکریێ یەکێ
Unit matrix

ل وانەیا بۆری تو فێری لێکدانا ژمارەیەکێ دگەل ڕێزکرییەکێ بووین. هەروەسا تو دشێی ڕێزکرییەکێ ل ڕێزکریەکی دی بدەی. ژ ئەنجامێ وێ لێکدانێ، ڕێزکریەکی دی دەردکەڤیت دبێژنێ **ئەنجامێ لێکدانا هەردوو ڕیزکرییان** **Matrix product** . ئەڤ هەردوو ڕێسایە بکاردئێن بۆ لێکدانا دوو ڕێزکرییان.

• ئەم دشێین ڕێزکریی A ل ڕێزکریێ B بدەین، ئانکو ($A \times B$ یان AB) بهەژمێرین هەکەر ستوونێن A یەکسانبن بۆ ژمارەیا ڕێزێن B .

• ئەنجامێ لێکدانا ڕێزکریەکی ژ خانەیا $m \times n$ ل ڕێزکریەکی ژ خانەیا $n \times p$ ، ڕێزکریەکی ژ خانەیا $m \times p$ دیاردبیت.

$$A=\begin{bmatrix}3 & 5 & 7\\ 4 & 1 & 2\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 3 & 8\\ 9 & 5 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 6 & 7\end{bmatrix}$$

A B AB

$2\times\underline{3}\quad\underline{3}\times 4 \rightarrow 2\times 4$

ژمارەیا ڕێزان = ژمارەیا ستوونان

$$C=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 4 & 1\\ 5 & 8\end{bmatrix} \quad D=\begin{bmatrix}2 & 3 & 3 & 8 & 4\\ 9 & 5 & 2 & 0 & 6\\ 0 & 1 & 6 & 7 & 2\end{bmatrix}$$

C D CD

نە پێناسەکریە $3\times\underline{2}\quad\underline{3}\times 5$

ژمارەیا ڕێزان ≠ ژمارەیا ستوونان $(2 \neq 3)$

گەلەك جاران ئەڤ نڤیسینە $A_{m\times n}$ بکاردئێت دا دیار بکەن کو ڕێزکری ژ خانەیا mn .

ڕۆناهییەك

ل بیرا تە بیت دا کو ئەنجامێ لێکدانا دوو ڕێزکرییان یا پێناسەکری بیت، دڤێت ژمارەیا ستوونێن ڕێزکریێ لایێ چەپێ یەکسانبیت بۆ ژمارەیا ڕێزێن ڕێزکریێ لایێ راستێ.

نموونـــــە 1 جوداکرنا شیانێن لێکدانا دوو ڕێزکرییان

دیاربکە هەکەر لێکدانا هەردوو ڕێزکرییان یا دشیاندا بیت یان نە. هەکەر یا دشیاندابیت، خانەیا ئەنجامی بێژە

أ $A_{2\times5}\ B_{5\times3}$

$AB \quad B \quad A$

$2\times3 = 5\times3 \quad 2\times5$

ژبەر کو ژمارەیا ستوونێن ڕێزکریێ A یەکسانە بۆ ژمارەیا ڕێزێن ڕێزکریێ B ئەنجامێ لێکدانێ یا پێناسەکریە و ئەو ڕێزکرییە ژ خانەیا 2×3 یە .

ب $C_{4\times3}\ D_{4\times5}$

$C \quad D \quad CD$

$4\times3 \quad 4\times5$ نە یا دشیاندایە

ژبەر کو ژمارەیا ستوونێن ڕێزکریێ C یەکسانە بۆ ژمارەیا ڕێزێن ڕێزکریێ D. ئەنجامێ لێکدانێ نە پێناسەکریە.

خالا چاڤدێریێ

1. ڕیزکرییێن نموونەیێ بکاربینە دا بەرسڤا پرسیاران بدەی. بێژە هەکەر ئەنجامێ لێکدانا ڕێزکرییان یا پێناسە کربیت یان نە. هەکەر پێناسەکربیت، خانەیێ بێژە.

أ BA ب DC ج DB

کا چەوا تە ب چاڤ سەحکرە ستوونێن ڕێزکریێ A و ڕێزێن ڕێزکریێ B، دا بزانی کا ئەنجامێ لێکدانێ AB پێناسەکریە یان نە . هەر وێ ڕێ دێ بکارئینی دا ژمارەیا دانەیێن ڕێزکریێ ئەنجامێ لێکدانێ بزانی.

فێربە و ژیربەرێکە

لێکدانا ڕیزکرییان

ب نڤیسین	ب ژمارە	ب جەبرێ
بۆ هەژمارتنا دانەیێ p_{kj} د ڕێزکرێ $P=AB$ دا، هەر دانەیەکێ د ڕێزا k ل ڕێزکرێ A ل دانەیێ بەرامبەر وی بدە، ل ستوونا j د ڕێزکرێ B دا، پاشی ئەنجامێن وان لێکدانان کومبکە.	$P=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}=$ $\begin{bmatrix}1\times5+2\times7&1\times6+2\times8\\3\times5+4\times7&3\times6+4\times8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}c_1&c_2\\d_1&d_2\end{bmatrix}=$ $\begin{bmatrix}a_1c_1+a_2d_1&a_1c_2+a_2d_2\\b_1c_1+b_2d_1&b_1c_2+b_2d_2\end{bmatrix}$

نموونـــــە 2 لێکدانا ڕیزکرییان

ئەڤان ڕێزکرییان بکاربینە $A=\begin{bmatrix}0&4&9\\-3&3&2\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}5&1\\-2&7\\6&0\end{bmatrix}$ $D=\begin{bmatrix}11&-1\\12&10\end{bmatrix}$

ئەنجامێ لێکدانا وان بهەژمێرە هەکەر دشیاندابیت .

أ AB

خانەیێن (جۆرێن) وان بپشکنە دا بڕیارێ بدی کا ئەنجامێ لێکدانێ پێناسەکریە یان نە. جۆرێ ڕێزکرێ A دبیتە 3×2 ، و جۆرێ ڕێزکرێ B دبیتە 2×3 . ئەنجام AB پێناسەکریە، و دێ بیتە ڕێزکریەك ژ جۆرێ 2×2 .

ڕیزا ئێکێ ژ ڕێزکرێ A ل ستوونا ئێکێ ل ڕێزکرێ B بدە، هەروەکو ل خوارێ دیار، و ئەنجامی ل جهێ دانەیێ C_{11} بنڤیسە د ڕێزکرێ ئەنجامێ لێکدانێدا C .

$$C=AB=\begin{bmatrix}0&4&9\\-3&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&1\\-2&7\\6&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}46&?\\?&?\end{bmatrix}\quad 0(5)+4(-2)+9(6)$$

نوکە، ڕیزا ئێکێ ژ ڕێزکرێ A ل ستوونا دووێ ل ڕێزکرێ B بدە، هەروەکو ل خوارێ دیار، و ئەنجامی ل جهێ دانەیێ C_{12} بنڤیسە د ڕێزکرێ ئەنجامێ لێکدانێدا C.

$$C=AB=\begin{bmatrix}0&4&9\\-3&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&1\\-2&7\\6&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}46&28\\?&?\end{bmatrix}\quad 0(1)+4(7)+9(0)$$

ڕیزا دووێ ژ ڕێزکرێ A ل ستوونا ئێکێ ل ڕێزکرێ B بدە، هەروەکو ل خوارێ دیار، و ئەنجامی ل جهێ دانەیێ C_{21} بنڤیسە د ڕێزکرێ ئەنجامێ لێکدانێدا C.

$$C=AB=\begin{bmatrix}0&4&9\\-3&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&1\\-2&7\\6&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}46&28\\-9&?\end{bmatrix}\quad (-3)(5)+3(-2)+2(6)$$

ڕیزا دووێ ژ ڕێزکرێ A ل ستوونا دووێ ل ڕێزکرێ B بدە ، هەروەکو ل خوارێ دیار، و ئەنجامی ل جهێ دانەیێ C_{22} بنڤیسە د ڕێزکرێ ئەنجامێ لێکدانێدا C.

$$C=AB=\begin{bmatrix}0&4&9\\-3&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&1\\-2&7\\6&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}46&28\\-9&18\end{bmatrix}\quad (-3)(1)+3(7)+2(0)$$

ڤێجا $C=AB=\begin{bmatrix}46&28\\-9&18\end{bmatrix}$

ب BA

جۆرێن وان بپشکنە دا بڕیارێ بدەی کا ئەنجامێ لێکدانێ پێناسەکریە یان نە. جۆرێ ڕێزکریێ B دبیتە 2×3 و جۆرێ ڕێزکریێ A دبیتە 3×2 ئەنجام BA پێناسەکریە، و دێ بیتە ڕێزکریەك ژ جۆرێ 3×3.

$$BA=\begin{bmatrix}5(0)+1(-3) & 5(4)+1(3) & 5(9)+1(2)\\ -2(0)+7(-3) & -2(4)+7(3) & -2(9)+7(2)\\ 6(0)+0(-3) & 6(4)+0(3) & 6(9)+0(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 23 & 47\\ -21 & 13 & -4\\ 0 & 24 & 54\end{bmatrix}$$

ج AD

خانەیان (جۆران) بپشکنە دا بڕیارێ بدەی کا ئەنجامێ لێکدانێ پێناسەکریە یان نە. خانەیا ڕێزکریێ Aدبیتە 2×2، و خانەیا ڕێزکریێ D دبیتە 2×3 . ئەنجام AD نە پێناسەکریە.

هشیاریە!

تێبینی بکە کو هندەك جاران هەردوو ئەنجامێن لێکدانێ AB و BA ژێکجودانە لێکدانا ڕێزکرییان نە یا ئالوگۆرە.

خالا چاقدێریێ

2. ئەنجامێ لێکدانێ هەژمار بکە هەکەر دشیاندا بیت.

أ BD ب DA

ڕێزکری د کارگێریا کاریدا دهێتە بکارئینان بۆ هەژمارکرنا داهات و لێچۆ و قازانجان.

نموونـــــە 3 بجهئینانەك ل سەر دەرئێخستنێ (جەردکرن)

کۆمپانیا ئەلند یا کەلوپەلێن وەرزشێ دوو جۆرێن جلوبەرگێن غاردانێ دفرۆشیت، خشتەیێ ئێکێ، تشتێن د ناڤ کۆگەها ئێکێدا دیاردکەت ژ هەر جۆرەکێ جلکان، و خشتەیێ دووێ بهایێن فرۆتن و لێچۆ و قازانجێ هەر کتەکا ژ هەر جۆرەکی دیار دکەت، لێچۆیی گشتی یێ هەردوو جۆرێن جلکان دهەر کۆگەهەکێدا بینەدەر.

کەلوپەلێن هەردوو کۆگەهان		
	پەسەند	نایاب
کۆگەها 1	14	10
کۆگەها 2	7	8

داهات ولێچۆ و قارانج ب دینار			
	بها	لێچۆ	قازانج
پەسەند	89	44	45
نایاب	119	58	61

لێکدانا ڕێزکرییان بکاربینە بۆ دەرئینانا داهات و لێچۆ و قازانجێن هەردوو کۆگەهان.

$$\begin{bmatrix}14 & 10\\ 7 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}89 & 44 & 45\\ 119 & 58 & 61\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14(89)+10(119) & 14(44)+10(58) & 14(45)+10(61)\\ 7(89)+8(119) & 7(44)+8(58) & 7(45)+8(61)\end{bmatrix}$$

قازانج لێچۆ داهات

$$=\begin{bmatrix}2436 & 1196 & 1240\\ 1575 & 772 & 803\end{bmatrix}\begin{matrix}\text{گۆگەها } 1\\ \text{کوگەها } 2\end{matrix}$$

لێچۆیێ جلکان د کۆگەها 1 یدا دبیتە 1196 هزار دینار و د کۆگەها 2 یدا دبیتە 772 هزار دینار

خالا چاقدێریێ

3. کەلوپەلێن د کۆگەها 2 یدا بگوهۆرە دا ببنە 6 ژ جۆرێ پەسەند و 9 ژ جۆرێ نایاب. ڕێزکریێ ئەنجامێ لێکدانێ دوبارە هەژمار بکە و قازانجێن کۆگەها 2 دیاربکە.

ڕیزکریێ چـارگۆشـەیی Square matrix ڕێزکرییەکە هـەمـان ژمارەیا ستوون و ڕێزان هـەیە. ئەو دبیتە ڕێزکرییەك ژ جۆرێ $m \times m$. **تیرەیێ سەرەکی Main diagonal** د ڕێزکرییەکی چارگۆشەییدا دبیتە ئەو تیرێ گۆشەیا سەری یا لایێ چەپێ دگەهیتە گۆشەیا خوارێ یا لایێ راستێ.

ڕیزکریێ یەکێ Unit matrix دبیتە ڕێزکرییەکی چارگۆشەیی و هـەموو دانەیێن وێ سفرن، ژبلی ئەو دانەیێن دکەڤنە سەر تیرێ سەرەکی کو ئەو هـەموو یەکسانن (I) . ئێك ڕێزکریێ یەکێ هـەیە ژ جۆرێ $n \times n$ ژ جۆرێن ڕێزکرییێن چارگۆشەیی.

ڕێزکریێ یەکێ ژ جۆری 2×2 دبیـتـە $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و ژ خانەیا (جۆری) 3×3 دبیـتـە $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ل لێکدانا وێزکرییان، ڕێزکریێ یەکێ ژ جۆرەکێ دەستنیشانکری ڕۆلێ ژمارە 1 دگێرت د لێکدانا ژمارەیاندا. هـەکەر A ڕێزکرییەکێ چارگۆشەیی بیت ژ جۆرێ $m \times m$ ، دێ: $AI_m = I_m A = A$

هـەکەر $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ ، دێ :

$$AI_2 = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\times1+7\times0 & 5\times0+7\times1 \\ -1\times1+4\times0 & -1\times0+4\times1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = A$$

$$I_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times5+0\times(-1) & 1\times7+0\times4 \\ 0\times5+1\times(-1) & 0\times7+1\times4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = A \quad \text{و}$$

و چونکی د شیاندایە ڕێزکرییەکی چارگۆشەیی لێکدانێ وێ ب خۆ بکەن، لەوا ئەم دشێین قێ کردارێ دووبارە بکەین و هێزا قێ ڕێزکریێ ب دەستڤەبینین.

نموونـــــه 4 هێزێن ڕێزکرییێن چارگۆشەیی

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

بهەژمێرە هـەکەر دشیاندا بیت:

أ A^2

$$A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7\times7+3(-2) & 7\times3+3\times0 \\ -2\times7+0\times(-2) & -2\times3+0\times0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 & 21 \\ -14 & -6 \end{bmatrix}$$

ب B^2

$$B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\times2+4\times5+1\times1 & 2\times4+4\times0+1(-1) & 2\times1+4(-2)+1\times3 \\ 5\times2+0\times5+(-2)\times1 & 5\times4+0\times0+(-2)(-1) & 5\times1+0(-2)+(-2)\times3 \\ 1\times2+(-1)\times5+3\times1 & 1\times4+(-1)\times0+3(-1) & 1\times1+(-1)(-2)+3\times3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 25 & 7 & -3 \\ 8 & 22 & -1 \\ 0 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

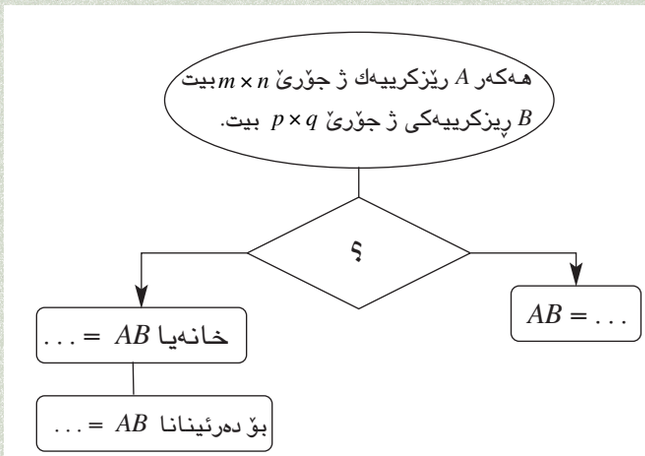
خالا چاڤدێریێ

4. ڕێزکرێ هەژماربکە هەکەر دشیاندا بێت.

أ C^2 ب A^3 ج B^3 د I^4

هزربکە و گەنگەشێ بکە

1. وەسفبکە کا دێ چ روودەت، دەمێ تو بزاڤێ دکەی دانەیێ ئێکێ د ئەنجامێ لێکدانێدا AB دا بینیەدەر، ئەگەر جۆرێ هەردوو ڕێزکرییان 3×2 بێت؟
2. ئەرێ لێکدانا ڕێزکرییان کرداڕەکا ئالوگۆرە؟ بەرسڤێ ب نموونە بدە.
3. A ڕیزکرییەکی ژ جۆرێ 2×4 یە : ئەرێ دێ شێی A^2 بهەژمێری؟ ڕۆنبکە؟
4. ڕیکخەربکە هێلکارێ بەرامبەر دروستبکە و تمامبکە پرسیارەکێ دمەعینێدا بنڤیسە کو بەرسڤا وێ هاری تە بکەت، بۆ لایێ چەپێ یان بۆ لایێ راستێ بچی.



پاشی هێلکارێ تمامبکە و کردارا لێکدانا ڕێزکرییان ڕۆنبکە.

2–3 ڕاهێنان

ڕاهێنانێن ئاراستەکری

1 **زاراف:** ڕێزکرییەك ژ جۆرێ 2×2، و هەموو دانەیێن وێ 1 بن، دبێتە ——— (ڕیزکرییەکی چوارگۆشەیی یان ڕێزکرییەکی یەکێ).

نموونە 1 دیاربکە هەکەر ئەنجامێ لێکدانێ دشیاندابیت، و جۆرێ وێ بێژە هەکەر وەسا بیت.

2 $A_{4\times 5}B_{5\times 3}$ 3 $B_{5\times 3}A_{4\times 5}$ 4 $C_{9\times 5}D_{5\times 9}$

5 $D_{5\times 9}C_{9\times 5}$ 6 $E_{6\times 2}F_{2\times 6}$ 7 $F_{2\times 6}E_{6\times 2}$

نموونە 2 ڕێزکرییێن ل خوارێ بکاربینە بۆ شیکارکرنا راهێنانان ژ 8 هەتا 13. ئەنجامێ لێکدانێ بهەژمێرە هەکەر دشیاندا بیت.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 7 & 3\\ -2 & 3 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 1 & -3\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 5 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}3 & -1 & 7 & 10\\ 1 & -1 & 3 & 5\end{bmatrix},\quad I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

8 BA 9 CA 10 CB 11 DC 12 BI 13 IB

نموونە 3

14 **دووبارە دروستکرن:** قوتابیێن ئامادەیا دهۆکێ رادبن ب خرڤەکرنا کەلوپەلێن دوبارە بێنە دروستکرن و بکارئینان دا بفرۆشن و ئاهەنگا دوومەهییا سالا خواندنێ پێ بگێرن. خشتەیێ ئێکێ ئەوان، کەلوپەلێن جودا یێن قوتابییان خرڤەکرین د سێ حەفتیاندا دیاردکەن. و خشتەیێ دووێ ئەوان کۆژمەیێن ل هەر حەفتیەکێ وەرگرتین بەرامبەر هەر کیلۆگرامەکا ژ هەر جۆرەکی دیاردکەت. لێکدانا ڕێزکرییان بکاربینە دا کۆژمێ گشتی بینیەدەر ئەوێ ژ فرۆتنا هەر جۆرەکێ بدەستڤەئینایە.

کەلوپەلێن خڕڤەکرین			
جۆر	حەفتیا 1	حەفتیا 2	حەفتیا 3
شووشە	29	25	16
عەلبك	8	11	6
ڕۆژنامە	163	127	206
کاغەز	53	107	84

بها ب هزاران دینـاران				
حەفتی	شووشە	عەلبك	ڕۆژنامە	کاغەز
1	20	700	20	1060
2	20	550	10	1000
3	10	420	20	1030

نموونە 4 ڕێزکرییێن ل خوارێ بکاربینە بۆ شیکارکرنا ڕاهێنانان ژ **15** هەتا **18**. هەر هێزەکێ ژ وان هەژمار بکە هەکەر دشیاندا بیت.

$$A=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3 & 4 & 2\\ -1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

15 A^2 **16** A^3 **17** C^2 **18** B^2

ڕاهێنان و شیکارکرنا پرسیاران

ڕاهێنانێن ئازاد

بۆ شیکارکرنا پرسیاران	بەرێ خۆ بدە نموونە
1	24–19
2	29–25
3	30
4	40–31

دیاربکە هەکەر ئەنجامێ لێکدانێ دشیاندابیت ، و جۆرێ (خانەیا) بێژە هەکەر وەسا بیت.

19 $A_{2\times1}B_{2\times3}$ **20** $B_{2\times3}A_{2\times1}$ **21** $C_{3\times5}D_{5\times1}$

22 $D_{5\times1}C_{3\times5}$ **23** $E_{7\times7}F_{6\times7}$ **24** $F_{6\times7}E_{7\times7}$

ڕێزکرییان بکاربینە بۆ شیکارکرنا ڕاهێنانان ژ **25** هەتا **29**. ئەنجامێ لێکدانێ هەژماربکە، هەکەر دشیاندا بیت.

$$A=\begin{bmatrix}4\\ -1\\ 2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 7 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}-2 & 3 & -4\\ 1 & -1 & 1\\ 4 & 1 & 3\end{bmatrix},\ I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

25 AB **26** CA **27** CB **28** IC **29** CI

30 **دەرئێخستن (جردکرن):** دوکانەك دوو پیڤانێن جودا ژ سندوقێن سابوونێ دفرۆشیت. خشتەیێ ئێکێ، دانەیێن هەردوو جۆرێن ڤان سندۆقان دیار دکەت د دوکانێدا، و خشتەیێ دووێ داهات و لێچۆ و قازانجێن هەر لقەکێ دیار دکەت، ژ هەر جۆرەکێ ڤان پێڤانان. لێچوونێ گشتی بینەدەر.

کۆمەلا دانەیێن سندۆقان د هەردوو لقاندا		
	پیڤانا ئاسایی	پیڤانا مەزن
لقی 1	11	7
لقی 2	8	6

داهات و لێچۆ و قازانج			
	داهات	لێچۆ	قازانج
پیڤانا ئاسایی	130 000	75 000	55 000
پیڤانا مەزن	190 000	110 000	80 000

ڕێزکرییێن ل خوارێ بکاربینە بۆ شیکارکرنا ڕاهێنانان ژ **31** هەتا **40**. ب سادەترین شێوە بنڤیسە هەکەر دشیاندا بیت.

$$Q=\begin{bmatrix}4 & 13 & -9\end{bmatrix}\quad S=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}\quad T=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\quad A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 3 & 5\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

31 S^2 **32** B^2 **33** T^2 **34** S^3 **35** Q^3

36 AB **37** BA **38** $2BA-C$ **39** $3CB+2B$ **40** $(BA)^2$

41 **بەریکانەیا پایسکلان:** بەریکانەیا پایسکلان ژ سێ قوناغێن زەحمەت پێن جودا پێکدهێت، لەوما ئەنجامێ هەر قۆناغەکێ ل هاوکۆلکەکی ددەن کو زەحمەت و ژییێ یاریکەری ل بەرچاڤ بێتە وەرگرتن. خشتەیێ ئێکێ خالێن هەر چار یاریکەران بدەستڤەئینین د هەر قۆناغەکێدا دیار دکەت، و خشتەیێ دووێ هاوکۆلکێ راستڤەکرنێ بۆ هەر قۆناغەك و هەر یاریکەرەکی دیار دکەت.

خالێن یاریکەران د هەرسێ قۆناغاندا			
یاریکەر	قوناغا 1	قوناغا 2	قوناغا 3
گۆران	23.0	18.5	19.5
هەڵۆ	24.0	28.5	25.0
کاوە	19.0	22.0	21.5
کارزان	27.0	26.5	28.0

هاوکۆلکێن ڕاستڤەکرنێ				
قوناغا	گۆران	هەڵۆ	کاوە	کارزان
1	1.2	1.6	2.0	1.8
2	2.3	2.0	2.8	2.5
3	2.7	2.6	3.2	3.1

أ پێداییان د دوو ڕێزکریاندا ڕێکبێخە. ئەنجامێ لێکدانێ هەژماربکە.

ب ڕێزکریێ ئەنجامێ لێکدانێ بکاربینە بۆ هەژمارتنا خالێن دووماهیێ یێن هەر یاریکەرەکی.

ج ئەگەر چیە کو دانەیێن دەرڤەی تیرێ سەرەکی د ئەنجامێ لێکدانێدا هیچ مانایەك بۆ نەبیت د ڤێ پرسیارێدا؟

هزرکرنەکا ڕەخنەگر: دیار بکە هەکەر دەستەواژەیێن ل خوارێ هەر دەم دروستبن، یان هندەك جاران دروستبن یان هەرجار نە دروست بن بەرسڤا خۆ ڕۆنبکە.

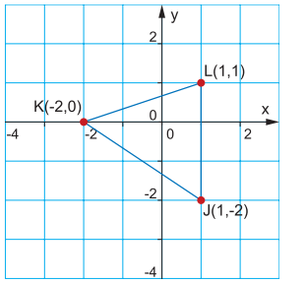
42 هەکەر ڕێزکریێ A ژ جۆرێ 3×2 و ڕێزکریێ B سێ ڕێز هەبن، دێ ڕێزکریێ AB پێناسەکری بیت.

43 هەکەر ڕێزکریێ A ژ جۆری 3×2 بیت، و ڕێزکریێ B سێ ستوون هەبن، دێ ڕێزکریێ AB پێناسەکری بیت.

44 هەکەر ڕێزکریێ AB پێناسەکری بیت، دێ ڕێزکریێ BA ژی پێناسەکری بیت.

45 هەکەر هەردوو ڕێزکریێن AB و BA پێناسەکریبن، دێ هەردوو ڕێزکریێن چارگۆشەیی بن.

46 أ **بنڤیسە:** ڕێزکرییەکێ، خالێن سەرێ سێگۆشەیێ JKL بنوێنیت، کو پۆیێن خالان ل سەر ڕێزا ئێکێ بن، و تانێن خالان ل سەر ڕێزا دووێ بن.



ب ڕیزکریێ $\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ بکاربینە بۆ لێکدانا پۆتانان ل2 ێ.

ج سێگۆشەیا ڕێزکریێ نوی سەرێن وێ دنوێنیت وێنەبکە و وەسفبکە.

47 بهایێ x بینەدەر کو هەردوو ڕێزکری یەکسانبن. $\begin{bmatrix}4 & 3\\ 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & \frac{x}{2}\\ -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}21 & -19\\ 24 & -26\end{bmatrix}$

48 **بنڤیسە:** ئەگەر چیە کو یەکسانبوونا $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ یا دروست بیت؟؟

49 **بەریکانەیەکا ڕستنێ:** بەریکانەیێن رستنێ سێ شێوەیێن زەحمەت یێن جودا ب خۆڤە دگرت، لەوما خالێن هەر شێوەیەکی ل هاوکۆلکەکی ددەت کو زەحمەت و ژییێ یاریکەرێ ل بەرچاڤ بێتە وەرگرتن. خشتەیێ ئێکێ خالێن هەر یاریکەرەکێ دیار دکەت، و خشتەیێ دووێ، هاوکۆلکەیێ ڕاستڤەکرنێ بۆ هەر شێوەیەکی و یاریکەرەکێ دیار دکەت. خالێن دووماهیێ یێن هەر یاریکەرەکێ بینەدەر.

خالێن لێژنەیا سەرپەرشت داناین			
یاریکەر	شێوە 1	شێوە 2	شێوە 3
سۆلین	16.5	18.0	17.5
سازان	12.5	14.0	17.0
دیلان	16.0	19.5	18.0

هاوکۆلکەیێن ڕاستڤەکرنێ			
شێوە	سۆلین	سازان	دیلان
1	2	3	2
2	3	3	1
3	2	2	1

50 **فرۆتن:** خشتەیێ ئێکێ بهایێ فرۆتنێن پێلاڤان دیار دکەت، ئەوێن ژ لایێ ژمارەیەکا کارکەران هاتینە فرۆتن، و خشتەیێ دووێ ڕێژەیا نوی و یا کەڤن یا پارەیێ ددەنە هەر کارکەرەکی بەرامبەر فرۆتنێن وی دیار دکەت.

فرۆتنێن کارکەران (ب دیناران)			
کارکەر	یێن زەلامان	یێن ژنان	یێن زاروکان
شێرزاد	5 200 000	4 200 000	2 300 000
بەختیار	8 100 000	8 400 000	3 100 000
زانا	2 700 000	7 400 000	6 300 000

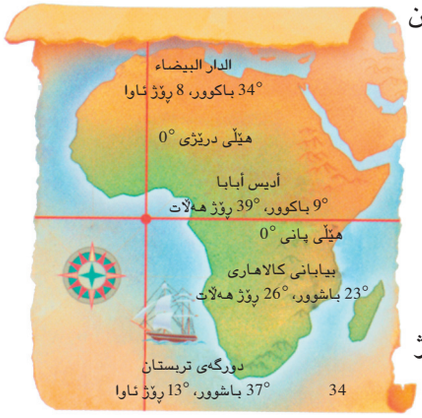
ڕێژەیا پارەی		
	ڕێژەیا کەڤن	ڕێژیا نوی
یێن زەلامان	9%	9.5%
یێن ژنان	9%	10%
یێن زاروکان	13%	12%

أ ئەنجامێ لێکدانا هەردوو ڕێزکرییان بینەدەر. پارەیێ هەر کارکەرەکی چەندە ل گۆڕ هەر ڕێژەیەکێ؟

ب کیژ کارکەر مفادارتر بوو ژ گوهۆڕینا ڕێژەیا پارەی؟

51 **مامك:** د ئێك ژ بەریکانەیێن تەلەفزیۆنێدا، پێدڤییە لسەر پشکداران ئەو جهێ بچنێ بزانن، کو هاتییە دیارکرن ب دوو دانەیێن ڤێ ڕێزکرییێ ئەنجامێ لێکدانێ:.

$$P=\begin{bmatrix}5 & 1\\ -11 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -2\\ 9 & -3\end{bmatrix}$$



دانەیێ P_{21} جهێ هێلا پانییێ دیار دکەت(باکوور هەکەر دانەیێ موجەب بیت، و باشوور هەکەر دانەیێ سالب بیت) هەروەسا دانەیێ P_{12} جهێ هێلادرێژییێ دیار دکەت (ڕۆژهەلات ئەگەر دانەیێ موجەب بیت، و ڕۆژئاڤا هەکەر دانەیێ سالب بیت). کیژ جهـ ل سەر نەخشەیێ بەرامبەر دێ بیتە ئەو جهێ پێدڤی کو بگەهنی؟

52 **تەپا پێی** سەرجەمێ خالێن هەر تیمەکێ ب دەستڤەئینان بینەدەر؟

تیم	لێدانێن کۆرنەر	لێدانێن ئێکسەر	گۆل
یانەیا هەولێرێ	11	9	4
یانەیا پێرس	15	12	6
یانەیا سلێمانی	6	5	9

جۆرێ گۆلێ	خال
لێدانێن کۆرنەر	6
لێدانێن ئێکسەر	1
گۆل	3

53 **هزرکرنەکا ڕەخنەگر:** ڕێزکرێ بەرامبەر بنڤیسە، ب شێوەیێ ئەنجامێ لێکدانا ڕێزکریەکێ هەموو دانەیێن وێ ژمارەیێن تەواوبن دگەل ژمارەیەکا ڕاست.

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{4} & \frac{5}{6}\end{bmatrix}$$

ئامادەکرن بۆ ئەزموونێ

54 B ڕێزکریەکێ ژ جۆرێ 12×5. کیژ مەرج پێدڤییە د ڕێزکرێ C دا هەبیت. دا ئەنجامێ لێکدانا CB یا پێناسەکری بیت؟

أ 5 ستوون هەبن ب 12 ستوون هەبن ج 5 ڕیز هەبن د 12 ڕیز هەبن

55 کیژ ئەنجام ژ ڤان نە یەکسانە بۆ هەرسێ ئەنجامێن دی؟

أ $2\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ ج $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$

56 کیژ ئەڤان برِان یەکسانە بۆ دانەیێ C_{22} د ئەنجامێ لێکدانێدا $C=\begin{bmatrix}7 & -1\\ 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 3 & 8\end{bmatrix}$ ؟

أ) $4(-2)+2\times 3$ ب) $7\times 5+(-1)8$ ج) $4\times 5+2\times 8$ د) $(-1)3+2\times 8$

57 **بەرسڤەکا کورت:** $A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ -4 & 5\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}3 & -6\\ 6 & 8\end{bmatrix}$ دیاربکە هەکەر ڕێزکرییێ $\begin{bmatrix}33 & -18\\ -14 & 64\end{bmatrix}$ یەکسانبیت بۆ AB یان BA یان نە چو ژوان .

بەرهنگاری و بەرفرەهکرن

58 ئەرێ لێکدانا ڕێزکرییان کرارەکا یەکتربەستنە؟ ئانکو ، ئەرێ $(AB)C=A(BC)$ هەکەر هەموو ئەنجامێن لێکدانێ پێناسەکری بن؟ بەرسڤا خۆ ب نموونە بدە؟

59 **ڤەگوهاستی Transpose** ڕێزکرییێ A دبیتە ڕێزکرییێ A^T ئەوێ ژ ئەنجامێ گوهۆڕینا هەر ڕێزەك ژ ڕێزین ڕێزکرییێ A ب ستوونەکا هەمان خانە هەیی هاتییە پێکئینان. نموونە : هەکەر

$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 3 & 5\end{bmatrix}$ ، دێ ڤەگوهاستیێ وێ بیتە $A^T=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\\ 3 & 5\end{bmatrix}$

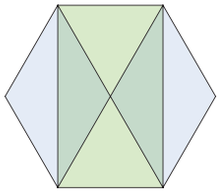
أ ئەرێ لێکدانا ڕێزکرییەکێ دگەل ڤەگوهاستیێ وێ هەردەم د شیاندایە؟ ڕۆنبکە.

ب ڕیزکرییێ $P=AA^T$ بینەدەر هەکەر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ ئەرێ ڕێزکرییێ P دانەیێن یەکسان تێدا هەنە؟ چنە؟

60 هێژێن ڕێزکرییێ $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ هەژمارکە، و بەهایێ دانەیێ د ڕێزا دووێ و ستوونا دووێدا ژ ڕێزکرییێ ئەنجامی تۆماربکە. پەیوەندیا ل ناڤبەرا ڤان بهایان ل دویڤ ئێك چییە؟

پێداچوونا لوولپێچی

دیزاینەکێ زەخرەفی: سیمایێ ژ دەرڤە یێ شێوەیێ بەرامبەر دبیتە شەشلایەکێ ڕێك. سێگۆشەیا کەسك لایەکسانە. (پۆلێن پێشتر)



61 چەند جۆتێن گۆشەیێن سەربەرامبەر د شێوەیدا هەنە؟

62 چەند سێگۆشەیێن جۆتبووین ل گەل سێگۆشەیا کەسك د شێوەیدا هەنە؟

63 چەند پارچەراستەهێلێن جۆتبووین ل گەل لایی شەشلایێ ڕێك د شێوەیدا هەنە؟

ئەڤان خالان دبۆشایێ پۆتانیدا وێنەبکە (وانەیا 1.1)

64 $(0, 4, -5)$ **65** $(2, 2, 6)$ **66** $(-3, -3, 3)$ **67** $(1, -1, -1)$

هەر بڕەکی هەژمارکە هەکەر د شیاندا بیت ، کو : $S=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ و $T=\begin{bmatrix}0.5 & 0.83\\ 5 & 0\end{bmatrix}$ و $V=\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\ -4 & 1 & -1\end{bmatrix}$ (وانەیا 1.3)

68 $S+T$ **69** $V-T$ **70** $4T$

3–3 ڕێزکری و جەگوهۆرکێن ئەندازەیی

Matrices and Geometric Transformations

ئارمانج

• ڕێزکرییان دێ بکارئینین بۆ جەگوهۆڕکا شێوەیێن ئەندازەیی.

کی ئەڤێ بکاردئینیت؟

هۆنەرمەند شێوازێن جەگوهۆڕکێن دوبارەکری بکاردئینین بۆ ئەنجامدانا کارێن خو. (ڕاهێنانا 16)

زاراڤ

Vocabulary

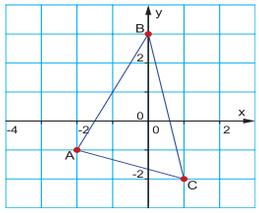
ڕێزکریێ ڕاکێشانێ
Translation matrix

ڕێزکریێ دەوردانێ زڤڕاندنێ
Rotation matrix

ڕێزکریێ وێنەدانەوە
Reflection matrix

تو دشێی وەسفێ جهێ شێوەیەکی ئەندازەیی د رووتەختێ پۆتانیدا بکەی و سیما و پێڤانێن وی دیار بکەی، بکارئینانا جۆتێن ڕێکخستی کو سەرێن وی بنوێنن. بۆ نموونە، سەرێن شێوەیێ بەرامبەر دبنە خالێن: $A(-2, -1)$ و $B(0, 3)$ و $C(1, -2)$

تو دشێی ڤێ سێگۆشەیێ ب ڕێزکریێ بنوێنی.



$$P=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ -1 & 3 & -2\end{bmatrix}$$

پۆێن خالان x ←

تانێن خالان y ←

ڕاکێشان Translation جەگوهۆڕکەکا ئەندازەییە، خالا $A(x, y)$ دگوهۆڕیت بۆ خالەکا دی $A'(x', y')$، کو $x'=x+a$ و $y'=y+b$. (a و b دوو ژمارەیێن ڕاستی یێن نەگۆڕن). ئەم دشێین ڕاکێشانا بۆری ب هۆیێ ڕێزکرییەکی ئەنجام بدەین کو تێدا ستوونا $\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}$ پێکی سەرێن شێوەیێ داخوازکری دووبارە ببیت. دبێژنە ڤێ ڕێزکریێ، **ڕیزکریێ ڕاکێشانێ Translation Matrix**.

نموونـــــە 1 بکارئینانا ڕێزکرییان بۆ ڕاکێشانا شێوەیێن ئەندازەیی

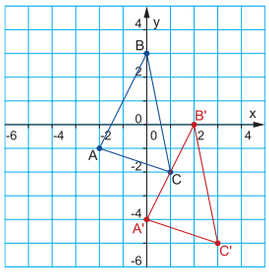
سێگۆشەیا ABC ڕابکێشە، کو $A(-2, -1)$ و $B(0, 3)$ و $C(1, -2)$ دوو یەکان بۆ ڕاستێ و3 یەکان بۆ خوارێ، سەرێن سێگۆشەیا وێنەیی هەژماربکە و سێگۆشەیێ وێنەبکە.

ڕێزکریێ ڕاکێشانێ دبیتە

$$T=\begin{bmatrix}2 & 2 & 2\\ -3 & -3 & -3\end{bmatrix}$$

پۆێن خالان ←

تانێن خالان ←



بۆ هەژمارتنا پۆتانێن وێنەیێ سێگۆشەیێ ب ڕاکێشانا ل سەری دیار، ڕێزکریێ سێگۆشەیا بنەڕەت دنوێنیت کۆمبکە ل گەل ڕێزکریێ ڕاکێشانێ.

ڕیزکریێ ڕاکێشانێ + ڕیزکریێ سێگۆشەی

$$\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ -1 & 3 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 2 & 2\\ -3 & -3 & -3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2+2 & 0+2 & 1+2\\ -1-3 & 3-3 & -2-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\ -4 & 0 & -5\end{bmatrix}$$

وێنەیێ سێگۆشەیا ABC ب ڕاکێشانێ دبیتە سێگۆشەیا $A'B'C'$ $A'(0, -4)$ $B'(2, 0)$، $C'(3, -5)$.

1. سێگۆشەیا ABC کو $A(2, 4)$ و $B(3, 1)$ و $C(1, -1)$ ڕابکێشە، 3 یەکان بۆ ڕاستێ و یەکەیەکێ بۆ خوارێ. پۆتانێن سێگۆشەیا وێنەی هەژماربکە وسێگۆشەیێ وێنەبکە.

خالا چاڤدێریێ

هاوڕێژەیا ئەندازەیی Dilation جهگوهۆڕکەکا پێڤانێن شێوەیێ– بنەڕەت دگوهۆدیت (ب مەزنکرنی یان ب بچووککرنێ)، ب مەرجەکی کو شێوەیێ– وێنەیێ هاوشێوە بیت بۆ شێوەیێ بنەڕەت. ل بیرا تەیە کو شێوەیێن هاوشێوە هەمان سیما هەنە وبێی کو هەمان پێڤان هەبن: و گۆشەیێن بەرامبەر و لایێن بەرامبەر هاوڕێژەنە.

دەمێ چەقێ هاوڕێژەیا ئەندازەیی ل سەر خالا بنەڕەت بیت ل رووتەختێ پۆتانی ، ب تنێ دێ ڕێزکریێ شێوەیێ بنەڕەت ل ڕێژەیا هاوڕێژەیا ئەندازەیی دەی بۆ بدەستڤەئینانا ڕێزکریێ شێوەیێ – وێنەی. د ڤی بەشیدا ب تنێ دێ بەحسێ هاوڕێژەیێن ئەندازەیی کەن ئەوێن چەقێن وان خالا بنەڕەت بیت.

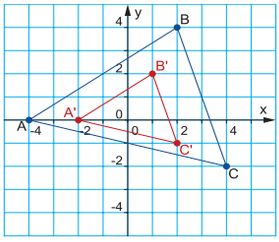
نموونـــــه 2 بکارئینانا ڕێزکرییان بۆ جهگوهۆڕکێن شێوەیێن ئەندازەیی ب هاوڕێژەیەکا ئەندازەیی

سێگۆشەیا ABC کـو $A(-4,0)$ و $B(2,4)$ و $C(4,-2)$ بگوهۆڕە ب هاوڕێژەیەکا ئەندازەیی، چەقێ وێ خالا بنەڕەت و ڕێژەیا وێ $\frac{1}{2}$ بیت (بچووککرن). پۆتانێن سەرێن سێگۆشەیا وێنەیی هەژماربکە و وێنە بکە.

ڕێزکریێ سێگۆشەیێ ل ڕێژەیا $\frac{1}{2}$ بدە.

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-4 & 2 & 4\\ 0 & 4 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(-4) & \frac{1}{2}\times 2 & \frac{1}{2}\times 4\\ \frac{1}{2}\times 0 & \frac{1}{2}\times 4 & \frac{1}{2}(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

پۆیێن خالان ←
تانێن خالان ←



سەرێن سێگۆشەیا وێنەی دبنە :

$A'(-2,0)$ و $B'(1,2)$ و $C'(2,-1)$

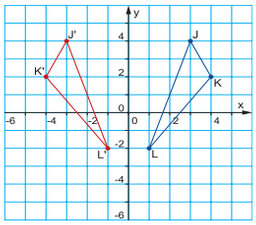
2. سێگۆشەیا ABC کو $A(2,3)$ و $B(5,1)$ و $C(-2,-7)$ بگوهۆڕە ب هاوڕێژەیەکا ئەندازەیی، چەقێ وێ خالا بنەڕەت و ڕێژەیا وێ $\frac{4}{3}$ بیت(مەزنکرن). پۆتانێن سەرێن سێگۆشەیا وێنەی هەژماربکە پاشی وێنە بکە.

ڕێزکریێ وێنەدانەوە Reflection Matrix دبیتە ڕێزکریێ وێ گوهۆڕینێ ئەوا وێنەیێ شێوەیەکی ئەندازەیی دروست دکەت ب وێنەدانەوە ل دۆر تەوەرەکی. بۆ ب دەستڤەئینانا وێنەیێ شێوەیەکێ ئەندازەیی ب وێنەدانەوە ل دۆر تەوەرێ دووێ y ، ڕێزکریێ $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ل ڕێزکریێ شێوەی بدە.

ئەڤ چەندە هەموو بۆیێن خالێن x دێ گوهۆڕیت ب دژێ وێ$(-x)$. و هەموو تان دێ وەکی خۆ مینن و بێ گوهۆڕین.

نموونـــــه 3 بکارئینانا ڕێزکرییان بۆ وێنەدانەوەیا شێوەیێن ئەندازەیی

سێگۆشەیێ JKL کو $J(3,4)$ و $K(4,2)$ و $L(1,-2)$ بگوهۆڕە، ب وێنەدانەوە ل دۆر تەوەرێ y پوتانێن سەرێن سێگۆشەیا– وێنەی هەژماربکە و وێنە بکە.



هشیاربە!
لێکدانا ڕێزکرییان نە کردارەکا ئالوگۆڕە. لەوما خۆ پشتراست بکە کو ڕێزکریێ گوهۆڕینێ ل لایێ چەپێ هاتیە نڤیسین.

$$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 4 & 1\\ 4 & 2 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -4 & -1\\ 4 & 2 & -2\end{bmatrix}$$

پۆتێن خالان ل 1 – داینە و تانێن وان ل 1 داینە.

سەرێن سێگۆشەیا – وێنەی دبنە: $J'(-3,4)$ و $K'(-4,2)$ و $L'(-1,-2)$.

3. بۆ بدەستڤەئینانا وێنەیێ شێوەیەکێ ئەندازەیی ب وێنەدانەوە ل دۆر تەوەرێ x ، ڕێزکریێ $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ ل ڕێزکریێ شێوەی بدە. سێگۆشەیا نموونەیا 3 بگوهۆڕە، ب وێنەدانەوە ل دۆر تەوەرێ x . پۆتانێن سەرێن سێگۆشەیا وێنەی هەژماربکە و وێنە بکە.

ڕێزکرێ دەوردانێ (زڤڕاندنێ) Rotation Matrix ڕێزکرێ وێ گوهۆڕینێ ئەوا وێنەیێ شێوەیەکی ئەندازەیی ب دەوردانەکێ دروست دکەت. نموونە 4 هندەك جۆرێن ڕێزکرێێن دەوردانێ دیار دکەت.

نموونـــــە 4 بکارئینانا ڕێزکرییان بۆ دەوردانا شێوەییێن ئەندازەیی

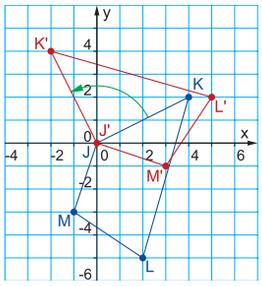
هەر ڕێزکریەکێ بکاربینە بۆ گوهۆرینا چارلایی $JKLM$ ، کو $J(0,0)$ و $K(4,2)$ و $L(2,-5)$ و $M(-1,-3)$ ، ب دەوردانێ ل دۆر خالا بنەڕەت. شێوەیی وێنەی بکێشە و دەوردانێ وەسفبکە.

ڕێنماهیەك

لێکدانا پۆتانی دگەل 1- دژێ وێ دروست دکەت.

أ $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

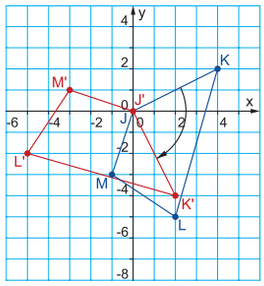
$$\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 4 & 2 & -1\\ 0 & 2 & -5 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -2 & 5 & 3\\ 0 & 4 & 2 & -1\end{bmatrix}$$



ئەڤ وێنە، وێنەیێ چارلایەکییە ب دەوردانەکا بەروڤاژی میلێ دەمژمێرێ ب گوشەیا $90°$ و چەقێ وێ خالا بنەڕەت.

ب $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 4 & 2 & -1\\ 0 & 2 & -5 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2 & -5 & -3\\ 0 & -4 & -2 & 1\end{bmatrix}$$



وێنە، وێنەیێ چارلایەکییە ب دەوردانەکێ ل گەل میلێ دەمژمێرێ و گۆشەیا $90°$ و چەقێ وێ خالا بنەڕەت.

خالا چاقدێریێ

4. ڕێزکرێ $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ بکاربینە بۆ گوهۆڕینا سێگۆشەیێ ABC کو $A(0,0)$ و $B(4,0)$ و $C(0,-3)$ ، ب دەوردانەکێ ل دۆر خالا بنەڕەت. شێوەیێ وێنەی بکێشە، پاشی ئەوێ دەوردانێ وەسفبکە.

هزربکە و گەنگەشێ بکە

1. جهگوهۆڕکیا ئەندازەیی وەسفبکە ئەوا دەردکەڤیت ژ ئەنجامێ لێکدانا ڕێزکرێ $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ دگەل ڕێزکرێ شێوەیێ ئەندازەیی.

2. ئەوێ گوهۆڕینێ وەسفبکە، ئەوا ب سەر پۆیێن خالێن ڕێزکرییەکێ ئەندازەییدا دهێت، دەمێ ل گەل هەر ئێك ژ ڤان ڕێزکریان دهێتە لێکدان

أ $A=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$ ب $B=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$ ج $C=\begin{bmatrix}0.5 & 0\end{bmatrix}$ د $D=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$

3. ڕیکخەربە خشتەی دوبارە بنقیسە و تمامبکە. Q ڕێزکرێ سێگۆشەیەکییە. بڕێ ڕێزکرێ گونجایی د هەر چارچۆڤەیەکیدا بنقیسە.

فێربە و شرۆڤەبکە

جهگوهۆڕکی	کردار ب ڕێزکرێ
ڕاکێشانا سێگۆشەیێ ب ستوونی	
ڕاکێشانا سێگۆشەیێ ب ئاسوویی	
مەزنکرن یان بچووککرنا سێگۆشەیێ	
وێنەدانەوەیا سێگۆشەیێ ل دۆر تەوەرێ دووێ	
وێنەدانەوەیا سێگۆشەیێ ل دۆر تەوەرێ ئێکێ	
دەوردانا سێگۆشەیێ $90°$ ل دۆر خالا بنەڕەت ب ئاراستەیێ میلێ دەمژمێرێ	
دەوردانا سێگۆشەیێ $90°$ ل دۆر خالا بنەڕەت بەروڤاژی ئاراستەیێ میلێ دەمژمێرێ.	

3-3 ڕاهێنان

ڕاهێنانێن ئاڕاستەکری

1 **زاراف** شێوەیێ ئەندازەیی ئەوێ ـــــــ دەردئێخت، وەسایە هەر وەکو ئێك ژ تەوەرێن پۆتانان ڕۆلێ خۆدیکەکێ بینیت. (ڕێزکریێ وێنەداوە یان ڕێزکریێ ڕاکێشانێ).

بەرێ خۆ بدە نموونە 1

چارلایێ $ABCD$ کو $A(-2,4)$و $B(3,1)$ و $C(1,-4)$و $D(-2,-2)$ب ڕاکێشانا دیارکری د هەردوو ڕاهێنانێن 2 و 3 یدا دیار بکە، پۆتانێن سەرێن وێنەی وێنەدەر، و وێنەبکە.

2 دوو یەکان بۆ چەپێ ویەکەکێ بۆ سەری.

3 یەکەکێ بۆ ڕاستێ و سفر یەکە بۆ خوارێ.

بەرێ خۆ بدە نموونە 2

ڕێزکریێ مەزنکرنێ بکاربینە بۆ مەزنکرن یان بچووککرنا چارلایێ $ABCD$کو$A(-2,4)$و $B(3,1)$ و $C(1,-4)$ و $D(-2,-2)$، ب جهگوهۆڕکیا دیارکری د هەردوو ڕاهێنانێن 4 و 5 دا پۆتانێن سەرێن وێنەی وێنەدەر و وێنە بکە.

4 بچووککرن ب ڕێژەیا 0.5

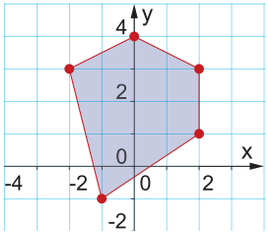
5 مەزنکرن ب ڕێژەیا 2

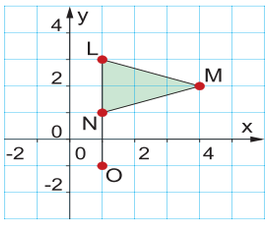
بەرێ خۆ بدە نموونە 3

وێنەیێ چەندلایێ $ABCDE$ بینەدەر، کو $A(-2,3)$ و$B(0,4)$ و$C(2,3)$ و$D(2,1)$ و$E(-1,-1)$ ، هەر وەکو دیارکری د هەردوو ڕاهێنانێن 6 و 7یدا. پۆتانێن سەرێن شێوەیێ- وێنەی بینەدەر و وێنەبکە.

6 ب وێنەدانەوە ل دۆر تەوەرێ دووێ y

7 ڕیزکریێ $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$بکاربینە بۆ دەرئینانا وێنەیێ چەندلایی ب وێنەدانەوە ل دۆر ڕاستەهێلێ $y=x$.





بەرێ خۆ بدە نموونە 4

ڕێزکریێ بکاربینە بۆ دیارکرنا وێنەیێ چارلایێ $LMNO$ کو $L(1,3)$ و $M(4,2)$ و $N(1,1)$ و $O(1,-1)$ ب دەوردانەکا ڕێزکریێ وێ دایی د هەردوو ڕاهێنانێن 8 و 9یدا. پۆتانێن سەرێن شێوەیی وێنەی بینەدەر و وێنە بکە.

8 $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ **9** $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

ڕاهێنان و شیکارکرنا پرسیاران

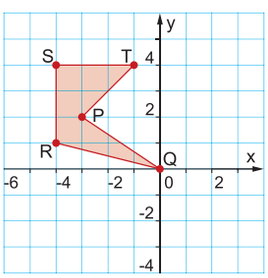
ڕاهێنانێن ئازاد

بۆ شیکارکرنا ڕاهێنانان	بەرێ خۆ بدە نموونە
10	1
11	2
12	3
14-13	4

10 چارلایێ $ABCD$ کو $A(0,4)$ ، $B(-3,-1)$ ، $C(1,-5)$ ، $D(1,0)$ ، رابکێشە 3 یەکان بۆ ڕاستێ و 3 یەکان بۆ سەری. پۆتانێن سەرێن شێوەیێ- وێنەی بینەدەر و وێنە بکە.

11 وێنەیێ چارلایێ$ABCD$کو$A(1,2)$ ، $B(-2,3)$ ، $C(-3,4)$ ، $D(-4,1)$ بینەدەر ب هاوڕێژەیەکا ئەندازیی کو چەقێ وێ خالا بنەڕەت بیت و ڕێژەیێ $\frac{3}{2}$ وێ بیت. پۆتانێن سەرێن شێوەیێ- وێنەی بینەدەر و وێنە بکە.

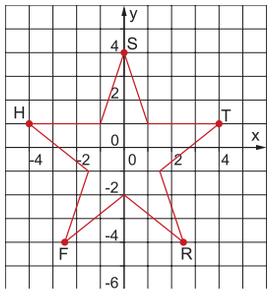
12 وێنەیێ چەندلایێ $ABCDE$ کو$A(-2,3)$ ، $B(0,4)$ ، $C(2,1)$ ، $D(2,1)$ ، $E(-1,-1)$ بینەدەر ب وێنەدانەوە لدۆر تەوەرێ ئێکێ x . پۆتانێن سەرێن شێوەیێ- وێنەی بینەدەر و وێنەبکە.



هەر ڕێزکرییەکێ بکاربینە بۆ دەرئینانا وێنەیێ چەندلایێ $PQRST$ کو$P(-3,2)$و$Q(0,0)$ و $R(-4,1)$ و $S(-4,-4)$ و $T(-1,4)$، ب دەوردانەکێ ڕێزکریێ وێ د هەردوو پرسیارێن13 و 14 یدا هاتیە. پۆتانێن سەرێن شێوەیێ- وێنەی بینەدەر و وێنەبکە.

13 $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ **14** $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$

15 **نەخشەکێشان:** چنارێ دروشمەك بۆ یانەیا ژینگەهێ ل قوتابخانەیا خو چێکر، کو ل سەر شێوەیێ ستێرا دەریایێ بوو. پۆتانێن سەرێن ستێرێ: $S(0,4)$، $T(4,1)$، $R(2.5,-4)$، $F(-2.5,-4)$، $H(-4,1)$

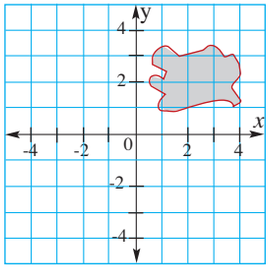


أ ڕێزکرێ $\begin{bmatrix} 0.81 & -0.59 \\ 0.59 & 0.81 \end{bmatrix}$ بکاربینە بۆ دەوردانا ستێرێ ب $\frac{1}{10}$ خۆل ل دۆر خالا بنەڕەت. پۆتانێن سەرێن ستێرا– وێنەی بۆ نێزیکترین نیف یەکە نێزیکبکە.

ب ئەرێ ستێر ب ئاراستەیێ میلێ دەمژمێرێ زڤری یان دژی ئاراستەیی وی.

16 **وێنەکرن:** دا کو ب کردارەکا دانەبەرێکا هۆنەری خشتە ڕێژکرنا رابی، دێ شێوەیێ بنەڕەتی وێنەکەی و هندەك یێ چەگوهۆڕکێن ئەندازەیی دێ ل سەر کەی، هەتا ئەو شێوەیێ دەردکەڤن هەموو رووبەرێ پێدڤێ دا پۆشن بکەن، بێی کو چو قالاهی بمینیت یان ب سەرێکدا بچن. هونەرمەندەکی ئەو شێوەیێ ل ڕەخێ چەپێ وێنەکر.

أ هۆنەرمەندی دەست ب دەوردانا وێنەی کر، ب گـۆشەیا $180°$ ل دۆر خالا بنەڕەت. ڕێزکرێ ڤی گوهۆڕینێ بنڤیسە



ب پۆتانێن هەرچار سەرێن شێوەیێ ژ ئەنجامێ گوهۆڕینێ دیاربوویێن بینەدەر.

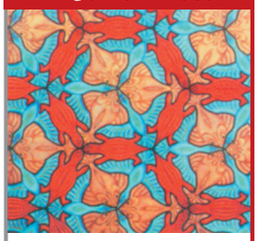
ج پاشی هۆنەرمەند رابوو ب راکێشانا وێنەیێ ب دەست کەتی، 4 یەکان بۆ سەری، و 2 یەکان بۆ راستێ. ڕێزکرێ ڕاکێشانێ بنڤیسە.

د پۆتانێن هەرچار سەرێن شێوەیێ ژ ئەنجامێ ڕاکێشانێ دیاربوویێن بینەدەر.

هـ شێوەیێ بنەڕەت و شێوەیێ دوماهیێ، د هەمان ڕووتەختدا وێنە بکە.

دەروازەیەك

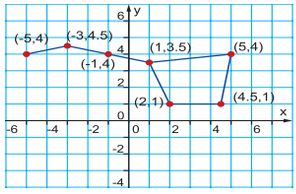
مێژوویا هونەری



هونەرمەند ئیشەر (1898 – 1972) هندەك شێوەیێن ئەندازەیی یێن هاوجێ، گوهۆڕین بۆ شێوەیێن چویچك و خشۆك و شێوەیێن دی.

17 **هزرکرنەکا ڕەخنەگر:** $T=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ئەنجامی لێکدانا ڕێزکرێ T ل ڕێزکرییەکێ شێوەیێ ئەندازەیی روّنبکە، پاشی لێکدانا ڕێزکرێ T ل ئەنجامێ لێکدانا بۆری روّنبکە.

ئەوێ ڕێزکرێ بنڤیسە ئەوێ وێنەیێ بەرامبەر، کو ستێرا هرچێ مەزن دنوێنیت، دگوهۆڕیت ب جهگوهۆرکیا دایی، پاشی پۆتانێن وێنەی بینەدەر ل بارەیێن ل خوارێ:–



18 ڕاکێشانا 2 یەکان بۆ سەری.

19 ڕاکێشانا ئێك یەکە بۆ خوارێ، 3 یەکان بۆ چەپێ.

20 مەزنکرنەکا ڕێژەیا وێ 2 .

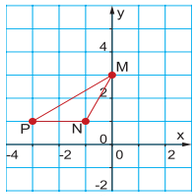
21 وێنەدانەوە ل دۆر تەوەرێ ئێکێ x .

22 دەوردان ل دۆر خالا بنەڕەت ب ئاراستەیێ میلێ دەمژمێرێ $90°$.

23 دەوردان ل دۆر خالا بنەڕەت بەروڤاژی ئاراستەیێ میلێ دەمژمێرێ $90°$.

24 **بنڤیسە:** ئەنجامێ لێکدانا ڕێزکرێ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $T=$ دگەل ڕێزکرێ شێوەیێ ئەندازەیی چییە؟

25 ڕێزکرێ جهگوهۆڕکیا ئەندازەیی بنڤیسە ئەوا نەخشەیا $f(x)$ دگوهۆڕیت بۆ نەخشەیا $h(x)=-f(x)$ ڕێزکرێ ئەوێ جهگوهۆڕکیێ بنڤیسە ئەوا نەخشەیێ دگوهۆڕیت بۆ $g(x)=f(-x)$.



26 أ ڕێزکرێ سێگۆشەیێ بەرامبەر بنڤیسە.

ب ڕێزکرێ $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ل ڕێزکرێ سێگۆشەی بدە.

ج سێگۆشەیا نوو وێنە بکە بکارئینانا ڕێزکرێ دەرکەفتی. وەسفێ ڤی سێگۆشەیێ بکە.

د هەردوو پێنگاڤێن(ب)و(ج) دوبارە بکە ل گەل سێگۆشەیا نوو. چ دبێژی دەربارەی سێگۆشەیا سێیێ

27 سەرجۆن ب چەگوهۆرکەکێ بۆ شێوەیەکێ ئەندازەیی رابوو ب هاوریژەیەکا ئەندازەیی، ل دویڤدا دەوردانەك گوشەیا وێ $90°$ و ب ئاراستەیێ میلێ دەمژمێرێ، و ل دویڤ دا وێنەدانەوەیەك ل دۆر تەوەرێ دووێ y ، کێژ زنجیرە، ئەڤان جەگوهۆڕکیان ئێك ل دویڤ ئێك دنوێنیت؟

أ لێکدانا ڕێزکرێ ل ژمارەیەکی، کۆمکرنا دوو ڕێزکرییان: لێکدانا دوو ڕێزکریان.

ب لێکدانا ڕێزکرێ ل ژمارەیەکی: لێکدانا هەردوو ڕێزکریان: لێکدانا هەردوو ڕێزکریان.

ج کۆمکرنا دوو ڕێزکریان: لێکدانا هەردوو ڕێزکریان: کۆمکرنا هەردوو ڕێزکریان.

د لێکدانا دوو ڕێزکریان: کۆمکرنا هەردوو ڕێزکریان: لێکدانا ڕێزکرێ ل ژمارەیەکی.

28 ئەنجامێ لێکدانا ڕێزکرێ شێوەیەکێ ئەندازەیی دگەل ڕێزکرێ $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ چیە؟

أ مەزنکرنا شێوەیێ، پاشی دەوردان ل دۆر خالا بنەڕەت ب گۆشەیا $90°$ و ب ئاراستەیێ میلێ دەمژمێرێ.

ب بچووککرنا شێوەیێ، پاشی دەوردان ل دۆر خالا بنەڕەت ب گۆشەیا $90°$ و بەروڤاژی ئاراستەیێ میلێ دەمژمێرێ.

ج بچووککرنا شێوەیێ، پاشی وێنەدانەوە ل دۆر تەوەرێ x

د مەزنکرنا شێوەیی، پاشی وێنەدانەوە ل دۆر تەوەرێ y

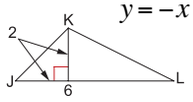
29 کێژ ڕێزکری دهێتە بکارئینان بۆ جەگوهۆڕکیا شێوەیەکی ب دەوردانێ ل دۆر خالا بنەڕەت گوشەیا وێ $180°$ ؟

أ $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ج $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

بەرهنگاری و بەرفرەهکرن

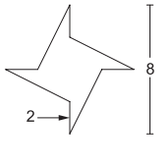
30 کێژ ڕێزکری دئێتە بکارئینان بۆ جەگوهۆڕکیا شێوەیەکێ ب وێنەدانەوە ل دۆر ڕاستەهێلێ $y = -x$

31 سێگۆشەیا بەرامبەر ل ڕووتەختێ پۆتانی وێنە بکە و ڕێزکریێ وی بنقیسە.



أ چاوا دێ ڤی سێگۆشەیێ گوهۆڕی دا شێوەیێ دی ب دەستڤەبینی؟

ب ڕیزکریان بکاربینە بۆ ئەنجامدانا جەگوهۆڕکی، و پۆتانێن هەرچار سەرێن شێوەیێ– وێنەیێ بنقیسە.



32 شێوەیەکێ ئەندازەیی بگوهۆڕە ب ڕێزکریێ $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ وەسفی وێ جەگوهۆڕکێ بکە. چ دێ ڕوودەت هەکەر تە شێوەیەك چەندجاران ب ڤێ جەگوهۆرکێ گوهارت؟

پێداچوونا لوولپێچی

33 دیاربکە هەکەر پێدایێن خشتەیێ نەخشەیەکا هێلی پێناسە بکەن. (پۆلێن پێشتر)

کارت	2	5	8	11
لێچوو	35 000	87 500	140 000	192 500

دیاربکە ئەرێ ئەڤ جۆتێ ڕێکخستی دبیتە شیکار بۆ سیستەمێ لاسەنگەیا. (وانەیا 3–2)

34 $\begin{cases} y > 2x - 8 \\ y \le \frac{1}{4}x + 2 \end{cases}$ ؛ $(2, -4)$

35 $\begin{cases} y > 0 \\ y \ge 2x - 11 \\ 5x + y < 5.5 \end{cases}$ ؛ $(0, 5)$

ئەڤان بەهەزمێرە ئەگەر دشیاندابیت. (وانەیا 2–3)

36 $\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

37 $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

38 $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

4–3 سنووردار و ڕێسایا گرامەر

Determinants and Cramer's Rule

ئارمانج

- سنووردارێ ڕێزکریەکێ 2 × 2 یان 3 × 3 دێ هەژمێرن.
- سیستەمەکێ هێلی دێ شیکارکەن بکارئینانا ڕێسایا گرامەر.

کی ئەقێ بکاردئینیت؟

شارەزایێن خوارنا وەرزشڤانان پێدڤی ب شیکارکرنا سیستەمێن هاوکێشەیێن هێلی هەنە بۆ دیارکرنا چەندیا گەرمۆك و روون و کاربۆهیدراتێن پێدڤی بۆ خوارنا هەر وەرزشڤانەکی. (نموونە 4)

زاراڤ
Vocabulary

سنووردار
Determinant

ڕێزکریێ هاوکۆلکەیان
Coefficient matrix

ڕێسایا گرامەر
Crame's rule

زانایێن بیرکاریێ ڕێزکریێن چارگۆشەیی و ژمارەیان جوێت دکەن، کو ژمارەیەکا راستی ببیتە بەرامبەری هەر ڕێزکریەکێ چارگۆشەی و دبێژنە وێ ژمارێ: **سنووردارێ ڕیزکریێ Determinant**.

هێمایێ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ دهێنە بکارئینان دا دەربڕینێ ژ سنووردارێ ڕێزکریێ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بکەت. سنووردارێ ڕێزکریێ ڕۆلەکێ گرنگ هەیە هەر وەکو د داهاتیدا دێ دیار بیت.

فێربە و ژبەرببکە

سنووردارێ ڕیزکریێ 2 × 2

ب پەیڤان	ب ژمارەیان	ب جەبرێ
سنووردارێ Determinant ڕیزکریێ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ پێناسە $ad-bc$ دکەن.	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{matrix} + \\ - \end{matrix}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ $=(1)(4)-(3)(2)=-2$	$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{matrix} + \\ - \end{matrix}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ $=ad-bc$

نموونە 1 دەرئینانا سنووردارێ ڕێزکریێ 2 × 2

سنووردارێ ڕێزکریێ بینەدەر.

أ $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 6\times 3 - 5\times 8$

$= 18 - 40 = -22$ ئەنجامێ لێکدانا هەردوو ناڤەندان ژ ئەنجامێ لێکدانا هەردوو لایان دەربکە.

سنووردارێ ڕیزکریێ دبیتە -22 .

ب $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\times 3 - \frac{2}{3}(-6) = 1+4 = 5$

سنووردارێ ڕیزکریێ دبیتە 5.

خالا چاڤدێریێ

1. سنووردارێ ڕیزکریێ بینەدەر.

أ $\begin{bmatrix} 0.2 & 30 \\ -0.3 & 5 \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 3 \\ \frac{5}{6} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ ج $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 4 & 2\pi \end{bmatrix}$

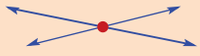
تو دشێی سنووردارا‌ن بکاربینی بۆ شیکارکرنا سیستەمێن هاوکێشەیێن هێلی. بۆ شیکارکرنا سیستەمێ

$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ دەستپێبکە ب نڤیسینا ڕێزکریێ $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ ئەوێ دبێژنێ **ڕێزکریێ هاوکۆلکەیان** **Coefficient matrix** و سنووردارێ وێ D بهەژمێرە. پاشی هەردوو سنووردارا‌ن $Dx=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ و $Dy=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ ، بهەژمێرە. ڕێسایا گرامەر ئەڤا دهێت بکاربینە:

ڕێسایا گرامەر بۆ سیستەمێن 2 × 2

هەکەر سنووردارێ ڕێزکریێ هاوکۆلکەیان D نە 0 بیت، سیستەمێ $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ دێ شیکارەك ب تنێ هەبیت و ئەو ژی: $x=\frac{Dx}{D}$ و $y=\frac{Dy}{D}$ ، کـــو $Dx=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ و $Dy=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

تودشێی سنووردارێن D و Dx و Dy بکاربینی، دا بزانی ئەرێ سیستەمێ دیارکری (شیکارەکا ئێکانە هەیە) یان ستەمە(چو شیکار نینن) یان نە دیارکریە (ژمارەیەکا بیسنوور ژ شیکاران هەیە). د پۆلینکرنا خوارێ دا، وەسا دێ دانێن کو a_1 و b_1 نە سفرن د هەمان دەمدا، و a_2 و b_2 نە سفرن د هەمان دەمدا.

پۆلینکرنا سیستەمێن دوو هاوکێشەیێن هێلی یێن دوو نەزانراو		
هەکەر $D\neq0$ سیستەم دێ یێ پێناسەکری بیت (سنووردارە)	هەکەر $D=0$ و $Dx=Dy$ سیستەم دێ بێ سنوور بیت	هەکەر $D=0$ و $Dx\neq0$ یان $Dy\neq0$ سیستەمێ ستەمە.
		

نموونـــــە 2 سیستەمێن هێلی 2×2 شیکار بکە بکارئینانا ڕێسایا گرامەر.

سیستەمێ هێلی بکارئینانا ڕێسایا گرامەر شیکار بکە.

أ $\begin{cases} x-y=3 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$

پێنگاڤا (1)ێ سنووردارێ ڕێزکریێ هاوکۆلکەیان بینەدەر.

$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=1(-1)-2(-1)=1$ سیستەمێ سنوورداره چونکی $D\neq0$

پێنگاڤا (2)ێ هەردوو سنووردارا‌ن Dx و Dy بینەدەر.

$Dx=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=-4$ ، $Dy=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-7$

شیکارەك ب تنێ هەیە، دبیتە $(-4,-7)$.

ب $\begin{cases} y-2=3x \\ 3x-y=7 \end{cases}$

پێنگاڤا (1)ێ سیستەمی ل سەر شێوەیێ گشتی بنڤیسە.

$$\begin{cases} 3x-y=-2 \\ 3x-y=7 \end{cases}$$

پێنگاڤا (2)ێ سنووردارێ ڕێزکریێ هاوکۆلکان بینەدەر.

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=3(-1)-3(-1)=0$$

پێنگاڤا (3)ێ Dx بهەژمێرە .

چونکی $D=0$ ، $Dx\neq 0$ ، $Dy\neq 0$ ، سیستەمی دێ ستەم بیت.

$$Dx=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}=9$$

$$Dy=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=27$$

ڕۆناهییەك

هەکەر $D=0$ و $Dx=0$ دڤێت تو Dy بینیەدەر دا بریارێ بدەی کا سیستەمێ ستەمە یان بێ سنوورە.

خالا چاڤدێرییێ

2. سیستەمی شیکار بکە بکارئینانا ڕێسایا گرامەر $\begin{cases} 6x-2y=14 \\ 3x=y+7 \end{cases}$

داکو ڕێسایا گرامەر بکاربینی بۆ شیکارکرنا سیستەمەکێ هێلی 3×3 ، دڤێت تو سنووردارێن ڕێزکریێن ژ جۆرێ 3×3 بهەژمێری. هێلکارێ خوارێ، ئێك ژ ڕێکێن هەژمارکرنا ڤێ جۆری دیاردکەت.

هەردوو ستوونێن ئێکێ ل ڕەخێ ڕاستێ سنووردارێ بنڤیسە.

ئەنجامێن لێکدانا ژمارەیێن هەر تیرەکی سۆر کۆمبکە. پاشی ئەنجامێن لێکدانا هەر تیرەکی شین لێدەربکە.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{matrix}$$

$$a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-(a_3b_2c_1+b_3c_2a_1+c_3a_2b_1)$$

نموونـــــە 3 هەژمارکرنا ڕێزکریەکی 3 × 3

سنووردارێ ڕێزکریێ $A=\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -3 & 10 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{bmatrix}$ بینەدەر.

سنووردارێ بنڤیسە، پاشی هەردوو ستوونێن ئێکێ ل ڕەخێ ڕاستێ سنووردارێ بنڤیسە

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -3 & 10 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \\ 2 & 6 \end{matrix}$$

پێنگاڤا (1)ێ ئەنجامێ لێکدانا ژمارەیێن هەر تیرەکێ دهێتە خواریڤ هەژماربکە و ئەنجامان کۆمبکە

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -3 & 10 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \\ 2 & 6 \end{matrix}$$

$$(4)(10)(-1)+(-2)(1)(2)+(0)(-3)(6)=-44$$

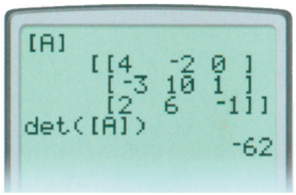
پێنگاڤا (2)ێ ئەنجامێ لێکدانا ژمارەیێن هەر تیرەکێ بەرەڤ ژۆر هەژماربکە و ئەنجامان کۆمبکە.

$$(2)(10)(0)+(6)(1)(4)+(-1)(-3)(-2)=18$$

پێنگاڤا (3)ێ سەرجەمێ دووێ ژ سەرجەمێ ئێکێ دەربکە.

$$-44-18=-62$$

سنووردارێ ڕێزکریێ A یەکسانە -62. ساخبکە. بژمێرا ڕۆنکرنێ بکاربینە.



ڕۆناهی

وێنەکرنا تیران ب هێلەکا زراڤ هاریکاریا تە دکەت بۆ دیارکرنا هەر شەش ئەنجامێن لێکدانێ یێن پێدڤی بۆ هەژمارکرنا سنووردارێ.

خالا چاڤدێریێ

3. سنووردارێ ڕێزکریێ $A=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \\ 10 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ بینەدەور.

دشیاندایە ڕێسایا گرامەر بێتە بەرفرەهکرن دا سیستەمێ هێلی 3×3 ب خۆڤە بگریت.

فێربە و شرۆڤەبکە

ڕێسایا گرامەر بۆ سیستەمێن 3 × 3

هەکەر سنووردارێ ڕێزکریێ هاوکۆلکەیان نە سفر بیت، سیستەمی دێ شیکارەکا ئێکانە هەبیت کو دبیتە:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

$$x=\frac{Dx}{D} \quad y=\frac{Dy}{D} \quad z=\frac{Dz}{D}$$

بتنێ ئێك شیکار هەیە

$$Dx=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ و } Dy=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ و } Dz=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

کو $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ هێمایی سنووردارێ هاوکۆلکەیان بیت.

هەکەر $D\neq 0$ سیستەمی دێ شیکارەکا ئێکانە هەبیت.

هەکەر $D=0$ و $Dx\neq 0$ یان $Dy\neq 0$ سیستەمێ ستەمە.

هەکەر $D=0$ و ئێك ژ سنووداران سفربیت، ئەو سیستەمە بێسنوورە.

نموونـــــە 4 بجهینانەك ل سەر خوارنێ

شارەزایەکێ خوارنێ، سیستەمەکێ خوارنێ بۆ یاریکەرێن تەپا پێی چێکر. پێدڤیە یاریکەر 3600 گەرمۆکان بمەزێخت و 750 g خوارنێ ڕۆژانە بخۆت. دڤێت گەرمۆکێن پرۆتین و رووبی ببنە 60% ژ سەرجەمێ گەرمۆکان. چەند گرام ژ پرۆتین و کاربوهیدرات و رووبی دڤێت د ڤی سیستەمیدا هەبن؟

گەرمۆك د گرامەکێدا	
خوارن	گەرمۆك
پرۆتین	4
کاربۆهیدرات	4
رووبی	9

p گرام ژ پرۆتینێ د سیستەمێ خوارنێدا هەنە، و c گرام ژ کاربۆهیدراتان و f گرام ژ رووبی.

$4p+4c+9f=3600$ سەرجەمێ گەرمۆکان

$p+c+f=750$ چەندیا خوارنا گشتی

$4p+0c+9f=2160$ گەرمۆکێن پرۆتین و رووبی یەکسانە $60\%(3600)=2160$

ئاگەهداریە!

ئاگاداری گرنگیا نەئیسینا 0 بە وەك هاوکۆلکە بۆ نەزانراوێ نەدیار.

$4p+0c+9f=2160$

$$Df=\begin{vmatrix}4&4&3600\\1&1&750\\4&0&2160\end{vmatrix}\text{،}Dc=\begin{vmatrix}4&3600&9\\1&750&1\\4&2160&9\end{vmatrix}\text{،}Dp=\begin{vmatrix}3600&4&9\\750&1&1\\2160&0&9\end{vmatrix}\text{،}D=\begin{vmatrix}4&4&9\\1&1&1\\4&0&9\end{vmatrix}=-20$$

$$f=\frac{Df}{D}=\frac{-2400}{-20}=120\text{ ،}c=\frac{Dc}{D}\frac{-7200}{-20}=360\text{ ،}p=\frac{Dp}{D}=\frac{-5400}{-20}=270$$

سیستەم $270\ g$ ژ پرۆتین و $360\ g$ ژ کاربۆهیدرات و $120\ g$ ژ رووني ب خۆڤە دگرت.

4. **دێ چ بیت هەکەر ... ؟** سیستەمێ رۆژانە پێدڤی ب مەزاختنا 3200 گەرمۆك و $700\ g$ ژ خوارنێ هەبیت. دڤێت ئەو گەرمۆکێن ژ کاربوهیدراتان دهێن ببنە 70% ژ سەرجەمێ گەرمۆکان. قی سیستەمی پێدڤی ب چەند گرامان ژ پرۆتین و کاربوهیدرات و رووني هەیە؟

هزربکە و گەنگەشێ بکە

1. رێزکریەکێ وەسف بکە کو سنووردار نەبیت.
2. چەوا دێ زانی کا هەرسێ سنووردار دێ چ لێ هێن، دەمێ ڕێسایا گرامەر بجهبینی ل سەر سیستەمەکی هێلی ژ دوو هاوکێشەیێن نەزانراو پێکهاتبیت، هەکەر ئێك ژ هاوکێشەیان دروست بیت ژ ئەنجامێ لێکدانا هاوکێشەیا دی ل ژمارەیەکی؟
3. رێکخەربە هێلکارێ خوارێ دوبارە بنقیسە و پاشی تمام بکە. ڕێسایا گونجایی د هەر چارچۆڤەیەکیدا بنقیسە.

	رێزکریێ 2 x2	رێزکریێ 3 x3
سنووردار		
ڕێسایا گرامەر		

4-3 ڕاهێنان

ڕاهێنانێن ئاراستەکری

1 **زاراڤ:** ڕامانا وێ چیە هەکەر ئێك ژ دانەیێن رێزکریێ هاوکۆلکەیان سفر بیت؟

بەرێ خۆ بدە نموونە 1 سنووردارێ رێزکریێ بینەدەر

2 $\begin{bmatrix}7&5\\9&2\end{bmatrix}$ **3** $\begin{bmatrix}1.5&0.25\\6&2.5\end{bmatrix}$ **4** $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{2}{3}\\\frac{3}{4}&-4\end{bmatrix}$ **5** $\begin{bmatrix}-3&40\\-5&66\frac{2}{3}\end{bmatrix}$

بەرێ خۆ بدە نموونە 2 ڕێسایا گرامەر بکاربینە بۆ شیکارکرنا سیستەمێ هێلی.

6 $\begin{cases}6x=2-y\\3x+1=2y\end{cases}$ **7** $\begin{cases}4x+y+6=0\\8x+2y=9\end{cases}$ **8** $\begin{cases}5x-2y=3\\2.5x-y=1.5\end{cases}$ **9** $\begin{cases}2y=2-x\\-3x+6y=-9\end{cases}$

نموونه 3

سنووردارى رێزكرىێ بينەدەر.

10 $P=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 4 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}$ 11 $S=\begin{bmatrix}0 & -5 & -1\\ 4 & 1 & 6\\ 2 & 0.5 & 3\end{bmatrix}$ 12 $E=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

نموونه 4

13 **مەزاختن:** هەتاڤێ 2kg ژ فستەقان و 1.5kg ژ باهیڤان و 3kg ژ بندەقان كرین، 28 420 دینار دان، هەڤالا وێ سۆلینێ 39 390 دینار دان بۆ بهایێ 4.5kg ژ فستەقان و 2kg ژ بندەقان. بهایێ كیلۆگرامەكێ ژ هەر جۆرەكی چەندە. هەكەر بزانی كو بهایێ كیلۆگرامەكا باهیڤان یەكسانە سەرجەمێ بهایێن كیلۆگرامەكا فستەقان و كیلۆگرامەكا بندەقان؟

ڕاهێنان و شیكاركرنا پرسیاران

ڕاهێنانێن ئازاد

بۆ شیكاركرنا بەرێ خۆ راهێنانان بدە نموونە

1	17–14
2	21–18
3	24–22
4	25

سنووردارێ رێزكرىێ بینەدەر.

14 $\begin{bmatrix}3 & -0.4\\ 5 & 0.3\end{bmatrix}$ 15 $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 16 $\begin{bmatrix}-\frac{2}{5} & 8\\ -\frac{1}{2} & 10\end{bmatrix}$ 17 $\begin{bmatrix}r & -1\\ -2r^2 & \pi r\end{bmatrix}$

ڕێسایا گرامەر بكاربینە بۆ شیكاركرنا سیستەمێ هێلی.

18 $\begin{cases}0.5x+6y=2\\ 0.25x+3y=0.5\end{cases}$ 19 $\begin{cases}x+2y=3.5\\ 3x-y=2.7\end{cases}$ 20 $\begin{cases}2x+y=3\\ x+\frac{y}{2}=2\end{cases}$ 21 $\begin{cases}3y-x=7\\ 2x+3y=-7\end{cases}$

سنووردارێ رێزكرىێ بینەدەر.

22 $A=\begin{bmatrix}2.5 & 1.5 & 0\\ 3.2 & 1 & -4\\ 6.4 & -5 & 2.1\end{bmatrix}$ 23 $L=\begin{bmatrix}-2.4 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 0.5\\ 0 & 3.5 & 1\end{bmatrix}$ 24 $W=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -5 & 0\\ 3 & 0 & 4\end{bmatrix}$

25 **بەژنزراڤی (رشاقة):** ئاراس ژمارەیا وان دەمژمێران تۆمار دكەت ئەوێن ب راهێنانێن وەرزشێڤە دبۆرینیت، و هەروەسا ژمارا گەرمۆكێن روژانە دسۆژیت. ئاراس چەند گەرمۆكان دسۆژیت د هەر دەمژمێرەكا دبۆرینیت ب ئەنجامدانا هەر جۆرەكێ راهێنانان؟ ڕێسایا گرامەر بكاربینە بۆ شیكاركرنێ.

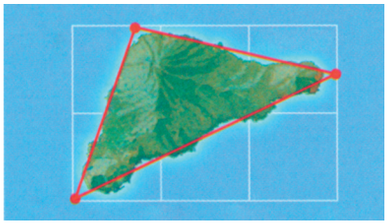
تۆمارا دەمژمێرێن راهێنانێن ئاراس				
	سواربوونا پایسكلێ	تەپا میزێ	مەلەڤانی	گەرمۆكێن سۆتی
دووشەمب	1.5 h	1h	0.75 h	1620
چار شەمب	0.75 h		1 h	915
ئەینی	1 h	1.5 h		1320

26 **زانست:** خشتەیێ ل خوارێ ، بارستەیێن گەردیلەیێن سێ بابەتان دیار دكەت. سیستەمەكی هاوكێشەیێن هێلی بنڤیسە. ڕێسایا گرامەر، بكاربینە بۆ دیاركرنا بارستەیێ گەردیلەیێ هەر ئێك ژ كاربۆن (C)، هایدرۆجین (H)، ئۆكسجین (O).

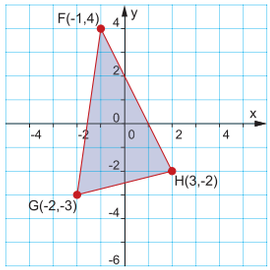
مادده	شێوەیێ وی	بارستەیێ گەردیلاوی
میثان	CH_4	16
گلسیرۆل	$C_3H_8O_3$	92
ئاف	H_2O	18

ئەندازە: ڕووبەرێ سێگۆشەیەكێ سەرێن وی: (x_1, y_1) و (x_2, y_2) و (x_3, y_3) یەكسانە ب بهایێ ڕووتێ سنووردارێ $A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$. ڤێ پێزانینێ بكاربینە بۆ شیكاركرنا هەردوو ڕاهێنانێن 26 و 27.

27 ڕووبەڕێ دۆرگەها (گرئاف) ل خوارێ بینەدەر.



28 ڕووبەڕێ سێگۆشەیا FGH بینەدەر.



29 **هزرکرنەکا ڕەخنەگر** بهایێ c چەندە ئەوێ سنووردارێ ڕێزکریێ هاوکۆلکەیێن سیستەمێ $\begin{cases} 2x+y=6 \\ cy=3-x \end{cases}$ یەکسان دکەن سفر. ڕۆنبکە چەوا تە دیت.

30 **ئینتەرنێت** ساییتەکێ ئنترنێتێ داخوازا هەلسەنگاندنا بابەتەکي کر، ب دانا خالەکێ یان دوو خالان یان 3 خالان. ژمارەیا کەسێن ب هەلسەنگاندنێ رابووین 38 کەس بوون، و ژمارەیا ئەوێن 3 خال داین دوو جاراني وان بوو ئەوێن ئێك خال داین. ژمارەیا کەسێن هەر هەلسەنگاندنەك دایي چەند بوو، بۆ زانین ژمارەیا گشتي یا خالان 85 بوو.

سنووردارێ هەر ڕێزکریەکێ x بینەدەر .

31 $A=\begin{bmatrix} x & x-1 \\ x+1 & x \end{bmatrix}$

32 $B=\begin{bmatrix} x-2 & x+2 \\ x+2 & x+6 \end{bmatrix}$

33 $C=\begin{bmatrix} 6x^2 & -6x+2x^2 \\ 3x & x-3 \end{bmatrix}$

34 **کانزاییێن بها گران:** پارچەیەکا بچووك ژ پارەیێ زیڤی دبیتە 2.268 g و گرانیاپارچەیەکا مەزن دبیتە 5 g . ئومێدی 425 پارچە ژ هەردوو جۆران هەبوون. گرانیا هەموان پێکڤە ، 1483 g بوو.

أ ئومێدی چەند پارچە ژ هەر جۆرەکی هەنە؟

ب بهایێ پارچەیێن زیڤی چەندە، هەکەر بهایێ پارچەیا بچووك 30 000 دینار بیت و بهایێ پارچەیا مەزن 72 000 دینار بیت؟

35 کۆمەڵەیەکا ژ 6 مەزن و 3 زارۆکان سەرا باغچەیێ گیانداران دا، و 48 000 دینار دان. لێ کۆمەڵەیەکا ژ 2 مەزن و 10 زارۆکان، 52 000 دینار دان. نەزانراوێ x بکاربینە بۆ بهایێ پلێتا زارۆکی و نەزانراوێ y بۆ بهایێ پلێتا یێ مەزن.

أ سیستەمەکی هاوکێشەیان بنڤێسە، دەربڕینێ ژ پرسیارێ بکەت.

ب ڕێزکریێ هاوکۆلکەیان بنڤیسە و سنووردارێ وێ بهەژمێرە؟

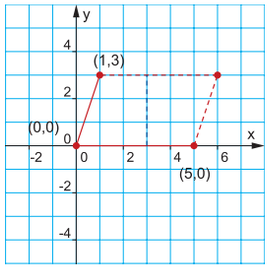
ج چەند شیکار بۆ پرسیارێ هەنە؟

د ڕێسایا گرامەر بکاربینە بۆ دەرئینانا بهایێ هەردوو نەزانراوان.

هـ بهایێ پلێتا چۆنەژۆر بۆ مەزنان چەندە؟ و بهایێ پلێتا چۆنەژۆر بۆ زارۆکان چەندە؟

36 **بنڤیسە** چەوا دێ ساخکەی کو هاوریژەیەك یا دروستە؟ و چەوا دێ ساخکەی کو سنووردارێ ڕێزکریێ 2×2 دبێتە سفر. بەروارد بکە.

37 **پێنگاڤێن جۆراوجۆر:** هەردوو خالێن $(5, 0)$ و $(1, 3)$ دبنە دوو سەرێن لاتەریبەکێ، کو سەرەکێ وی دبیتە خالا بنەڕەت د ڕووتەختێ پۆتانیدا، وەکی دیار ل وێنەیێ بەرامبەر:



أ ڕووبەری لاتەریبێ بینەدەر.

ب هەردوو خالان ب ڕێز د $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$ دانە، وبهایێ ڤی سنووراری بهەژمێرە. چ پەیوەندی دناڤبەرا بهایێ ڤی سنووراریێ و ڕووبەرێ لاتەریبێدا هەیە؟

ج دڕێژی و پانیا لاتەریبی بگوهۆڕە، پاشی ڕووبەر و بهایێ سنووراری بهەژمێرە. ئەرێ ئەو پەیوەندیا تە دیتی، دناڤبەرا سنووردەر و ڕووبەریدا، دێ وەکی خو مینیت؟

د هەردوو خالێن د پرسیارا (ب) دا پێکبگوهۆڕە، کو خالا (x_1, y_1) ببیتە خالا$(1, 3)$ ڕووبەر و سنووراری بینەدەر. کارتێکرنا ڤێ پێکگوهۆڕینێ ل بهایێ سنووراری چییە؟

ئامادەکرن بۆ ئەزموونێ

38 کیژ وەسف یا دروستە ل سەر سیستەمێ هێلی : $\begin{cases} 3x = y - 1 \\ x + 2y = 16 \end{cases}$ ؟

أ بێسنوورە؛ ژمارەیەکا بێسنووڕە ژ شیکاران هەیە

ب ستەمە؛ گەلەك شیکار هەنە

ج ستەمە؛ چو شیکار نینن

د سنووردارە؛ شیکارەك ب تنێ هەیە

39 کیژ ڕێزکرێ سنووراریێ وێ دبیتە 1 ؟

أ $\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} 3 & -11 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ج $\begin{bmatrix} -3 & 11 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

40 **بەرسڤەکا کورت:** بهایێ x بینەدەر، بۆ زانین $\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 25$

بەرهنگاری و بەرفرەهکرن

41 مگرتی ئێك ژ ستوون یان ڕێزێن ڕێزکریێ 3×3 ژ سفران پێکدهێت. کارتیکرنا وێ ل سەر سنووراریێ وێ چییە؟

42 بهایێ a و b و c بینەدەر، هەکەر $x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{5}$ و $y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & a \\ b & c \end{vmatrix}}{5}$.

43 **شارستانی:** ڕاپرسینەك هاتەکرن ل سەر ئاکنجیێن باژێرەکێ هاتیە دابەشکرن بۆ دوو پشکان، باشوور و باکوور، ژ بۆ داناندا پەیکەرەکی ل گۆرەپانا باژێری. خشتەیێ بەرامبەر، ئەنجامێن ڕاپرسینێ ب ڕێژەیێن سەدی دیار دکەت. چەند وەلاتیان ژ پشکا باشووری دەنگێ خە دا، بۆ زانین ژمارەیا دەنگدەران 4 826 بوو.

ئەنجامێن ڕاپرسنێ		
بشك	دگەل پەیکەری	دژی وی
باکوور	47%	53%
باشوور	85%	15%
سەرجەم	49%	51%

پێداچوونا لوولپێچی

44 **مەزاختن**: ساڤانێ 135 000 دینار هەبوون وەکی چۆیە د جهێ فرۆتنا پێلاڤان دا، و پێلاڤەك دیت کو بهایێ وێ ب ڕێژەیا 25% هاتیە کێمکرن. لاسەنگەیەکێ بنڤیسە کو بهایێ بنەڕەت یێ پێلاڤێ ئەوێ لاسەنگەیێ ساخبکەت، بو زانین ساڤانێ ئەو پێلاڤ کڕی. (پوولێن پێشتر)

سیستەمێ هاوکێشەیان ب لجهدانانێ شیکار بکە (پوولێن پێشتر)

45 $\begin{cases} x = \frac{1}{3}y \\ 6x - 6y = 16 \end{cases}$ **46** $\begin{cases} x + y = -5 \\ 2x - y = -7 \end{cases}$ **47** $\begin{cases} 2x = y \\ 4x + y = -2 \end{cases}$

ڕیزکریەکێ بکاربینە بۆ گوهۆڕینا چەندلایێ *DEFG* کو *D*(1, 1) و *E*(4, −2) و *F*(−2, −3) و *G*(−1, −1) . (وانەیا 3−3)

48 ڕاکێشان 5 یەکە بۆ ڕاستێ، و 3 یەکە بۆ سەری.

49 وێنەدانەوە ل دۆر تەوەرێ ئێکێ.

50 ڕاکێشان یەکەیەکێ بۆ چەپێ ، و دوو یەکەیان بۆ خوارێ.

51 هاوڕێژەیەکا ئەندازەیی ڕێژەیا وێ 3 بیت.

بەشێ 3

ئەزموونێن نیڤا بەشی

3–1 ڕێزکری و پێدایی

خشتەی بکاربینە بۆ شیکارکرنا راهێنانان ژ 1 هەتا 4

سیفەتێن مەدالیێن یارییێن ئۆلومپی			
	زێڕ	زیڤی	برۆنز
گرانی	567 gr	567 gr	453.6 gr
مس	7.5	7.5	90
ژمارەیا دەمژمێرێن دروستکرنێ	19.65	18.30	18.45

1 ڕیزکریێ M بکاربینە بۆ نمایشکرنا پێدایێن خشتەی.

2 جۆرێ (خانەیا) ڕیزکریێ M چییە؟

3 بهایێ M_{32} چەندە؟ ئەڤ بهایە چ دنوێنیت؟

4 ناڤونیشانێ دانەیێ 90 چییە؟

ڕێزکریێن ل خوارێ بکاربینە بۆ شیکارکرنا راهێنانان ژ 5 هەتا 8

$$A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 1 & -2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\ ،\ B=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}\ ،\ C=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\\ 5 & -1\end{bmatrix}\ ،\ D=\begin{bmatrix}5 & 1 & -1\\ -1.5 & 2 & -2\end{bmatrix}$$

5 $A+C$ 6 $2B$ 7 $C-D$ 8 $C-3A$

3–2 لێکدانا ڕێزکریان

جۆرێن ڕێزکریێن $P_{5\times2}$ ، $Q_{2\times5}$ ، $R_{1\times5}$ ، $S_{5\times2}$ بکاربینە بۆ شیکارکرنا ڕاهێنانان ژ 5 هەتا 8 . بێژە هەکەر ئەنجامێ لێکدانێ پێناسەکری (دشیاندا) بیت، و جۆرێ وی بنڤیسە هەکەر وەسا بیت

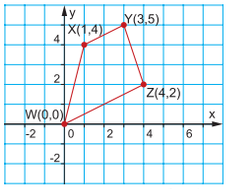
9 PQ 10 QR 11 RS 12 SP

ڕێزکریێن ل خوارێ بکاربینە بۆ شیکارکرنا راهێنانان ژ 13 هەتا 16

$$E=\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ 5 & 3 & 0\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix}\ ،\ F=\begin{bmatrix}0.5 & 0.75 & -1\end{bmatrix}\ ،\ G=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}\ ،\ H=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

13 EF 14 FH 15 HG 16 G^2

3–3 جهگۆهۆرکیا ئەندازەیی بکارئینانا ڕێزکرییان



پۆتانێن سەرێن وێنەیێ چارلایی ب جهگوهۆرکا ئەندازیی بینەدەر. ڤی وێنەی بکێشە.

17 ڕاکێشان ب ئێك یەکە بۆ چەپێ و دوو یەکان بۆ خوارێ.

18 بچووککرن ب ڕێژەیا $\frac{2}{3}$

19 جهگوهۆرکیا ڕێزکریێ ب $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ ، جۆری وێنەی دیاربکە.

20 جهگوهورکیا ڕێزکریی ب $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ جۆری وێنەی دیاربکە

21 جهگوهۆڕکیا ڕێزکریی ب $\begin{bmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ جۆری وێنەی دیاربکە

3–4 سنووردار

سنووردارێ ڕێزکریێ بینەدەر.

22 $\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ 23 $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 3 & \frac{4}{5}\end{bmatrix}$ 24 $\begin{bmatrix}0.5 & 1.2\\ -0.2 & 2.0\end{bmatrix}$ 25 $\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & -2 & 1\\ 4 & 4 & 1\end{bmatrix}$

شیکار بکە بکارئینانا ڕێسایا گرامەر.

26 $\begin{cases}2x+3y=5\\ y=1-x\end{cases}$ 27 $\begin{cases}x-y=2\\ y-x+4=0\end{cases}$ 28 $\begin{cases}2x-y+z=3\\ 3x+2y=2z+1\\ z=x+2\end{cases}$

5-3 هەلگەڕاوێ ڕێزکریێ
Matrix Inverse

ئارمانج
- بڕیارێ دێ دەن کا ڕێزکریێ هەلگەڕاو هەیە یان نە.
- سیستەمەکێ هاوکێشەیێن هێلی دێ شیکارکەن بکارئینانا هەلگەڕاوێ ڕێزکریێ.

کێ ئەقێ بکاردئینیت؟
ئەوێن کارێ پێکئینان و ڤەکرنا جفرەیان دکەن، ڕێزکریان بکاردئینن دا نهێنییا نامەیان بپارێزن (نموونە 4)

زاراڤ
Vocabulary

هەلگەڕاوێ ڕێزکریێ
Matrix inverse

هاوکێشەیا ڕێزکریێ
Matrix equation

ڕێزکریێ نەزانراوان
Variable matrix

ڕێزکریێ نەگۆران
Constant matrix

تو دشێی نامەیەکێ ب جفرێ بنڤیسی بکارئینانا ڕێزکریان. ئەوێ نامە دگەهتێ دێ کریارەکا بەروڤاژی بکارئینیت دا جفرێ ڤەکەت و نامێ بخوینیت.

دا کو ڕێزکرییەکێ هەلگەڕاو هەبیت، دڤێت ئەو ڕێزکریی چارگۆشەیی بیت. لێ ئەڤ مەرجە ب تنێ ژی نە بەسە، چونکی هندەك ڕێزکریێن چارگۆشەیی هەنە، هەلگەڕاو نینە. هەکەر ئەنجامێ لێکدانا ڕێزکریێ A دگەل ڕیزکریێ B یەکسانبیت ڕێزکریێ یەکێ I ، دێ $AB=BA=I$. ل ڤی حالەتی دێ بێژنە ڕێزکریێ B **هەلگەڕاوێ ڕیزکریێ** A **Matrix Inverse**. هێمایێ وێ دێ بیتە A^{-1} .

نموونـــــە 1 دیارکرنا هەکەر ڕێزکرییەك هەلگەڕاوێ ڕێزکریەکێ دی بیت

دیاربکە هەکەر ڕێزکریێ **B** هەلگەڕاوێ ڕێزکریێ **A** بیت .

أ $A=\begin{bmatrix}2&0&1\\4&1&2\\2&0&4\end{bmatrix}$ ؛ $B=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{6}\\-2&1&0\\-\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

$$AB=\begin{bmatrix}2&0&1\\4&1&2\\2&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{6}\\-2&1&0\\-\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I$$

ژبەر ئەنجامێ لێکدانێ دبیتە ڕێزکریێ یەکێ، لەوما ڕێزکریێ B دبیتە هەلگەڕاوێ ڕێزکریێ A یە.

ب $A=\begin{bmatrix}2&3\\7&10\end{bmatrix}$ ؛ $B=\begin{bmatrix}-10&6\\7&-4\end{bmatrix}$

$$AB=\begin{bmatrix}2&3\\7&10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-10&6\\7&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$$

پشتبەستن ب ئەڤا بۆری، ڕێزکریێ B هەلگەڕاوێ ڕێزکریێ A یە.

ل بیرا تەبیت

ڕێزکریێ یەکێ ژ جۆرێ n دبیتە ڕێزکرییەکی چارگۆشەی ژ جۆرێ n ئەوێ هەموو دانەیێن وێ دبنە 0 . ژبلی دانەیێن تیرەیێ سەرەکی کو هەموو دبنە 1 . ڕیزکریێ یەکێ ژ جۆرێ 3 دبییتە:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

خالا چاڤدێریێ

1. دیاربکە هەکەر ڕێزکریێ A هەلگەڕاوێ ڕێزکریێ B بیت.

$$A=\begin{bmatrix}-1&0&2\\4&1&-1\\2&0&1\end{bmatrix}\text{ ، }B=\begin{bmatrix}-0.2&0&0.4\\1.2&1&-1.4\\0.4&0&0.2\end{bmatrix}$$

فێربە و بیربکەرەوە

هەلگەڕاوێ ڕێزکرێ چارگۆشەیی ژ جۆرێ 2

هەکەر سنووردارێ ڕێزکرێ $M=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ یەکسان نەبیت سفر، ئێ ڕێزکرێ دێ هەلگەڕاوەك هەبیت ئەو ژی $M^{-1}=\frac{1}{|M|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

ڕێزکرێ سنووردارێ وێ سفر بیت، هەلگەڕاو نینە.

نموونـــــە 2 دەرئینانا هەلگەڕاوێ ڕێزکریەکی چارگۆشەیی ژ خانەیا دوو

هەلگەڕاوێ ڕێزکرێ بینەدەر هەکەر هەبیت.

أ $M=\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

دەست ب هەژمارکرنا سنووردارێ بکە.

$$|M|=\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=(-2)(-4)-2\times 3=2\neq 0$$

چونکی سنووردارێ ڕێزکرێ نە یەکسانە سفر، دێ هەلگەڕاو هەبیت ، ئەو ژی :

$$M^{-1}=\frac{1}{|M|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}$$

ب $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$

دەست ب هەژمارکرنا سنووردارێ بکە

$$|A|=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ 3 & 12 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\times 12-2\times 3=0$$

چونکی سنودرارێ ڕێزکرێ یەکسانە سفر، ڕێزکرێ هەلگەڕاو نینە.

ڕۆناهیەك

بۆ بدەستکەفتنا ڕێزکرێ ژ ڕێزکرێ $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ ، ئالۆگۆڕێ بکە ل ناڤبەرا دانەیێن a و d د نیشانێن هەردوو دانەیێن دی بەرۆڤاژی بکە.

خالا چاڤدێریێ

2. هەلگەڕاوێ ڕێزکرێ بینەدەر $C=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$.

تو دشێی ڕێزکرییان بکاربینی بۆ شیکارکرنا سیستەمەکێ هاوکێشەیێن هێلی. بکارئینانا ڕێزکرییان، دێ شیکارکرنا سیستەمێ هاوکێشەیان گوهۆڕی بۆ کردارەکا وەکی شیکارکرنا هاوکێشەیێن هێلی وەك $x=20$ 5 . ب ڕێیا لێکدانا هەردوو لایێن هاوکێشێ ل هەلگەڕاوێ هاوڵکەیێن 5 ، ئانکو ل $\frac{1}{5}$.

بۆ ئەنجامدانا ڤی کاری، دێ سیستەمێ هاوکێشەیان گوهۆرن بۆ **هاوکێشەیەکا ڕێزکری** $AX=B$ **Matrix equation** ، کو A هێمایێ هاوکۆلکێن سیستەمی یە، و X هێمایێ **ڕێزکریێ نەزانراوان** **Variable matrix** بیت. هەروەسا B هێمایێ **ڕێزکریێ نەگۆڕاوانە** **Constant matrix**.

هاوکێشەیا ڕێزکری ئەوا سیستەمێ هەردوو هاوکێشەیێن هێلی دنوێنیت: $\begin{cases} x+y=8 \\ 2x+y=1 \end{cases}$

$$A \bullet X = B$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ڕێزکریێ هاوکۆلکەیان ← ڕێزکریێ نەگۆڕاوان

ڕێزکریا نەزانراوان

بۆ شیکارکرنا هاوکێشەیا ڕێزکری $AX=B$ ، هەردوو لایێن هاوکێشەیێ ل هەلگەڕاوێ ڕێزکریێ A بدە (وەسا دانە کو هەیە): $A^{-1}AX = A^{-1}B$

$IX = A^{-1}B$

$X = A^{-1}B$

ئەنجامی لێکدانا ڕێزکریێ A ل هەلگەڕاوێ وێ دبیتە ڕێزکریێ یەکێ I

نموونـــــە 3

شیکارکرنا سیستەمێ هاوکێشەییێن هێلی بکارئینانا هەلگەڕاوێ ڕێزکریێ

هاوکێشەیا ڕێزکریێ بنقیسە ئەوا سیستەمێ هێلی دنوێنیت $\begin{cases} x+y=8 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ و پاشی شیکاربکە.

پێنگاڤا (1)ێ هاوکێشەیا هێلی بنقیسە ئەوا سیستەمێ هەردوو هاوکێشەیان دنوێنیت.

$$\begin{matrix} A & X & = & B \end{matrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

پێنگاڤا (2)ێ سنووردارێ ڕێزکریێ هاوکۆلکەیان بینەدەر.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\times1 - 1\times2 = -1 \neq 0$$

پێنگاڤا (3)ێ هەلگەڕاوێ ڕێزکریێ هاوکۆلکەیان بینەدەر.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

پێنگاڤا (4)ێ شیکاربکە.

$$\begin{matrix} X = & A^{-1} & B \end{matrix}$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 15 \end{bmatrix}$$

ڤێجا شیکارا وێ دبیتە: $x=-7$ و $y=15$.

ئاگەهداریە!

چونکی لێکدانا ڕێزکریان نە ئاڵۆگۆرە، لەوما پێدڤییە ب هەمان ڕێزکرنێ هەلگەڕاوی دگەل هەردوو لایێن یەکسانێ بدەن. دقێت A^{-1} یا ئێکێ بیت ل لایێ چەپێ ل هەردوو لایان.

خالا چاڤدێریێ

هاوکێشەیا هێلی ئەوا سیستەمێ $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+3y=9 \end{cases}$ دنوێنیت بنقیسە و شیکاربکە.

ئاگەهداریە !

هەکەر ژمارەیا دانەییێن ئێك ل دویڤ ئێکێ کت بوو، پێدڤییە 0 ئ ل دووماهییا وێ زێدە بکەن، دا دانەییێن وێ ببنە جوّت و پاشی ببیتە ڕێزکراو.

ئەوان ڕێزکرییێن هەلگەڕاو هەبن، د جفرەکرنا نامایاندا دهێنە بکارئینان. وەسا دانە تە ئەف نامە هەیە: (بەیانی زەماوەندە). قوناغا ئێکێ د کردارا جفرەکرنێدا ئەوە، پێتان بگوهۆڕن بۆ ژمارەییێن ئێك ل دویڤ ئێك، بکارئینانا خشتەیێ جفرەکرنێ. هەر پیتەك ب ژمارەیەکێ دهێتە گوهۆڕین (فرێکەر و وەرگر دێ هەر وی خشتەی بکارئینن). تو دشێی خشتەیێ بەرامبەر بکاربینی، کو هێمایێ ـــــ دبیتە ڤالاهی دناڤبەرا دوو پەیڤاندا. دەست ب نڤیسینا نامێ بکە و پیت پیت بنقیسە، ل گەل بکارئینانا هێمایێ ـــــ دناڤبەرا پەیڤاندا.

ب	ە	ی	ا	ن	ی	ـــــ	ز	ە	م	ا	و	ە	ن	د	ە
4	3	33	2	28	33	0	14	3	27	2	30	3	28	11	3

25	ل	13	ڕ	1	ئ
26	ڵ	14	ز	2	ا
27	م	15	ژ	3	ە
28	ن	16	س	4	ب
29	ھ	17	ش	5	پ
30	و	18	ع	6	ت
31	وو	19	غ	7	ج
32	ۆ	20	ف	8	چ
33	ی	21	ڤ	9	ح
34	ێ	22	ق	10	خ
0	ـــ	23	ك	11	د
		24	گ	12	ر

وێ ئێك ل دویڤ ئێکێ بنقیسە د ڕێزکرییەکی ژ دوو ڕێزان ژ ڕاستێ بۆ چەپێ. چونکی هەژمارا ئەڤان ژمارەیان کتە، دقێت تو **0** ئ ل دوماهیا ڕێزکریێ زێدە بکەی. پشتی ب دووماهیك بێی، دێ ئەف ڕێزکریە ب دەست تە کەڤیت:

$$A = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 33 & 28 & 2 & 33 & 3 & 4 \\ 3 & 11 & 28 & 3 & 30 & 2 & 27 & 3 \end{bmatrix}$$

ڤەکرنا جفرەیا ڤێ نامێ نە یا ب زەحمەتە. لەوما فرێکەرێ نامێ، ڕێزکرییەکی چارگۆشەیی کو هەلگەڕاو هەبیت بکاردئینیت بۆ ڤەشارتنا ئێك ل دویڤ ئێکا ژمارەیان، بەری فردکەت. و وەرگرێ نامێ بەرۆڤاژیێ ڤێ ڕێزکریێ بکاردئینیت دا وێ ڤەشارتنا ل سەر ئێك ل دویڤ ئێکا ژمارەیان ڕاکەت. ڕێزکریێ ڤەشارتنێ $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ بکاربینە و ل ڕێزکریێ A بدە، دێ ئەڤە ب دەست تە کەڤیت.

$$B = MA \begin{bmatrix} 45 & 11 & 127 & 87 & 36 & 101 & 36 & 15 \\ 76 & 22 & 221 & 146 & 70 & 169 & 69 & 26 \end{bmatrix}$$

فرێکەر دێ قێ ئێك ل دویڤ ئێکا ژمارەیان فرێکەت.

76 22 221 146 70 169 69 26 45 11 127 87 36 101 36 15

دڤێت وەرگر ئەڤێ ئێك ل دویڤ ئێکێ د ڕێزکریەکی ژ دوو ڕێزان ژ ڕاستێ بۆ چەپێ بنڤیست، دێ ئەڤ ڕێزکرییە ب دەست کەڤیت.

$$C = \begin{bmatrix} 45 & 11 & 127 & 87 & 36 & 101 & 36 & 15 \\ 76 & 22 & 221 & 146 & 70 & 169 & 69 & 26 \end{bmatrix}$$

پاشی هەلگەڕاوێ M دێ ل C دەت. هەلگەڕاوێ M دبیتە $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ = M^{-1} وئەنجامێ لێکدانێ $M^{-1}C$ دبیتە:

$$A = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 33 & 28 & 2 & 33 & 3 & 4 \\ 3 & 11 & 28 & 3 & 30 & 2 & 27 & 3 \end{bmatrix}$$

پێدڤییە نوکە وەرگر دانەیێن ڕێزکریێ ب دەست کەفتی، د ئێك ل دویڤ ئێکەکێدا بنڤیست ژ لایێ ڕاستێ یێ ڕێزا ئێکێ. دێ ئەڤە ب دەست کەڤیت.

3 11 28 3 30 2 27 3 14 0 33 28 2 33 3 4

ل دوماهیێ، ل ژێر هەر ژمارەیەکێ، دێ وێ پیتا بەرامبەر وی نڤیست ئەوا د خشتەیێ جفرەکرنێدا هاتی.

3 11 28 3 30 2 27 3 14 0 33 28 2 33 3 4

ب ە ی ا ن ی ـــــ ز ە م ا و ە ن د ە

نامە دێ هێتە خواندن : بەیانی زەماوەندە

نموونـــــە 4 بجهێنانەك ل سەر جفرەکرنێ

ئەڤ نامەیە گەهشتە هەژاری ژ لاوینێ هەڤالێ وی

119 63 36 15 9 25 85 51 33 11 6 25 . لاوین و هەژار، ڕێزکریێ ڤەشارتنێ:

$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ **بکاردئینن. نامەیا لاوینی چ بوو ؟**

پێنگاڤا (1)ێ بەروڤاژی ڕێزکریێ M بینەدەر.

$$M^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

پێنگاڤا (2)ێ نامەیا گەهشتییە هەژاری، ژ ڕاستێ بۆ چەپێ بنڤیسە، ل سەر شێوەیێ ڕێزکریێ بنڤیسە.

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 9 & 15 & 36 & 63 & 119 \\ 25 & 6 & 11 & 33 & 51 & 85 \end{bmatrix}$$

پێنگاڤا (3)ێ $M^{-1}A$ بهەژمێرە.

$$M^{-1}A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 9 & 15 & 36 & 63 & 119 \\ 25 & 6 & 11 & 33 & 51 & 85 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 25 & 0 & 3 & 27 & 27 & 17 \\ 0 & 3 & 4 & 3 & 12 & 34 \end{bmatrix}$$

پێنگاڤا (4)یێ ڕێزکرییێ ل سەر شێوەییێ ئێك لدویڤ ئێکەکا ژمارەیی بنڤیسە.

0 3 4 3 12 34 25 0 3 27 27 17

پێنگاڤا (5)یێ جفرەکرنا نامێ ڤەکە.

0 3 4 3 12 34 25 0 3 27 27 17

ش م م ە ـــــ ل ێ ر ە ب ە ـــــ

نامەیا لاوینی دبیتە: شەممە لێرەبە.

خالا چاڤدێرییێ

4. ڕێزکرییێ ڤەشارتنێ $M = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ بکاربینە بۆ ڤەکرنا جفرەیا نامەیا ل خوارێ:

0 20 60 27 36 12 0 46 148 69 75 31

هزربکە و گەنگەشێ بکە

1. چ ئەنجام دێ بۆ تە دەرکەڤیت ژ ڕێزکرییێ A ، هەکەر بزانی کو ئەوێ هەلگەڕاو هەیە ؟

2. هەلگەڕاوێ ڕێزکرییێ یەکێ چییە؟

فێربە

3. **ڕێکخەربە** خشتەی کۆپیبکە و تەمامبکە. بەراوردیێ بکە د ناڤبەرا هەلگەڕاوێ ڕێزکرییێ وهەلگەڕاوێ ژمارەیەکا ڕاستی دا بکە.

ڕێزکری	ژمارەییێن ڕاستی	
		نڤیسین ل گەل نموونەیەکێ
		چەوا دێ هێمایی بۆ هەلگەڕاوێ ڕێزکرییێ یان هەلگەڕاوێ ژمارەیەکێ دانی؟
		سیفەتێ ئالوگۆڕێ

5-3 ڕاهێنان

ڕاهێنانێن ئاراستەکری

1 **زاراڤ:** چەوا سیستەمەکێ ژ دوو هاوکێشەییێن هێلی ب دوو گۆڕاوان دێ نڤیسی ل سەر شێوەییێ ڕێزکرییێ.

بۆیێ خۆ بدە نموونە 1 بێژە هەکەر ڕێزکرییێ ئێکێ ببیتە هەلگەڕاو بۆ ڕێزکرییێ دووێ.

2 $\begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **3** $\begin{bmatrix} 3 & 12.5 & 3 \\ -1.6 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & -10 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 1 \\ 1.2 & 0 & 0.8 \\ -1.6 & 0.2 & -1 \end{bmatrix}$ **4** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

بۆیێ خۆ بدە نموونە 2 هەلگەڕاوێ ڕێزکرییێ بینەدەر هەکەر هەبیت؟

5 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ **6** $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ **7** $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 3 \\ \frac{3}{2} & 9 \end{bmatrix}$ **8** $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ **9** $\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$

بەڕێ خۆ بدە نموونە 3

سیستەمێ هاوکێشەیان ل سەر شێوەیێ ڕێزکریێ بنڤیسە.

10 $\begin{cases} 3x-y=5 \\ y=2x-4 \end{cases}$ 11 $\begin{cases} 5x+9y=1 \\ 2-4x-7y=4 \end{cases}$ 12 $\begin{cases} 2x+4y=3 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$

بەڕێ خۆ بدە نموونە 4

13 **جفرە** نامەیەك گەهشتە سیروانی ز ئامانجێ هەڤالێ وی، و دەمێ هەڤدیتنا خو تێدا دیار کربوو: نامە ژی ئەڤە بوو : 93 6 34 105 85 126 221 14 82 255 199 298 . سیروانی ڕێزکریێ $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ بکارئینابوو بۆ ڤەشارتنێ. دەمێ هەڤدیتنا وان چەندە؟

ڕاهێنان و شیکارکرنا پرسیاران

ڕاهێنانێن ئازاد

بۆ شیکارکرنا پرسیاران	بەڕێ خۆ بدە نموونە
16–14	1
21–17	2
24–22	3
25	4

بێژە هەکەر ڕێزکریێ ئێکێ ببیتە هەلگەڕاوێ ڕێزکریێ دووی؟

14 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 15 $\begin{bmatrix} -\frac{16}{15} & -\frac{4}{15} \\ -\frac{2}{15} & -\frac{8}{15} \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -2 \end{bmatrix}$ 16 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.2 & -0.2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

هەلگەڕاوێ ڕێزکریێ بینەدەر هەکەر هەبیت.

17 $\begin{bmatrix} -0.25 & -0.5 \\ -1.5 & -2 \end{bmatrix}$ 18 $\begin{bmatrix} 7 & 14 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ 19 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ 20 $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ 21 $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 7 & 11 \end{bmatrix}$

سیستەمی ل سەر شێوەیێ ڕێزکریێ بنڤیسە.

22 $\begin{cases} x-y=5 \\ 2y-x=6 \end{cases}$ 23 $\begin{cases} x+2y=6 \\ 2x+y=9 \end{cases}$ 24 $\begin{cases} 4x+7y=10 \\ 3x+5y=9 \end{cases}$

25 **جفرە** نامەیەك گەهشتە ئاری ژ هەڤالێ وی ئالانی، و ناڤێ وی باژێرێ لێ دژیت بۆ دیارکربوو نامە ئەڤە بوو: 14 40 33 6 43 3 62 59 167 136 27 198 15 277

ڕێزکریێ بۆ ڤەشارتنێ بکارئینایی ئەڤە بوو: $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. ناڤێ باژێرێ وی چ بوو ؟

26 **گونجاندن** هەتاڤێ سێ جۆرێن فێقی بەراوردکرن. هاوکێشەیەکا ڕێزکریێ بنڤیسە، پاشی شیکاربکە دا بهایێ ئێك کیلۆگرام ژ حولیك و خۆخ و هرمیکان بینیەدەر.

27 **پێنگاڤێن جۆراوجۆر** یانەیا بابل گەشتەکا دەریایێ ڕێکخست و 7 بەلەم ژ دوو جۆران بکارئینان. جۆرەکی مەزن کو تیرا 6 کەسان دکەت و جۆرەکی بێن دوو کەسی. ژمارێا گەشتیاران 34 بوون. سیستەمێ هێلی $\begin{cases} 6x+2y=34 \\ x+y=7 \end{cases}$. دەربڕینێ ژ قێ پرسیارێ دکەت، کو x ژمارەیا بەلەمێن مەزنە و y ژمارەیا بەلەمێن بچووکە.

أ ڕێزکریێ هاوکۆلکەیان بنڤیسە؟

ب سیستەمێ بۆری ل سەر شێوەیێ ڕێزکریێ بنڤیسە؟

ج هەلگەڕاوێ ڕێزکریێ هاوکۆلکەیان بنڤیسە ؟

د هاوکێشەیا ڕێزکریێ شیکاربکە دا ژمارەیا بەلەمان ژ هەر جۆرەکی بینیەدەر؟

28 **هزرکەنەکا پەخنەگر:** چ پەیوەندی دناڤبەرا ڕێزکریێ و هەلگەڕاوێ وێ و ڕێزکریێ یەکێ هەیە؟

29 هەکار نامەیەك جفرەکر و ڤیا بۆ هەڤالەکێ خۆ ڤرێکەت. نامەیا جفرەکری د ڕێزکریێ C دا نڤیسی و ڕێزکریێ M بۆ ڤەشارتنا وێ بکارئینا. نامەیەکا جفرەکری و ڤەشارتی D دەستکەفت. چ مەرج دێ ل بەرچاڤ هێتە وەرگرتن بۆ جۆرێن ڤان ڕێزکریان؟

30 **شاشی د شرۆڤەکرنێدا** هەر ئێك ژ شڤان و ساڤان هەلگەڕاوێ ڤێ ڕێزکریێ $M=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}$ هەژمارکر. کێ ژ وان شاشی کر؟ شاشیێ دیار بکە .

أ

شڤان $M^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{5}{2} & \frac{3}{2}\\ 2 & -1\end{bmatrix}$

ب

ساڤان $M^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}$

31 **بۆ خۆشیێ:** بابێ تە گۆتە تە: 5000 دینار ژ جۆرێن 50 دیناری و 100 دیناری د بەریکا من دانە، و هەکەر بزانی هەر جۆرەك چەند پارچەنە، دێ دەمە تە. و دا بۆ ساناهی بکەت، گۆت : ژمارەیا هەموو پارچەیان دبیتە 73 پارچە، هەلگەڕاوێ ڕێزکریەکێ بکاربینە دا 5000 دیناران قازانج بکەی.

32 **ئاڤ:** باژێرڤانیا باژێرەکی، بۆرییەکا ئاڤێ ل باغچەیەکێ گشتی دانا، دا گەشتیاربکاربینن. ئەو بۆرییە 24 دەمژمێران د ڕۆژەکێدا کار دکەت،و دشیاندایە ب سێ لەزاتییان بهێتە بکارئینان: هێدی و ناڤنجی و بلەز. خشتێ ل خوارێ پێدایێن کارکرنا بۆرییێ د دەمێ سێ ڕۆژاندا دیار دکەت. هەرسێ لەزاتییێن ڕێتنا ئاڤێ ب کیلۆلیترێ بینەدەر.

	هێدی (ژمارەیا دەمژمێران)	ناڤنجی (ژمارەیا دەمژمێران)	بلەز (ژمارەیا دەمژمێران)	چەندانی (کیلو لیترەر)
ئێکشەمب	15	7	2	199
دووشەمب	16	4	4	208
سێشەمب	12	8	4	236

33 **دێ چ بیت هەکەر ...** وەسا دانە تە دانەیێن ڕێزکریێ $\begin{bmatrix}3 & 5\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ دووجاران لێکرن ؟

أ دانەیێن هەلگەڕاوێ ڤێ ڕێزکریێ چەوا دێ هێنە گوهارتن؟

ب دەستەواژەیەکێ بنڤیسە. وەسفا گوهارتنا دانەیێن هەلگەڕاوێ ڕێزکرییەکێ بکەت، دەمێ ڕێزکری ل ژمارەیەك وەکی k بدەن؟

34 هەریم 24 000 دینار دان، بهایێ 7 پلێتێن زاروکان و 2 پلێتێن مەزنان بۆ چۆناژۆرا باغچەیێ گیانەوەران. مازن 46 000 دینار بهایێ 4 پلێتان بۆ مەزنان و 13 پلێتان بۆ زاروکان دان. گۆراوێ x بۆ بهایێ پلێتێن مەزنان بکاربینە و گۆڕاوێ y بۆ بهایێ پلێتێن زاروکان.

أ سیستەمێ هاوکێشەیان بکاربینە دا دەربڕینێ ژ پرسیارێ بکەی.

ب ئەرێ سنووردارێ ڕێزکریێ هاوکۆلکەیان دبیتە سفر؟ ژمارەیا شیکاران چەندە؟

ج شێوەیێ ڕێزکریێ و هەلگەڕاوێ ڕێزکریێ بکاربینە بۆ دەرئینانا x و y.

د بهایێ پلێتا مەزنان چەندە؟ و بهایێ پلێتا زاروکان چەندە؟

35 **هزرکرنەکا ڕەخنەگر:** أ بسەلمینە کو هەلگەڕاوێ ڕێزکرییێ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ دبیتە $\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

ب هەلگەڕاوێ ڕێزکرییێ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ چییە هەکەر سنووردارێ وێ یەکسانی1 بیت.

ج ئەگەر چییە دانەیێن هەلگەڕاوێ ڕێزکرییێ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ژمارەیێن تەواو بن.
دەمێ دانەیێن وێ ژمارەیێن تەواو بن و سنووردارێ وێ یەکسان 1 بیت.

36 بهایێ x بینەدەر کو ڕێزکرییێ $\begin{bmatrix} 2 & x \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ هەلگەڕاو نەبیت؟

37 هەلگەڕاوێ ڕێزکریەکێ چییە هەکەر دانەیەك ب تنێ هەبیت $[a]$ ؟

38 **کیمیا:** سانایێ چەندەڕ گێراوەکی تێکەلکر کو 15%ژ ترشا گۆگرد تێدا بوو ل گەل گیراوەکێ دی کو40% ژ وێ ترشێ تێدا بوو 50L ب دەستکەفت کو ڕێژا ترشا گۆگردی 35% بوو.
چەند لیتر ژ هەر گیراوەکی تێکەلکرن؟

39 **بنڤیسە:** ئەنجامێ لێکدانێ $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$ بینەدەر. پەیوەندیا دناڤبەرا هەردوو ڕێزکریاندا چییە ؟

ئامادەکرن بۆ ئەزموونێ

40 کیژ ژ ئەڤێن ل خوارێ دبیتە شێوەیێ ڕێزکری بۆ سیستەمێ $\begin{cases} 3x+2y=8 \\ x=y+1 \end{cases}$ ؟

أ $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$

ج $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ د $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$

41 کیژ ئەڤێن دهێن دروستن ل سەر ڕێزکرییێ $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -9 \end{bmatrix}$؟

أ ڕێزکرییێ هەلگەڕاو هەیە، چونکی سنووڕدارێ وێ نە یەکسانە سفر؟

ب ڕێزکرییێ هەلگەڕاو هەیە، چونکی سنووڕدارێ وێ یەکسانە سفر؟

ج ڕێزکرییێ هەلگەڕاو نینە، چونکی سنووڕدارێ وێ یەکسانە سفر؟

د ڕێزکرییێ هەلگەڕاو نینە، چونکی سنووڕدارێ وێ نە یەکسانە سفر؟

42 دانەیێ b_{11} د ڕێزکرییێ B دا چەندە هەکەر B هەلگەڕاوێ ڕێزکرییێ $A=\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ بیت؟

أ 1 ب $-\frac{1}{9}$ ج 3 د $-\frac{1}{27}$

43 کیژ ئەڤێن دهێن دروستن بۆ ڕێزکرییێ $M=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، هەکەر سنووردارێ وێ نە یەکسانبیت سفر، و $a>0$ و $b<0$ و $c<0$ و $d>0$ ؟

أ هەموو دانەیێن M^{-1} نە د سالب بن. ب ڕێزکرییێ M^{-1} دانەیەك سالب ب تنێ هەیە.

ج ڕێزکرییێ M^{-1} دوو دانەیێن سالب ب تنێ هەنە. د ڕێزکرییێ M^{-1} دوو دانەیێن سالب ب تنێ هەیە.

44 **بەرسڤەکا کورت:** پێشانگەهەکا کەڤالێن هۆنەری، وێنەیەکێ ب بهایێ 25 000 دیناران دەتە وی کەسی ئەوێ 500 000 دیناران دبەخشت. و وێنەیەکێ ب بهایێ 50 000 دیناران دەتە وی کەسێ 1 000 000 دیناران دبەخشت. پێشانگەهێ 24 000 000 دینار کۆمکرن و 35 وێنە پێشکێشکرن. ژمارەیا بەخشینان ژ هەر جۆرەکی چەند بوو؟

بەرهنگاری و بەرفرەهکرن

45 **ئارەزۆ:** نمرەیێن هەر قوتابیەکی ل دوماهیا سالا خواندنێ دهێتە بلندکرن ب هاوکۆلکەیێن جودا و ل دویڤ هەر بابەتەکی. خشتەیێ ل خوارێ نمرەیێن 4 قوتابیان ل 4 بابەتان، و سەرجەمێ هەر ئێك ژ وان دیار دکەت. دڤێت بلندکرنا هەر بابەتەکی دیار بکەی.

نمرەیێن دوماهیا سالا خواندنێ					
قوتابی	بیرکاری	زانست	زمانێ عەرەبی	زمانێ بیانی	سەرجەم
هیوا	65	72	55	50	1038
ڕێبەر	40	45	66	60	890
ڕەوەند	55	65	60	65	1030
دانا	85	75	65	75	1275

46 بهایێن دانەیێن ڕێزکریێ $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بینەدەر دا یەکسانبیت بۆ هەلگەڕاوێ وێ.

47 ئەڤ نامە گەهشتە ئەلند ژ بابێ وی: 18 ، 0 ، 30 ، 15 ، -33 ، -8 ، 7 ، -5 ، -3 ، 5 ، 3 ، 12 ، 4 ، 8 ، 33 ، 6 ، 0 ، 0 . و ڕێزکریەك بکارئینا بۆ ڤەکرنا ڤەشارتنا وێ . ژ جۆرێ 3×3 بوو و هەموو دانەیێن دکەفتنە ژێر تیرەیێ سەرەکی سفر بوون، و هەموو دانەیێن دی 1بوون.

أ ئەو نامە چ بوو ؟

ب ڕیزکریێ ڤەشارتنێ چ بوو؟

ج ئەلند بەرسڤا نامەیا بابێ خو ب ڤی شێوەی دا: (بەلێن دەدەم). ئەو نامەیا جفرەکری چییە ئەوا گەهشتیە بابێ وی؟

پێداچوونا لوولپێچی

شیکاربکە (پۆلێن پێشتر)

48 $\frac{2x}{10} = \frac{12}{30}$ **49** $\frac{0.5}{0.2x} = \frac{100}{7}$ **50** $125\%x = 117$

لادانێ بکاربینە بۆ شیکارکرنا سیستەمێ هاوکێشەیان. (وانەیا 5-2)

51 $\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x+3y-6z=5 \\ -4z-5y+0.25z=-9 \end{cases}$ **52** $\begin{cases} y-x-3z=4 \\ 2x+y-4z=-3 \\ 0.25x+8z+3=2y \end{cases}$

سنووردارێ ڕێزکریێ بینەدەر. (وانەیا 4-3)

53 $\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix}$ **54** $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 3 \\ 1 & 12 \end{bmatrix}$ **55** $\begin{bmatrix} -4 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ **56** $\begin{bmatrix} \frac{4}{9} & 8 \\ \frac{3}{2} & -81 \end{bmatrix}$

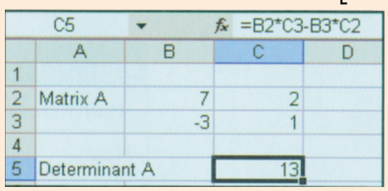
بەری پەرێ تەکنۆلۆژیا
شیکارکرنا سیستەمەکێ هێلی بکارئینانا پرۆگرامێ Excel

دگەل وانەیا 5-3 یا گرێدایە

چالاکی

سیستەمی شیکاربکە $\begin{cases} 7x+2y=-8 \\ -3x+y=9 \end{cases}$.

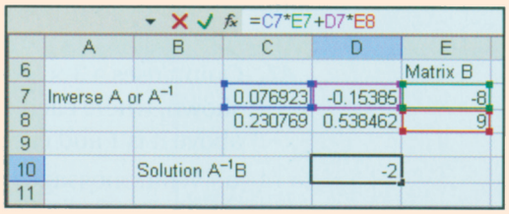
تو دشێی پرۆگرامێ Excel بکاربینی بۆ هەژمارکرنا سنووردارێ ڕێزکریێ و هەلگەڕاوێ ڕێزکریێ، ژ بۆ شیکارکرنا سیستەمێ هێلی $AX=B$ ب نڤیسینا $X=A^{-1}B$ و هەژمارکرنا ڕێزکریێ $A^{-1}B$. بۆ دەرئینانا ڕێزکریێ A^{-1} ، دەستبکە ب هەژمارکرنا سنووردارێ ڕێزکریێ A . ل بیرا تە بیت، سنووڕدارێ ڕێزکریێ $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ دبیتە $|A|=ad-bc$



هەرچار هاوکۆلکەیێن سیستەمی تۆماربکە : a ل $B2$ ، b ل $C2$ ، c ل $B3$ و d ل $C3$. بۆ هەژمارکرنا سنووردارێ ڕێزکریێ، ڤێ : **=B2*C3-B3*C2** د خانەیا $C5$ دا بنڤیسە.

ژ لایەکێ دیڤە، ل بیرا تەبیت کو هەلگەڕاوێ ڕێزکریێ $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ دبیتە ڕێزکریێ $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ یان $A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{d}{|A|} & -\frac{b}{|A|} \\ -\frac{c}{|A|} & \frac{a}{|A|} \end{bmatrix}$. ڤێ **=C3/C5** د خانەیا **C7** دا بنڤیسە بۆ هەژمارکرنا $\frac{d}{|A|}$

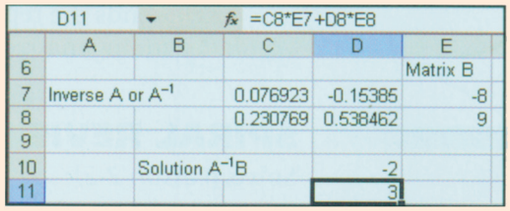
=B2/C5 د خانەیا **D8** دانە بۆ هەژمارکرنا $\frac{a}{|A|}$



شیکار ژ ڕێزکرییەکی ئێك ستوون هەی پێکدهێت ، ئەو ژی $A^{-1}B$. هەر دوو ژمارەییێن ل ڕەخێ ڕاستێ ژ هەر هاوکێشەیەکێ تۆمار بکە، ئانکو (8- و 7)د هەردوو خانەییێن $E7$ و $E8$ دا و ل دویڤ ئێك بۆ هەژمارکرنا ڕێزکریا $A^{-1}B$ ڤێ :

=C7*E7+D7*E8 د خانەیا $D10$ دا تۆماربکە و،

=C8*E7+D8*E8 د خانەیا $D11$ دا تۆماربکە.



شیکار دبیتە $x=-2$ و $y=3$ . . تە پرۆگرامەك دارشت بۆ شیکارکرنا سیستەمێ هاوکێشەیێن هێلی 2×2 . ئێك ژ هاوکۆلکەیێن سیستەمێ هێلی یێ بۆری یان ژمارەیەکێ ژلایێ ڕاستێ بگۆهۆڕە و بزانە چەوا دێ ئەنجام هێتە گوهارتن.

هەوڵبدە

1. هەردوو ژمارەیێن 5- و 9 ، ل شوونا هەردوو ژمارەیێن لایێ ڕاستێ د هەردوو هاوکێشەیاندا دانە، و سیستەمێ نوو ب وی پرۆگرامێ تە پێکئینایی شیکار بکە.
2. چەوا دێ خو ژ بەرسڤێ پشتراستکەی بکارئینانا پرۆگرامێ Excel ؟
3. **هزرکرنەکا ڕەخنەگر:** پرۆگرامێ شیکارکرنێ بکاربینە بۆ شیکارکرنا سیستەمێ تو پێشوەخت بزانی کو شیکارا وی ستەمە، و سیستەمەکی دی تو پێشوەخت بزانی کو بێسنوورە. چەوا پرۆگرامێ Excel دێ بکارئینی دا بزانی کا سیستەم ستەمە یان بێسنوورە؟

6-3 ژمارەییێن ئاوێتە

Complexe Numbers

ئارمانج

- ژمارەییێن خەیالی و ژمارەییێن ئاوێتە دێ نیاسن و بکارئینن.
- هاوکێشەییێن دووجایی ئەوێن ڕەگ د کۆمەلەیا ژمارەییێن ڕاستیدا نە هەبن دێ شیکار کەن.

بۆچی ئەڤێ فێردبن؟

ئەم دشێین ژمارەییێن ئاوێتە بکاربینین بۆ شیکارکرنا هاوکێشەیەکا دوجایی کو شیکار نەبیت د کۆمەلەیا ژمارەییێن راستیدا. (نموونە 4)

تو دشێی ب وێنەیێ ڕۆنکرنێ خو پشتراسبکەی کو نەخشەیا $f(x)=x^2+1$ شیکار نینە د کۆمەلەیا ژمارەییێن راستیدا، هەکەر تە بزاڤکر کو هاوکێشەیا دوجایی $x^2+1=0$ شیکار بکەی ، دێ $x=\pm\sqrt{-1}$ ب دەست تە کەڤیت و ئەڤە ژی دیاردکەت کو چو ڕەگێن راستی نینن.

لێ تو دێ شێی ڤێ هاوکێشەیێ شیکاربکەی هەکەر تە ڕەگێ دوجایی بۆ ژمارەییێن سالب پێناسەکرن و نیاسین. زانایێن بیرکاریێ ئەڤ ڕەگێن دوجایی دانانە دناڤ زانست و بیرکاریێدا و ناڤێ وان کرنە **ژمارەییێن خەیالی Complex numbers** . ئێکەمین ژمارە ژ ڤان دبیتە **یەکەیا خەیالی Imaginary Unit** . و هێمایێ وێ I یە. $i=\sqrt{-1}$. تو دشێی ڕەگێ دوجایی بۆ هەر ژمارەیەکا سالب بکارئینانا یەکەیا خەیالی بنڤیسی.

زاراف
Vocabulary

یەکەیا خەیالی
Imaginary unit

ژمارەیا خەیالی
Imaginary number

ژمارەیا ئاوێتە
Complex number

بەشێ ڕاستی
Real part

بەشێ خەیالی
Imaginary part

ئاولێ ژمارەیا ئاوێتە
Complex conjugate

ژمارەیا خەیالی

بەنوسین	ب ژمارە	ب جەبرێ
ژمارەیا خەیالی Imaginary Number دبیتە ڕەگێ دوجایی بۆ ژمارەیەکا سالب. دشیاندایە هەر ژمارەیەکا خەیالی ل سەر شێوەیێ bi بنڤیسن، کو b ژمارەیا راستییە i یەکەیا خەیالیە. دوجاییا هەر ژمارەیەکا خەیالی یەکسانە ئەو ژمارەیا سالب ئەوا بۆ پێناسەکرنا وی هاتیە بکارئینان.	$\sqrt{-1}=i$ $\sqrt{-2}=\sqrt{-1}\sqrt{2}=i\sqrt{2}$ $\sqrt{-4}=\sqrt{-1}\sqrt{4}=2i$ $i^2=\left(\sqrt{-1}\right)^2=-1$	هەکەر b ژمارەیەکا ڕاستی یا مووجەب بیت، دێ : $\sqrt{-b}=i\sqrt{b}$ $\sqrt{-b^2}=ib$ $\left(\sqrt{-b}\right)^2=-b$

نموونە 1 سادەکرنا ڕەگێن دوجایی یێن ژمارەییێن سالب

هەر بڕکی پێ i بنڤیسە.

أ $3\sqrt{-16}$

$3\sqrt{(16)(-1)}$	16− شیتە لبکە
$3\sqrt{16}\sqrt{-1}$	سیفەتێ لێکدانا ڕەگان
$3\times4\sqrt{-1}$	سادەبکە
$12\sqrt{-1}$	لێکبدە
$12i$	پێ i بنڤیسە

ب $-\sqrt{-75}$

$-\sqrt{(75)(-1)}$	75− شیتە لبکە
$-\sqrt{75}\sqrt{-1}$	سیفەتێ لێکدانا ڕەگان
$-\sqrt{25}\sqrt{3}\sqrt{-1}$	سیفەتێ لێکدانا ڕەگان
$-5\sqrt{3}\sqrt{-1}$	سادەبکە
$-5\sqrt{3}i=-5i\sqrt{3}$	پێ i بنڤیسە

خالا چاڤدێریێ

1. هەر بڕەکێ پێ i بنڤیسە.

أ $\sqrt{-12}$ ب $2\sqrt{-36}$ ج $-\frac{1}{3}\sqrt{-63}$

نموونـــــه 2 شیکارکرنا هاوکێشەیا دوجایی ئەوا ڕەگێن وێ خەیالی

هاوکێشەیێ شیکاربکە.

أ $x^2 = -81$

ڕەگێ دوجایی وەربگرە $x = \pm\sqrt{-81}$

لدویڤ i بنقیسە $x = \pm 9i$

ساخبکە

$x^2 = -81$	
$(9i)^2$	-81
$81i^2$	-81
$81(-1)$	-81 ✓

ب $3x^2 + 75 = 0$

-75 ل هەردوو ڕەخان زێدەبکە. $3x^2 = -75$

هەردوو ڕەخان ل سەر 3 دابەشبکە. $x^2 = -25$

ڕەگی دوجایی وەربگرە $x = \pm\sqrt{-25}$

لدویڤ i بنقیسە $x = \pm 5i$

ساخبکە

$x^2 = -81$	
$(-9i)^2$	-81
$81i^2$	-81
$81(-1)$	-81 ✓

$3x^2 + 75 = 0$	
$3(\pm 5i)^2 + 75$	0
$3(25)i^2 + 75$	0
$75(-1) + 75$	0 ✓

خالا چاقدێریێ

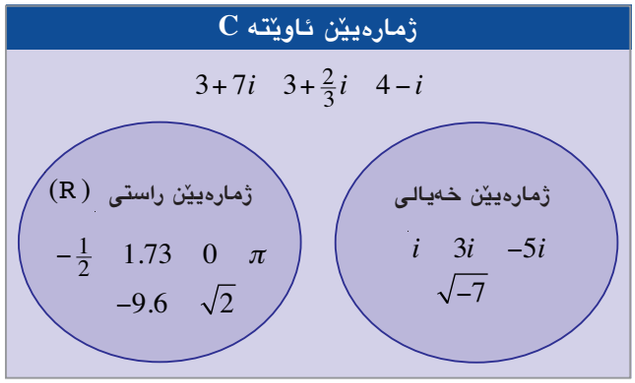
2. هاوکێشەیێ شیکاربکە.

أ $x^2 + 36 = 0$ ب $x^2 + 48 = 0$ ج $9x^2 + 25 = 0$

ژمارەیا ئاوێتە Complex Number

ژمارەیەکە تو دشێی ل سەر شێوەیێ $a + ib$ بنقیسی، کو a و b دوو ژمارەیێن راستینە و، $i = \sqrt{-1}$

کۆمەلەیا ژمارەیێن راستی R دبیتە بەشەك ژ کۆمەلّەیا ژمارەیێن ئاوێتە C ئانکو $R \subseteq C$.



هەر ژمارەیەکا ئاوێتە **بەشەکی ڕاستی Real Part** هەیە (a) و **بەشەکی خەیالی Imaginary Part** هەیە (b)

بەشێ ڕاستی — بەشێ خەیالی

$a + bi$

ژمارەیێن راستی، ژمارەیێن ئاوێتەنە و بەشێ وان یێ خەیالی دبیتە سفر. ژمارەیێن خەیالی، ژمارەیێن ئاوێتەنە و بەشێ وان یێ راستی یەکسانە سفر و بەشێ خەیالی نە یەکسانە سفر. دوو ژمارەیێن ئاوێتە دێ یەکسانبن هەکەر بەشێن وان یێن راستی و بەشێن خەیالی یەکسانبن.

نموونـــــه 3 یەکسانبوونا دوو ژمارەیێن ئاوێتە

بهایێ هەر ئێك ژ x و y بینەدەر کو ئەڤ یەکسانبوونە یا دروست بیت. $3x - 5i = 6 - (10y)i$

هەردوو بەشێن ڕاستی

$3x - 5i = 6 - (10y)i$

هەردوو بەشێن خەیالی

$3x = 6$ هەردوو بەشێن ڕاستی یەکسانن

$x = 2$

$-(10y) = -5$ هەردوو بەشێن خەیالی یەکسانن

$y = \frac{1}{2}$

3. بەهایێ هەر ئێك ژ x و y بینەدەر کو یەکسانبوون یا دروست بیت.

خالا چاڤدێریێ

أ $2x-6i=-8+(20y)i$

ب $-8+(6y)i=5x-i\sqrt{6}$

نموونـــــە 4 دەرئینانا سفرێن ئاوێتە یێن نەخشەیێن دوجایی

هەردوو سفرێن نەخشەیا دوجایی بینەدەر.

أ $f(x)=x^2-2x+5$

$x^2-2x+5=0$ هاوکێشەیێ بنڤیسە

$x^2-2x+1=-5+1$ ژێدەبکە دا ببتە

$(x-1)^2=-4$ دووجاییا تەواو

$x-1=\pm\sqrt{-4}$ ڕەگی دووجایی

$x=1\pm 2i$ وەربگرە سادەبکە.

ب $g(x)=x^2+10x+35$

$x^2+10x+35=0$ هاوکێشەیێ بنڤیسە

$x^2+10x+25=-35+25$ ژێدەبکە دا ببتە

$(x+5)^2=-10$ دووجاییا تەواو

$x+5=\pm\sqrt{-10}$ ڕەگی دووجایی

$x=-5\pm i\sqrt{10}$ وەربگرە سادەبکە.

خالا چاڤدێریێ

4. هەردوو سفرێن نەخشەیا دووجایی بینەدەر.

أ $f(x)=x^2+4x+13$

ب $g(x)=x^2-8x+18$

ڕۆشنایی

هەکەر هاوکۆلکەیێن هاوکێشەیەکێ ژمارەییێن راستی بن، و ڕەگەکێ وێ تە زانی و نە یی ڕاستی بوو، ڕەگێ دی دێ بیتە ئاولێ ڤی ڕەگی.

د نموونەیا 4ـە ب دا ،پەیوەندییەك، هەیە، هەردوو سفرێن نەخشێ $-5+i\sqrt{10}$ و $-5-i\sqrt{10}$ پێکڤەگرێدەت. ئەڤ هەردوو ژمارەییێن ئاوێتە دبنە ئاولێن ئێکودوو. هەردوو بەشێن وان ییێن ڕاستی یەکسانن لێ هەردوو بەشێن خەیالی دژێن ئێکن. **ژمارەیا ئاول Conjugate Number** بۆ ژمارەیا ئاوێتە $a+bi$ دبیتە ژمارەیا ئاوێتە $a-bi$.

هەکەر هەردوو ڕەگێن هاوکێشەیەکا دووجاییا هاوکۆلکەییێن وێ ژمارەییێن راستی بن و ئەو بخو نەراستی بن هەردوو ڕەگ دێ بنە دوو ژمارەییێن ئاوێتە ییێن ئاولێ ئێکودوو.

نموونـــــە 5 دەرئینانا ژمارەیا ئاول بۆ ژمارەیەکا ئاوێتە

ژمارەیا ئاول بۆ ژمارەیا ئاوێتە بینەدەر

أ $2i-15$

$-15+2i$ ل سەرشێوەیێ $a+bi$ بنڤیسە

$-15-2i$ $a-bi$ بینەدەر

ب $-4i$

$0+(-4)i$ ل سەرشێوەیێ $a+bi$ بنڤیسە

$0-(-4)i$ $a-bi$ بینەدەر

$4i$ سادەبکە

خالا چاڤدێریێ

5. ژمارەیا ئاول بۆ ژمارەیا ئاوێتە بینەدەر

أ $9-i$

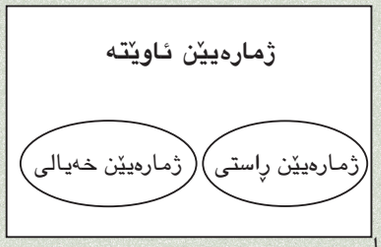
ب $i+\sqrt{3}$

هزربکە و گەنگەشێ بکە

1. هەکەر بزانی کو $3+i$ ڕەگە کە بۆ هاوکێشەیەکا دوجاییا هاوکۆلکەیێن وێ ژمارەییێن راستی بن، چەوا دێ ڕەگێ دی ئینیەدەر؟

2. ژمارەکا ئاوێتە بنڤیسە $a+bi$ کو $a\neq 0$ و $b=0$ پاشی ژمارەیەکا ئاوێتە بنڤیسە $a+bi$ کو $a=0$ و $b\neq 0$ بەرسڤا خو ڕۆنبکە.

3. ڕێکخەرێ هێلکاریێ کۆپیبکە و تمامبکە. پێناسەیەك و نموونەیەکا گونجایی د هەر شێوەیەکیدا بنڤیسە



6–3 ڕاهێنان

ڕاهێنانێن ئاراستەکری

1 زاراف ژمارە 7 دبێتە _____ بۆ ژمارە $\sqrt{5}+7i$. (بەشێ ڕاستی یان بەشێ خەیالی).

بەرێ خۆبدە نموونە 1 هەر ژمارەیەکێ پێ i بنڤیسە.

2 $5\sqrt{-100}$ 3 $\frac{1}{2}\sqrt{-16}$ 4 $-\sqrt{-32}$ 5 $\sqrt{-144}$

بەرێ خۆبدە نموونە 2 هاوکێشەیێ شیکاربکە.

6 $x^2=-9$ 7 $2x^2+72=0$ 8 $4x^2=-16$ 9 $x^2+121=0$

بەرێ خۆبدە نموونە 3 بهایێن x و y بینەدەر کو یەکسانبوونێ دروست بکەن.

10 $-2x+6i=(-24y)i-14$ 11 $-4+yi=-12x-i+8$

بەرێ خۆبدە نموونە 4 سفرێن نەخشەیێ بینەدەر.

12 $f(x)=x^2-12x+45$ 13 $g(x)=x^2+6x+34$

بەرێ خۆبدە نموونە 5 ژمارەیا ئاول بینەدەر.

14 $-9i$ 15 $\sqrt{5}+5i$ 16 $8i-3$ 17 $6+i\sqrt{2}$

ڕاهێنان و شیکارکرنا پرسیاران

ڕاهێنانێن ئازاد

بۆ شیکارکرنا ڕاهێنانان	بەرێ خۆ بدە نموونە
21–18	1
25–22	2
27–26	3
31–28	4
35–32	5

هەر ژمارەیەکێ پێ i بنڤیسە.

18 $8\sqrt{-4}$ 19 $-\frac{1}{3}\sqrt{-90}$ 20 $6\sqrt{-12}$ 21 $\sqrt{-50}$

هاوکێشەیێ شیکاربکە.

22 $x^2+49=0$ 23 $5x^2=-80$ 24 $3x^2+27=0$ 25 $\frac{1}{2}x^2=-32$

بهایێن x و y بینەدەر کو یەکسانبوونێ دروست بکەن.

26 $9x+yi-5=-12i+4$ 27 $5(x-1)+(3y)i=-15i-20$

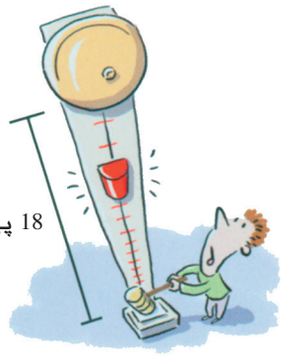
سفرێن نەخشەیێ بینەدەر.

28 $f(x)=x^2+2x+3$ 29 $g(x)=4x^2-3x+1$

30 $f(x)=x^2+4x+8$ 31 $g(x)=3x^2-6x+10$

ژمارەیا ئاول بینەدەر.

32 i 33 $-\frac{\sqrt{3}}{2}-2i$ 34 $-2.5i+1$ 35 $\frac{i}{10}-1$



36 **دێ چ بیت هەکەر؟** د یارییەکا باژێرکێ یاریاندا، چاکۆچەکی ل سپرنگەکی ددەت، دا تەپەیەکا ئاسنی بەرەف زەنگلەکێ بلند بکەت. هەکەر تەپە گەهشتە زەنگلێ، یاریکەر دێ قازانج کەت. نەخشەیا: $d(t)=16t^2-32t+18$ دبیتە نموونە بۆ هەژمارکرنا دووراتیێ d ب پێیان، دناڤبەرا تەپە و زەنگلێ پێ ژمارەیا چرکەییێن برین ژ دەمێ t لێدانا سپرنگی ژ لایێ یاریکەریڤە. ئەرێ د شیاندا هەیە یاریکەرەك قازانج بکەت؟

ڕەگێ دووێ یێ هاوکێشەیەکا هاوکۆلکەییێن وێ ڕاستی بن بینەدەر، هەکەر بزانی کو ژمارەیا دایی ڕەگەکێ وێیە.

37 $1+14i$ **38** $\frac{5}{7}i$ **39** $4i-2\sqrt{5}$

40 $-12-i$ **41** $9-i\sqrt{2}$ **42** $-\frac{17}{3}i$

بهایێن c و d بینەدەر ئەوێن یەکسانبوونێ دروست دکەن.

43 $2ci+1=-d+6-ci$ **44** $c+3ci=4+di$ **45** $c^2+4i=d+di$

هاوکێشەیان شیکاربکە.

46 $8x^2=-8$ **47** $\frac{1}{3}x^2=-27$ **48** $2x^2+12.5=0$

49 $\frac{1}{2}x^2+72=0$ **50** $x^2=-30$ **51** $2x^2+16=0$

52 $x^2-4x+8=0$ **53** $x^2+10x+29=0$ **54** $x^2-12x+44=0$

55 $x^2+2x=-5$ **56** $x^2+18=-6x$ **57** $-149=x^2-24x$

بێژە ئەرێ دەستەواژە، هەردەم یا دروستە یان هندەك جاران یا دروستە، یان هەردەم یا خەلەتە. هەکەر هندەك جاران یادروست بیت، هندەك نموونەیان ل سەر بینە.

58 ژمارەیا ڕاستی ژمارەیەکا خەیالییە.

59 ژمارەیا خەیالی ژمارەیەکا ئاوێتەیە.

60 ژمارەیا ڕێژەیی ژمارەیەکا ئاوێتەیە.

61 ژمارەیا ئاوێتە ژمارەیەکا خەیالییە.

62 ژمارەیا تەواو، ژمارەیەکا ئاوێتەیە..

63 هاوکێشەیا دوجایی ڕەگێن ڕاستی نینە

64 هاوکێشەیا دوجایی ڕەگەك ڕاستی و ڕەگەك ئاوێتە هەیە.

65 هەردوو ڕەگێن هاوکێشەیا دوجایی نە دوو ژمارەییێن ڕاستی نە.

سفرێن نەخشەیێ بینەدەر.

66 $f(x)=x^2-10x+26$ **67** $g(x)=x^2+2x+17$ **68** $h(x)=x^2-10x+50$

69 $f(x)=x^2+16x+73$ **70** $g(x)=x^2-10x+37$ **71** $h(x)=x^2-16x+68$

72 **هزرکرنەکا ڕەخنەگر** ئەرێ تو دشێی هەردوو سفرێن نەخشەیا: $f(x)=x^2+64$ ب وێنەیێ بینیەدەر؟ بەرسڤا خۆ ڕۆنبکە.

73 **هزرکرنەکا ڕەخنەگر** ئەو ژمارەیا ئاوێتە یا ئاول بۆ ژمارەیەکا ڕاستی چییە؟

74 **بنڤیسە** چ ڕێ دێ بکارئینی بۆ شیکارکرنا هاوکێشەیەکا دوجایی کو ڕەگێن ڕاستی نەبن؟

75 یاریکەرەکی پێهنەك ل تەپەیەکێ دا و بۆ سەری بلند کر. نەخشەیا $h(t)=-4.9t^2+40t$ دبیتە نموونە بۆ هەژمارکرنا بلندهیا تەپێ ب مێتران. پشتی t چرکەیان ژ لێدانا وێ.

أ ل سەر یاریگەهێ تۆرەك وەکو بان هاتیە دانان ل بلندهیا72مێتران. هاوکێشەیا $-4.9t^2+40t=85$ شیکاربکە.

ب پشتبەستن ب ئەوا تە ل پرسیارا (أ) ئینایەدەر، ئەرێ تەپە دێ گەهێتە تۆرێ؟ ڕۆنبکە.

ج بلندترین بلندهی چەندە کو تەپە بگەهتێ. پشتبەستن ب نموونەیێ؟

دەروازەیەك

میژوویا بیرکاریێ

زانایێ بیرکاریێ یێ سویسری لیۆنارد ئۆلەر *Euler* (1707–1783) ئێکەم کەس بوو هێمایێ i بکارئینایی دا دەربڕینێ ژ $\sqrt{-1}$ بکەت.هەروەسا نقیسینا $f(x)$ بکارئینا دا دەربڕینێ ژ بهایێ x نەخشەیا fبکەت، دەمێ گۆڕاوێ ئازاد x بهایێ وەردگریت.

76 کیژ ئەقێن ل خوارێ، ژمارەیا ئاولە بۆ ژمارەیا ئاوێتە $-2+i$ ؟

أ) $2+i$ ب) $2-i$ ج) $i-2$ د) $-2-i$

77 کیژ ئەقێن ل خوارێ دبیتە $\sqrt{-225}$ پێ i هاتیە نقیسین؟

أ) $15i$ ب) $-15i$ ج) $i\sqrt{15}$ د) $-i\sqrt{15}$

78 کیژ ئەقێن ل خوارێ، دبنە هەردوو سفرێن نەخشەیا:$f(x)=x^2-2x+17$ ؟

أ) $1\pm 4i$ ب) $4\pm i$ ج) $-1\pm 4i$ د) $-4\pm i$

79 کیژ بها بۆ گۆڕاوێ C دێ یەکسانبوونێ:$11-(9+ci)=5+4i-3$ دروست کەت؟

أ) -2 ب) -4 ج) 2 د) 4

80 کیژ قان هاوکێشەیێن ل خوارێ ئەڤ هەردوو ڕەگە :$-6i$ و $6i$ هەنە؟

أ) $-\frac{1}{6}x^2=6$ ب) $\frac{1}{4}x^2=9$ ج) $x^2-30=6$ د) $20-x^2=-16$

81 **بەرسڤەکا کورت:** جۆرێ شیکارێن هاوکێشەیان ڕۆنبکە ئەوێن ل سەر شێوەیێ: $x^2=a$ دهێنە نقیسین . دەمێ $a>0$ پاشی دەمێ $a<0$ ؟

بەرهنگاری و بەرفرەهکرن

82 ژمارەیا ئاوێتە: $a+bi$ بینەدەر دەمێ: $5a+3b=1$ و $-5b=7+4a$.

83 ئەرێ چێدبیت هاوکێشەیا دوجایی ئێك ڕەگێ ڕاستی ب تنێ هەبیت؟ ئێك ڕەگێ خەیالی هەبیت؟ ئێك ڕەگێ ئاوێتە هەبیت؟ ڕۆنبکە.

84 ئەنجامێ هەر مەرجەکی ل سەر شیکارکر هاوکێشەیێ :$x^2+bx+c=0$ دیاربکە.

أ) $b=0$ ب) $c\le 0$ ج) $c>0$

د) کیژ مەرج وەسا ل بەش خەیالی یێ شیکارێ دکەت کو نەبیتە سفر ؟

پێداچوونا لوولپێچی

ڕێزکریێن ل خوارێ بکاربینە بۆ شیکارکرنا ڕاهێنانان ژ 85 هەتا 88. هەژماربکە هەکەر دشیاندا بیت. (وانەیا 3–2)

$$S=\begin{bmatrix}1 & -5\\ -2 & 0\end{bmatrix},\ T=\begin{bmatrix}-4 & 1 & -2\\ 0 & -3 & 1\\ 2 & -2 & 2\end{bmatrix},\ V=\begin{bmatrix}10 & 1\\ 0 & -1\\ -5 & 5\end{bmatrix}$$

85 T^2 **86** TV **87** ST **88** S^2

بۆهەر نەخشەیەکێ: أ) دیاربکە هەکەر ویێنەیێ ڕۆنکرنێ بەرەڤ سەری یان بەرەڤ خوارێ بیت. ب) تەوەرێ هاوجێبوونا ویێنەیێ ڕۆنکرنێ بینەدەر. ج) سەرێ ویێنەیێ ڕۆنکرنێ بەهژمێرە. د) ئێکدووبڕینێ دگەل تەوەرێ دووێ بهەژمێرە و ویێنەبکە. (پۆلێن پێشتر)

89 $f(x)=\frac{1}{5}x^2+x-10$

90 $f(x)=-x^2+3$

91 $f(x)=2x^2+4x-3$

92 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x+1$

هاوکێشەیێ ب شیتەلکرنێ شیکاربکە. (پۆلێن پێشتر)

93 $x^2+5x=14$

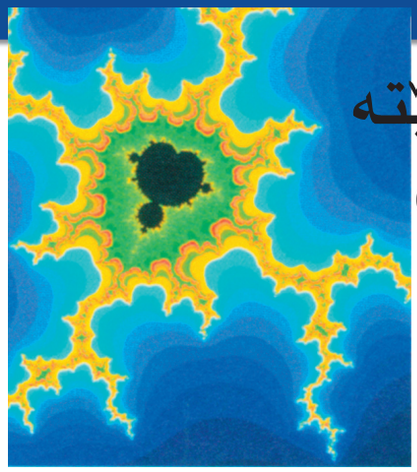
94 $6x^2=-x+2$

95 $4x^2+9=15x$

96 $4x^2=1$

97 $x^2+11x=-24$

98 $x^2=-7x$



7-3 کردار ل سەر ژمارەییّن ئاویّتە

Operations With Complex Numbers

ئارمانج

• هەرچار کرداران ل سەر ژمارەییّن ئاویّتە دێ ئەنجامدەن.

بۆچی ئەڤێ فێردبن؟

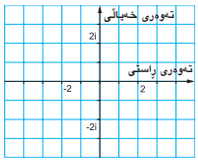
ژمارەییّن ئاویّتە د وان ڕێسایاندا بکاردهێن ئەوێن شێوەییّن ژ ئێکچێدبن پێکدئینن. (ڕاهێنان 84)

زاراڤ
Vocabulary

ڕووتەختێ ئاویّتە
Complexe plane

ڕووتێ ژمارەیا ئاویّتە
Absolute value of a complex number

ل وانەییّن پێشتر، تە ژمارەییّن راستی ب خالان ل سەر تەوەرێ ژمارەیان نواندن. د ڤی وانێدا دێ فێربی کا چەوا ژمارەییّن ئاویّتە ب خالان ل سەر ڕووتەختێ پووتانی دێ نوێنی. **ڕووتەختێ ئاویّتە Complex plane** ڕووتەختەکێ پووتانییە، تەوەرێ ئێکێ کۆمەڵەیا ژمارەییّن ڕاستی دنوێنیت و تەوەرێ دووێ کۆمەڵەیا ژمارەییّن خەیالی دنوێنیت.

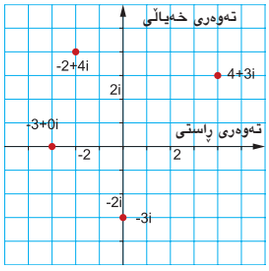


نموونە 1 نواندنا ژمارەییّن ئاویّتە:

ژمارەییّن ئاویّتە ب ڕۆنکرنێ بنوێنە:

أ $-3+0i$ ج $4+3i$

ب $-3i$ د $-2+4i$



هاریکاری

تەوەرێ راستی دبیتە تەوەرەێ ئێکێ و تەوەرێ خەیالی دبیتە تەوەرێ دووێ. هزرا خو د $a+bi$. دا بکە کو دبیتە $x+iy$

خالا چاڤدێریێ

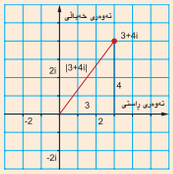
1. ژمارەییّن ئاویّتە ب وێنەیێ ڕۆنکرنێ بنوێنە :

أ $3+0i$ ب $2i$ ج $-2-i$ د $3+2i$

ل بیرا تەیە کو بهایێ ڕووت یێ ژمارەیەکا ڕاستی، دبیتە دوورییا دناڤبەرا خالا وێ ژمارەێ دنوێنیت ل سەر تەوەرێ ژمارەیان و خالا بنەڕەت ل سەر وی تەوەری. هەر ب وێ ڕێکێ ئەم دشێین **بهایێ ڕووت Absolute value** یێ ژمارەیەکا ئاویّتە پێناسەبکەین کو دبیتە، دوورییا دناڤبەرا خالا وێ ژمارێ دنوێنیت ل سەر ڕووتەختێ ئاویّتە و خالا بنەڕەت ل سەر وی ڕووتەختی.

فێربە و خۆبەربکە

بهایێ ڕووت یان ڕووتێ ژمارەیا ئاویّتە

ب نڤیسین	ب جەبری	نموونە
بهایێ ڕووتێ ژمارەیا ئاویّتە $a+bi$ **Absolute value** دبیتە دووریا ل ناڤبەرا خالا(a,b) و خالا بنەڕەت د ڕووختەتێ پووتانیدا. ڕووتێ ژمارەیا ئاویّتە$a+bi$ ب ڤی شێوەیی دنڤیسن: $\lvert a+bi\rvert$	$\lvert a+bi\rvert=\sqrt{a^2+b^2}$	 $\lvert 3+4i\rvert=\sqrt{3^2+4^2}$ $=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

نموونـــــه 2 هەژمارکرنا بهایێ ڕووتێ ژمارەیەکا ئاوێتە

بهایێ ڕووتێ ژمارەیا ئاوێتە هەژماربکە.

أ $|-9+i|$

$|-9+i|$

$\sqrt{(-9)^2+1^2}$

$\sqrt{81+1}=\sqrt{82}$

ب $|6|$

$|6+0i|$

$\sqrt{6^2+0^2}$

$\sqrt{36}=6$

ج $|-4i|$

$|0-4i|$

$\sqrt{0^2+4^2}$

$\sqrt{16}=4$

خالا چاڤدێرێ

2. بهایێ ڕووتێ ژمارەیا ئاوێتە هەژماربکە.

أ $1-2i$ ب $-\frac{1}{2}$ ج $23i$

کۆمکرن و لێدەرکرنا ژمارەیێن ئاوێتە هاوشێوەیە بۆ کۆمکرن و لێدەرکرنا بڕێن جەبری ئەوێن رادەیێن هاوشێوە ب خۆڤە دگرن. بۆ کۆمکرنا ژمارەیێن ئاوێتە، بەشێن ڕاستی ل گەلێك کۆمبکە و بەشێن خەیالی لگەلێك کۆمبکە.

کردارێن کۆمکرن و لێدەرکرن و لێکدانێ د کۆمەلەیا ژمارەیێن ئاوێتەدا هەمان سیفەتێن قان کرداران هەنە د کۆمەلەیا ژمارەیێن ڕاستیدا، لەورا تو دشێی سیفەتێن ئالوگۆرێ و پێکڤەگرێدان و بەشینەوە (بەلاڤکرنێ) بکاربینی بۆ نڤیسنا ژمارەیێن ئاوێتە ب سادەترین شێوە.

نموونـــــه 3 کۆمکرن و لێدەرکرنا ژمارەیێن ئاوێتە

کۆمبکە یان لێدەربکە. ئەنجامێ ل سەر شێوەیێ $a+bi$ بنڤیسە.

أ $(3-11i)+(-2+4i)$

هەردوو بەشێن ڕاستێ کۆمبکە

هەردوو بەشێن خەیالی کۆمبکە

$(3-2)+(-11i+4i)$

$1-7i$

ب $(4-i)-(5+8i)$

بەلاڤبکە

هەردوو بەشێن ڕاستی کۆمبکە

$(4-i)-5-8i$

هەردوو بەشێن خەیالی کۆمبکە

$(4-5)+(-i-8i)$

$-1-9i$

ج $(6-2i)+(-6+2i)$

هەردوو بەشێن ڕاستێ کۆمبکە

هەردوو بەشێن خەیالی کۆمبکە

$(6-6)+(-2i+2i)$

$0+0i$

0

د $(10+3i)-(10-4i)$

بەلاڤبکە

هەردوو بەشێن ڕاستێ کۆمبکە

$(10+3i)-10-(-4i)$

هەردوو بەشێن خەیالی کۆمبکە

$(10-10)+(3i+4i)$

$0+7i=7i$

هاریکاری

هەر ژمارەیەکا ئاوێتە دژەك هەیە.

دژێ ژمارەیا ئاوێتە $a+bi$ دبیتە $-a-bi$.

خالا چاڤدێرێ

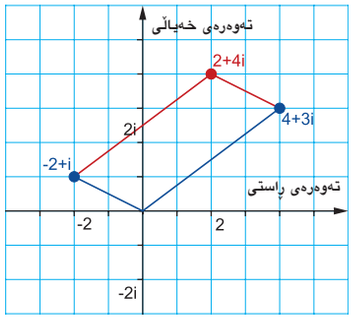
3. کۆمبکە یان لێدەربکە. ئەنجامێ ل سەر شێوەیێ $a+bi$ بنڤیسە.

أ $(-3+5i)+(-6i)$ ب $2i-(3+5i)$ ج $(4+3i)+(4-3i)$

هەروەسا، تو دشێی ژمارەیێن ئاوێتە بکارئینانا ڕووتەختێ پووتانی کۆمبکەی.

نموونـــــه 4 کۆمکرنا ژمارەییێن ئاوێتە ل سەر ڕووتەختیێ ئاوێتە

سەرجەمێ $(4+3i)+(-2+i)$ ب وێنەییێ ڕۆنکرنێ بێنەدەر



پێنگاڤا (1)ێ هەردوو ژمارەییێن ئاوێتە $4+3i$ و $-2+i$ ب وێنەکێ ڕۆنکرنێ ل سەر ڕووتەختێ ئاوێتە بنوێنە ب پارچە ڕاستەهێلان هەردوو خالان ب خالا بنەڕەتڤە گرێدەت.

پێنگاڤا (2)ێ وێنەییێ لاتەریبەکێ تەمامبکە. ئەو خالا سەری چارێ یێ لاتەریبی پێکدئینیت. سەرجەمێ هەردوو ژمارەیان دنوێنیت کو دبیتە $2+4i$

$$(4+3i)+(-2+i)=2+4i$$

ساخبکە هەردوو ژمارەییێن ئاوێتە کۆمبکە ب کۆمکرنا هەردوو بەشێن ڕاستی و هەردوو بەشن خەیالی: $(4+3i)+(-2+i)=(4-2)+(3i+i)=2+4i$

خالا چاڤدێرییێ

4. ب وێنەییێ ڕۆنکرنێ هەژمارێکە.

أ $(3+4i)+(1-3i)$

ب $(-4-i)+(2-2i)$

تو دشێی ژمارەییێن ئاوێتە لێکبدەی بکارئینانا بەلاڤکرنێ، کو ڕەفتارێ رادەییێن لێکچوویی ل گەل بەشێن خەیالی بکەی، و ل هەر جهێ i^2 لێبیت ب (-1) بگوهۆڕی.

نموونـــــه 5 لێکدانا ژمارەییێن ئاوێتە

لێکبدە، ئەنجامی ل سەر شێوەییێ $a+bi$ بنڤیسە.

أ $2i(3-5i)$

$6i-10i^2$

$6i-10(-1)$

$10+6i$

ب $(7+2i)(7-2i)$

$49-14i+14i-4i^2$

$49-4(-1)$

53

ج $(5-6i)(4-3i)$

$20-15i-24i+18i^2$

$20-39i+18(-1)$

$2-39i$

د $(6i)(6i)$

$36i^2$

$36(-1)$

-36

خالا چاڤدێرییێ

5. لێکبدە، ئەنجامی ل سەر شێوەییێ $a+bi$ بنڤیسە.

أ $2i(3-5i)$

ب $(4-4i)(6-i)$

ج $(3+2i)(3-2i)$

تو دشێی هێزێن یەکەیا خەیالی i بینیەدەر، وەکی د خشتەیدا هاتی.

هێزێن ژمارە i		
$i^1=i$	$i^5=i^4\times i=1\times i=i$	$i^9=i$
$i^2=-1$	$i^6=i^4\times i^2=1\times(-1)=-1$	$i^{10}=-1$
$i^3=i^2\times i=(-1)\times i=-i$	$i^7=i^4\times i^3=1(-i)=-i$	$i^{11}=-i$
$i^4=i^2\times i^2=(-1)(-1)=1$	$i^8=i^4\times i^4=1\times 1=1$	$i^{12}=1$

هاریکاری

بزانە کو شێوازێ د هەر ڕێزەکێدا دوبارەدبیت، ڕێ ددتە تە کو هەر هێزەکا ژمارە i بهەژمێری دبیتە ئێك ژ ڤان ژمارەیان 1 ، -1 ، $-i$ ، i .

نموونـــــه 6 هەژمارکرنا هێزێن ژمارە i

أ ژمارەیا $-3i^{12}$ ب سادەترین شێوە بنڤیسە.

$$-3i^{12} = -3\left(i^2\right)^6$$
$$= -3(-1)^6 = -3\times 1 = -3$$

ب ژمارەیا i^{25} ب سادەترین شێوە بنڤیسە.

$$i^{25} = i\times i^{24}$$
$$= i\left(i^2\right)^{12}$$
$$= i(-1)^{12} = i\times 1 = i$$

خالا چاڤدێریێ

ب سادەترین شێوە بنڤیسە.

أ $\frac{1}{2}i^7$ ب i^{42}

ل بیرا تە بیت، نابیت رەگ هەبیت د ژێرەیێ بڕێ ب سادەترین شێوە دا هاتیە نڤیسین. ژبەر کو i رەگەکێ دوجاییە، دڤێت بۆ نڤیسینا بڕەکێ ئاوێتە ب سادەترین شێوە، خو ژ i د ژێرەیدا رزگاربکێن ب ڕێژەکرنا ژێرەی. و بۆ ب دەستڤەئینانا ڤێ چەندێ، سەرە و ژێرەی ل ئاولی بدە بۆ وێ ژمارەیا ئاوێتە ئەوا د ژێرەیدا هەی.

نموونـــــه 7 دابەشکرنا ژمارەیێن ئاوێتە

ا ژمارەیێ $\frac{3+7i}{8i}$ ب سادەترین شێوە بنڤیسە.

$$\frac{3+7i}{8i} = \frac{3+7i}{8i}\times\left(\frac{-8i}{-8i}\right)$$
$$= \frac{-24i-56i^2}{-64i^2}$$
$$= \frac{-24i+56}{64}$$
$$= \frac{-3i+7}{8} = \frac{7}{8} - \frac{3}{8}i$$

ب ژمارەیا $\frac{5+i}{2-4i}$ ب سادەترین شێوە بنڤیسە.

$$\frac{5+i}{2-4i} = \frac{5+i}{2-4i}\times\left(\frac{2+4i}{2+4i}\right)$$
$$= \frac{10+20i+2i+4i^2}{4+8i-8i-16i^2}$$
$$= \frac{10+22i-4}{4+16}$$
$$= \frac{6+22i}{20} = \frac{3}{10} + \frac{11}{10}i$$

خالا چاڤدێریێ

6. ب سادەترین شێوە بنڤیسە.

أ $\frac{3+8i}{-i}$ ب $\frac{3-i}{2-i}$

هزریکە و گەنگەشێ بکە

1. ڕۆنبکە گەنگی ژمارەیەکا ئاوێتە $a+bi$ و ئاولێ وی دێ یەکسانبن؟
2. ئەنجامێ لێکدانێ $(a+bi)(c+di)$ بینەدەر و بەشێن راستی و بەشێن خەیالی دیاربکە.
3. ڕێکخەربە هێلکاری دوبارە وێنەبکە. نموونەیەکا گونجای د هەر چارچۆڤەیەکیدا دانە.

فێربە و هزربکە

7-3 ڕاهێنان

ڕاهێنانێن ئاراستەکری

1 **زاراف** د رووختەیێ ئاوێتەدا، تەوەرێ ئێکێ ژمارەیێن _____ دنوێنیت و تەوەرێ دووێ ژمارەیێن _____ دنوێنیت (ڕاستی ، ڕێژەیی ، خەیالی).

بەرێ خۆبدە نموونە 1 ژمارەیا ئاوێتە ب وێنەیێ ڕۆنکرنێ بنوێنە.

2 4 **3** $-i$ **4** $3+2i$ **5** $-2-3i$

بەرێ خۆبدە نموونە 2 بەهایێ ڕووت بینەدەر.

6 $|4-5i|$ **7** $|-33.3|$ **8** $|-9i|$ **9** $|5+12i|$ **10** $|-1+i|$ **11** $|15i|$

بەرێ خۆبدە نموونە 3 کۆمبکە یان لێدەربکە. ئەنجامێ ل سەر شێوەیی $a+bi$ بنقیسە.

12 $(2+5i)+(-2+5i)$ **13** $(-1-8i)+(4+3i)$
14 $(1-3i)-(7+i)$ **15** $(4-8i)+(-13+23i)$
16 $(6+17i)-(18-9i)$ **17** $(-30+i)-(-2+20i)$

بەرێ خۆبدە نموونە 4 سەرجەمی ب وێنەیێ ڕۆنکرنێ بینەدەر.

18 $(3+4i)+(-2-4i)$ **19** $(-2-5i)+(-1+4i)$ **20** $(-4-4i)+(4+2i)$

بەرێ خۆبدە نموونە 5 لێکبدە. ئەنجامێ ل سەر شێوەیی $ib+a$ بنقیسە.

21 $(1-2i)(1+2i)$ **22** $3i(5+2i)$ **23** $(9+i)(4-i)$
24 $(6+8i)(5-4i)$ **25** $(3+i)^2$ **26** $(-4-5i)(2+10i)$

بەرێ خۆبدە نموونە 6 ب سادەترین شێوە بنقیسە.

27 $-i^9$ **28** $2i^{15}$ **29** i^{30}

بەرێ خۆبدە نموونە 7 دابەشبکە. ئەنجامێ ل سەر شێوەیێ $ib+a$ بنقیسە.

30 $\frac{5-4i}{i}$ **31** $\frac{11-5i}{2-4i}$ **32** $\frac{8+2i}{5+i}$
33 $\frac{17}{4+i}$ **34** $\frac{45-3i}{7-8i}$ **35** $\frac{-3-12i}{6i}$

ڕاهێنان و شکیارکرنا پرسیاران

ژمارەیا ئاوێتە ب وێنەیێ ڕۆنکرنێ بنوێنە.

36 -3 **37** $-2.5i$ **38** $i+1$ **39** $4-3i$

بەهایێ ڕووت بینەدەر.

40 $|2+3i|$ **41** $|-18|$ **42** $\left|\frac{4}{5}i\right|$ **43** $|6-8i|$ **44** $|-0.5i|$ **45** $|10-4i|$

ڕاهێنانێن ئازاد

بۆ شیکارکرنا پرسیاران	بەرێ خۆ بدە نموونە
36–39	1
40–45	2
46–51	3
52–54	4
55–60	5
61–63	6
64–69	7

کۆمبکە یان لێدەربکە. ئەنجامێ ل سەر شێوەیێ $a+bi$ بنڤیسە.

46 $(8-9i)-(-2-i)$ 47 $4i-(11-3i)$ 48 $(4-2i)+(-9-5i)$

49 $(13+6i)+(15+35i)$ 50 $(3-i)-(-3+i)$ 51 $-16+(12+9i)$

سەرجەمی ب وێنەیێ رۆنکرنێ بینەدەر.

52 $(4+i)+(-3i)$ 53 $(5+4i)+(-1+2i)$ 54 $(-3-3i)+(4-3i)$

لێکبدە. ئەنجامێ ل سەر شێوەیێ $a+ib$ بنڤیسە.

55 $-12i(-1+4i)$ 56 $(3-5i)(2+9i)$ 57 $(7+2i)(7-2i)$

58 $(5+6i)^2$ 59 $(7-5i)(-3+9i)$ 60 $-4(8+12i)$

ب سادەترین شێوە بنڤیسە.

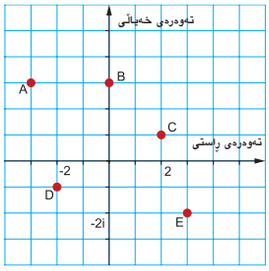
61 i^{27} 62 $-i^{11}$ 63 $5i^{10}$

دابەشبکە. ئەنجامێ ل سەر شێوەیێ $a+ib$ بنڤیسە.

64 $\frac{2-3i}{i}$ 65 $\frac{5-2i}{3+i}$ 66 $\frac{3}{-1-5i}$

67 $\frac{19+9i}{5+i}$ 68 $\frac{8+4i}{7+i}$ 69 $\frac{6+3i}{2-2i}$

ژمارەیا ئاوێتە بنڤیسە ئەوا خالێ دنوێنیت.



70 A 71 B 72 C 73 D 74 E

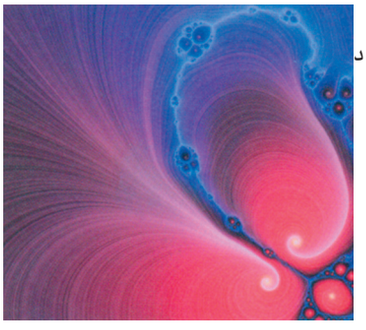
بەهای ڕووتی ژمارە یا ئاوێتە بهەژمێرە.

75 $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$ 76 $7i$ 77 $2\sqrt{2}-i\sqrt{3}$ 78 $-1-8i$

دەروازەیەک

79 شێوەیێن ژێکچێدبن

شێوەیێ ژێکچێدبنFractal شێوەیەکە ژ خو چێدبیت و ب هەمان شێوان. ئەڤە ژی وێ رامانێ ددەت کو بەشێن شێوەی وەکی شێوەی ب خونە. گەلەك شێوەیێن ژێکچێدبن د سروشتیدا هەنە، وەکی دەمارێن بەلگێن داران و دندکێن بەفرا ژ ئەسمانی دکەڤیت ژ ئەنجامێ قێ چەندێ، زانا شێوەیێن ژێکچێدبن بکاردئینن بۆ پێکئینانا نموونەیێن ئەوان تشتان.



شێوەیێن ژێکچێدبن Fractals شێوەیێن ژێکچێدبن، شێوازن پەیدا دبن ژ بکارئینانا ژمارەیێن ئاوێتە و دوبارکرنا یاسایێن بیرکاریێ. ژمارەیا ئێکێ د یاسایێدا دانە و ئەنجامێ بینەدەر و پاشی ئەنجامێ دەرکەتی دیاسایێدا دانە و..هوسا. ئەم دشێن هەر ژمارەیەکا ددوبارەبوونافێ کرداریێ دەردکەڤیت بکاربینین، بۆ دیارکرنا ڕەنگێ پیکسەلێ(یان خالێ) ل سەر شاشەیا کۆمپیوتەری. وێنەیێ بەرامبەر نموونەیە ل سەر ئەوا دشیاندا کو دیاربیت.

گەلەك شێوازێن شێوەیێن ژێکچێدبن یێن بەندن ل سەر یاسایا کۆمەلّەیا جولیا Julia ، کو دبیتە: $Z_{n+1}=(Z_n)^2+c$ کو c ژمارەیەکا نەگۆڕە. یاسایا کۆمەلّەیا جۆلیا بکاربینە دەمێ $c=0.25$.

أ Z_2 بهەژمێرە هەکەر بزانی کو $Z_1=0.5+0.6i$

ب Z_3 بهەژمێرە بکارئینانا ژمارە Z_2 ئەوا تە د پرسیارا (أ) ئینایەدەر.

ج Z_4 بهەژمێرە بکارئینانا ژمارە Z_3 ئەوێ تە د پرسیارا (ب) ئینایەدەر.

بڕێ ئاوێتە ل سەر شێوەیێ $a+ib$ بنڤیسە پشتی سادەکرنێ.

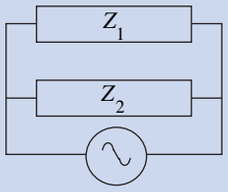
80 $6i-(4+5i)$ 81 $(-2.3+i)-(7.5-0.3i)$ 82 $(6-5i)^2$

83 $(-2-3i)^2$ 84 $(5+7i)(5-7i)$ 85 $(2-i)(2+i)(2-i)$

86 $3-i^{11}$ **87** $i^{52}-i^{48}$ **88** $i^{35}-i^{24}+i^{18}$

89 $\frac{12+i}{i}$ **90** $\frac{18-3i}{i}$ **91** $\frac{4+2i}{6+i}$

92 $\frac{1+i}{-2+4i}$ **93** $\frac{4}{2-3i}$ **94** $\frac{6}{\sqrt{2}-i}$



پێنگاڤێن جۆراوجۆر: دەمێ کارەب دتەنەکی ڕا دبۆرت، ڕوو بڕووی بەرگرییەکێ دبیت کو ب ئۆم دهێتە پیڤان. ئەندازیارێن کارەبێ دیتن کو یا گونجایە ڤێ بەرگرییێ Z ب ژمارەیێن ئاویتە دەربڕن. زانایێن فیزیایێ دبێژن کو بەرگرییا گشتی یا تۆرەکا کارەبا پێکدهێت ژ دوو سوورێن کارەبێ یێن تەریب کو بەرگریا وان Z_1 ، Z_2 یەکسانە سوورەکێ کارەبێ کو بەرگرییا وی یەکسانە: $Z_{eq}=\frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}$

95 بەرگرییا گشتی یا تۆرەکا کارەبێ بینەدەر کو پێکدهێت ژ دوو سوورێن تەریب، بەرگریا ئێکێ دبیتە $Z_1=3+2i$ و بەرگرییا دووێ دبیتە $Z_2=1-2i$

96 بەرگرییا گشتی یا تۆرەکا کارەبێ بینەدەر کو پێکدهێت ژ دوو سوورێن تەریب، بەرگرییا ئێکێ دبیتە $Z_1=2+2i$ و بەرگرییا دووێ دبیتە: $Z_2=4-i$

بێژە ئەرێ هەر دەستەواژەیەکا ل خوارێ، هەرجار یا دروستە، هندەك جاران یا دروستە، هەرجار یا خەلەتە. هەکەر دەستەواژە هندەك جاران یا دروست بیت، نموونەیەکێ بینە کو دەستەواژە یا دروست بیت و نموونەیەکا دی بینە کو یا خەلەت بیت. هەکەر دەستەواژە یا خەلەت بیت، نموونەیەکێ ل سەر بینە.

97 سەرجەمێ هەر ژمارەیەکا ئاویتە $a+bi$ و ئاولێ وی، دبیتە ژمارەیەکا ڕاستی.

98 جوداهی دناڤبەرا ژمارەیا ئاویتە $a+bi$ $(b\neq 0)$ و ئاولێ وی، دبیتە ژمارەیەکا ڕاستی.

99 ئەنجامێ لێکدانا ژمارەیەکا ئاویتە $a+bi$ $(b\neq 0)$و ئاولێ وی، دبیتە ژمارەیەکا ڕاستی یا مووجەب.

100 ئەنجامێ لێکدانا ژمارەیەکا خەیالی bi $(b\neq 0)$ ل ژمارەیەکا دی di $(d\neq 0)$دبیتە ژمارەیەکا راستی یا پۆزەتیڤ.

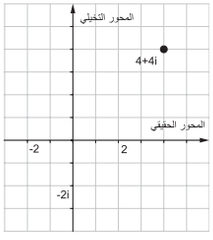
101 **خەلەتی د شیکارکرنێدا:** ئەڤێن ل خوارێ دوو بزاڤن بۆ نڤیسینا ژمارەیا ئاویتە $\frac{3}{2+i}$ ب سادەترین شێوە. کیژ ژ هەردوو بزاڤان یا خەلەتە. خەلەتیێ دیاربکە.

أ
$$\frac{3}{2+i}=\frac{3}{2+i}\times\frac{(2+i)}{(2+i)}$$
$$=\frac{6+3i}{4+i^2}$$
$$=\frac{6+3i}{3}=2+i$$

ب
$$\frac{3}{2+i}=\frac{3}{2+i}\times\frac{(2-i)}{(2-i)}$$
$$=\frac{6-3i}{4-i^2}$$
$$=\frac{6-3i}{5}$$

102 **هزرکرنا ڕەخنەگر:** بۆچی ڕووتێ ژمارەیەکا ئاویتە یەکسانە ڕووتێ ئاولێ وی؟ نواندن ب وێنەیێ ڕۆنکرنێ بکاربینە بۆ ڕوونکرنا بەرسڤێ.

103 **بنڤیسە:** پەیوەندیا ل ناڤبەرا جیاوازیا دوو دوجایان $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ و ئەنجامێ لێکدانا ژمارەیەکا ئاویتە ل ئاولێ وی گەنگەشە بکە.

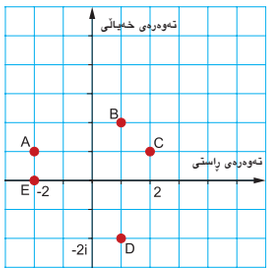


104 تو فێربووی کا چەوا دێ دوو ژمارەیێن ئاویتە ب وێنەیێ ڕۆنکرنێ کۆمکەی.

أ سێ جۆتێن ژمارەیێن ئاویتە بینەدەر کو سەرجەمێ هەرئێك ژ وان: $4+4i$

ب کردارا کۆمکرنێ بۆ هەرئێك ژ وان د ڕووتەختێ ئاویتەدا ڕۆنبکە.

ج ئەوا ب دەست تە کەفتی وەسفبکە.



هێلکاریٚ ڕۆنکرنیٚ یێ بەرامبەر بۆ شیکارکرنا هەردوو ڕاهێنانێن **105** و **106** بکاربینە.

105 کیژ خال د شێوەیدا، ژمارە $2i-1$ دنوێنیت؟

أ) خالا A ب) خالا B ج) خالا C د) خالا D

106 کیژ ژمارەیا ئاوێتە خالا E دنوێنیت؟

أ) -2 ب) 2 ج) $-2i$ د) $2i$

107 کیژ ڤان ژمارەیێن ئاوێتە یێن ل خوارێ، دبیتە سادەترین شێوە بۆ بڕێ $(2-5i)-(2+5i)$؟

أ) $10i$ ب) $4+10i$ ج) $-10i$ د) $4-10i$

108 کیژ ڤان ژمارەیێن ئاوێتە یێن ل خوارێ، دبیتە سادەترین شێوە بۆ بڕێ: $(-5+3i)^2$؟

أ) $16-15i$ ب) $16-30i$ ج) $34-15i$ د) $34-30i$

بەرهنگاری و بەرفرەهکرن....

109 ئەوا تو دزانی ژ هێزێن یەکەیا خەیالی i بکاربینە بۆ شیکارکرنا راهێنانێ.

أ خشتەی تەمامبکە و شێوازەکی بینەدەر.

$i^{-5}=$ ▢	$i^{-4}=$ ▢	$i^{-3}=$ ▢	$i^{-2}=$ ▢	$i^{-1}=$ ▢	$i^{0}=$ ▢	$i^{1}=$ ▢

ب شێوازێ تە ئینایەدەر ڕۆنبکە کو ئەو یێ گرێدایە دگەل هێزێن توان سالب بۆ یەکەیا خەیالی i. ئەو بهایێن دشیاندا چنە کو ئەڤ هێزە وەربگریت؟

ج i^{-12} و i^{-37} و i^{-90} ب سادەترین شێوە بنڤیسە.

شێوەیێ گشتی ئەنجامێ ئەڤان هەردوو کرداران ل سەر ژمارەیێن تەواو بینەدەر.

110 $(a+bi)(c+di)$ **111** $\frac{a+bi}{c+di}$

پێداچوونا لۆلپێچی

112 **پارە:** خشتێ ل خوارێ مەزاختنێن دلسۆز یێن حەفتیانە بۆ کڕینا تێشتێ دیاردکەت بۆ ماوەیێ 8 حەفتیان. ئەڤان پێداییان ب وێنەیێ ڕۆنکرنێ بنوێنە. راستەهێلێ نێزیکتر بۆ ڤان خالان وێنەبکە و هاوکێشەیا وی بنڤیسە. (وانە)

ژمارەیا دانان	5	7	3	5	6	2	4	5
لێچوو (ب هزار دیناران)	10	13	8	9	8	5	10	11

لاسەنگەیێ ب جەبرێ شیکاربکە. (پۆلێن پێشتر)

113 $3x^2-6x\le 0$ **114** $10<x^2-4x-11$

115 $-6\ge 2x^2+7x-21$ **116** $3-x^2<7-5x$

دیاربکە ئەگەر دشیاندا بیت کو خشتەیێ ل خوارێ، نەخشەیەکا دوجایی دنوێنیت یان نە. ڕۆنبکە.

117

x	−2	−1	0	1
y	5	−1	−3	−1

118

x	0	2	4	6
y	18	10	2	-6

بەشی 3

ڕێبەرێ خواندنێ: پێداچوون

$$P=\begin{bmatrix}3 & -5 & 2\\ -4 & 1 & 3\end{bmatrix}\text{ ، }Q=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix}6 & -8 & 4\\ -10 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

بڕێ بینەدەر هەکەر دشیاندا بیت.

1 $P-2Q$ 2 $0.2Q$

3 $\frac{1}{2}R-\frac{1}{3}P$ 4 $\frac{1}{2}(2P+R)$

پێدایێن ل خوارێ بکاربینە بۆ شیکارکرنا راهێنانان ژ 5 هەتا 7

د هاوا پاقژکرنا سەیرانگەهەکێدا، تیما پۆلا یازدێ، 125 قۆدیکێن ڤەخوارنان و 45 پاکێت کۆمکرن. و تیما پۆلا دەهێ، 95 قۆدیك و 65 پاکێت کۆمکرن.

5 ڕێزکریێ A بکاربینە بۆ بەرچاڤکرنا پێدایێن سەری.

6 ڕێزکریێ D بنڤیسە و جوداهیا دناڤبەرا ئەوا هەردوو تیمان کۆمکری دیاربکە.

7 ڕۆژا دووێ، هەر تیمەکێ:ێ دوجارانی ئەوا ل ڕۆژا ئێکێ کۆمکری ژ هەر جۆرەکی، کۆمکر. ڕێزکرییەکێ بنڤیسە ئەوێ چەندێ دیاربکەت.

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}\text{ ، }B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\ -2 & -1 & 4\end{bmatrix}\text{ ، }C=\begin{bmatrix}4 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

بڕی بینەدەر هەکەر یا پێناسەکری بیت.

8 AB 9 CA 10 AC 11 BC

12 A^2 13 C^2 14 $(BA)^2$

15 هەردوو خشتە، بهایێن پلێتان ب دیناران دیاردکەن، ل گەل ئەوا فرۆتین د 3 ڕۆژاندا.

بهایێن پلێتان

	مەزنان	زارۆکان
سێشەمب	5 000	2 500
چوارشەمب	7 500	4 250
پێنج شەمب	9 000	5 750

پلێتێن فرۆتین

	سێشەمب	چارشەمب	پێنج شەمب
مەزنان	67	196	245
زارۆکان	104	75	154

أ پێدایێن هەر خشتەیەکێ د ڕێزکرییەکێدا ڕێکبێخە.

ب لێکدانا ڕێزکرییان بکاربینە بۆ دەرئینانا داهاتیێ هەر ڕۆژەکێ.

ج داهاتیێ هەر ڕۆژەکێ بینەدەر ژ فرۆتنا پلێتێن مەزنان و پلێتێن زارۆکان.

ڕێزکرییان بکاربینە بۆ دەرئێنانا وێنەیێ چارلایێ: $A(-2,-1)$، $B(-1,3)$، $C(2,4)$، $D(0,0)$ پێ هەر ئێك ژ ڤان جهگوهۆڕکان.

16 ڕاکێشانا دوو یەکان بۆ ڕاستێ، و یەکەیەکێ بۆ سەری.

17 مەزنکرنا چارلایی ب هاوکۆلکەیی 1.5

18 بکارئینانا ڕێزکریێ $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ جهگوهۆڕکێ وەسفبکە.

19 بکارئینانا ڕێزکریێ $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ جهگۆهۆڕکێ وەسفبکە.

20 ڕێزکریێ $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ بکاربینە بۆ جهگوهۆڕکیا سێگۆشەیا ABC کو $A(-1,-2)$ و $B(0,1)$ و $C(3,-2)$. سێگۆشەیێ و وێنەیێ وێ، وێنەبکە. جورێ جهگۆهۆڕکێ دیاربکە.

سنووردارێ ڕێزکریێ بینەدەر.

21 $\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ 22 $\begin{bmatrix}3 & 2\\ 6 & 4\end{bmatrix}$

23 $\begin{bmatrix}-0.5 & 3\\ -1 & 6\end{bmatrix}$ 24 $\begin{bmatrix}4 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 3\end{bmatrix}$

25 $\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ -1 & 5 & 3\\ 3 & -1 & -6\end{bmatrix}$ 26 $\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\ 5 & -3 & 2\\ 9 & -13 & 8\end{bmatrix}$

ڕێسایا گرامەر بکاربینە بۆ شیکارکرنا هەر سیستەمەکێ هێلی.

27 $\begin{cases}x+y=9\\ x-y=1\end{cases}$ 28 $\begin{cases}2x+5y+21=0\\ 7y+47=6x\end{cases}$

29 $\begin{cases}4.5x+3y=10.5\\ 3x+2y=7\end{cases}$ 30 $\begin{cases}5x-8y=7+7z\\ 6x-4y+10z=-34\\ 2x+4y=29+3z\end{cases}$

31 $\begin{cases}x-y+z=5\\ y-x-z=2\\ x-y+z=7\end{cases}$ 32 $\begin{cases}y-2.4x=0.8\\ 3x+0.5z=2.25\\ 3.5y+z=8.5\end{cases}$

33 خالا ئێکدووبڕینا هەردوو راستەهێلێن $2x+3y=8$ و $y=x+1$ بینەدەر.

أ ڕێزکریێ هاوکۆلکەیان بنڤیسە و سنووردارێ وێ هەژماربکە.

ب سیستەمی شیکاربکە بکارئینانا ڕێسایا گرامەر.

هەلگەڕاوێ ڕێزکریێ بینەدەر.

34 $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

35 $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

36 $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2.5 \end{bmatrix}$

37 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

38 $\begin{bmatrix} -1.5 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0.5 \end{bmatrix}$

39 $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -1 \end{bmatrix}$

سیستەمێ هێلی بکارئینانا ڕێزکریان بنڤیسە، پاشی شیکاربکە.

40 $\begin{cases} \frac{3}{2}x = 20 + y \\ x + 6y = 80 \end{cases}$

41 $\begin{cases} x = 1 + y \\ x + y = 9 \end{cases}$

42 $\begin{cases} 2x + 9 = 2z \\ 5x + y + 32 = 7z \\ 2(3x + y) = 8z - 39 \end{cases}$

43 $\begin{cases} 2x + 9 = 2z \\ 5x + y + 32 = 7z \\ 2(3x + y) = 8z - 39 \end{cases}$

44 دوکانەکا فرۆتنا پلێتان دیاریان، ددەتە بکران. دیاریەکا بچووك بهایێ وێ 5000 دینار ددەتە وی بکرێ بهایێن کرینێن وی دناڤبەرا 25 000 و 74 999 دیناراندا بیت. و دیاریەکا ناڤنجی، بهایێ وێ 8 000 ددەتە وی بکرێ بهایێن کرینێن وی دناڤبەرا 75 000 و 149 999 دیناراندا بیت. و دیاریەکا مەزن بهایێ وێ 12 500 دینار ددەتە وی بکرێ کرینێن وی ژ 150 000 دیناران کێمتر نەبیت. دوکانێ 102 دیاری پێشکێشکرن، کو بهایێ وان گەهشتە 654 000 دیناران، و ژمارەیا دیاریێن بچووك 6 جارانی ژمارەیا دیاریێن مەزنبوو.

أ سیستەمێ هاوکێشەیان بنڤیسە دەربڕینێ ژ پرسیارێ بکەت.

ب ڕێسایا هاوکێشەیا گرامەر بکاربینە بۆ شیکارکرن و دیارکرنا ژمارەیا دیاریان ژ هەر جۆرەکی.

هاوکێشەیێ شیکاربکە.

45 $x^2 = -81$

46 $6x^2 + 150 = 0$

47 $x^2 + 6x + 10 = 0$

48 $x^2 + 12x + 45 = 0$

49 $x^2 - 14x + 75 = 0$

50 $x^2 - 22x + 133 = 0$

ئاولێ هەر ژمارەیەکا ئاوێتە بینەدەر.

51 $5i - 4$

52 $3 + i\sqrt{5}$

بهایێ ڕووت بهەژمێرە.

53 $|-3i|$

54 $|4 - 2i|$

55 $|12 - 16i|$

56 $|7i|$

بڕێ ل سەر شێوەیێ $a + bi$ بنڤیسە.

57 $(1 + 5i) + (6 - i)$

58 $(9 + 4i) - (3 + 2i)$

59 $(5 - i) - (11 - i)$

60 $-5i(3 - 4i)$

61 $(5 - 2i)(6 + 8i)$

62 $(3 + 2i)(3 - 2i)$

63 $(4 + i)(1 - 5i)$

64 $(-7 + 4i)(3 + 9i)$

65 i^{32}

66 $-5i^{21}$

67 $\frac{2+9i}{-2i}$

68 $\frac{5+2i}{3-4i}$

69 $\frac{-12+26i}{2+4i}$

70 $\frac{8-4i}{1+i}$

بەشی 3

ئەزموونا بەشی

پێدایێن خشتەی بکاربینە بۆ شیکارکرنا ڕاهێنانان ژ 1 هەتا 4.

دیاری				
	پلەیا ئێکێ	پلەیا دووێ	پلەیا سێیێ	سەرجەمێ خالان
مەیان	5	1	2	41
شاهناز	3	5	1	42
شیرین	3	4	1	29

1 ڕێزکرییەکێ بکاربینە پێدایێن خشتەی دیار بکەن.

2 جۆرێ ڕێزکێ چییە؟

3 بهایێ دانەیێ a_{31} چەندە؟

4 ناڤونیشانێ ئەوی دانەیێ بهایێ وی 2 چەندە؟

ڕێزکرییان ل پرسیارێن 5 هەتا 10. بکاربینە. ئەنجامان هەژمار بکە هەکەر یا دشیاندا بیت.

$$E=\begin{bmatrix}2&3\\-1&0\\4&1\end{bmatrix},\ F=\begin{bmatrix}4&-2&0\\-1&1&-2\end{bmatrix},\ G=\begin{bmatrix}2&-1\\3&1\end{bmatrix}$$

$$H=\begin{bmatrix}-2&1\\3&0\\5&-1\end{bmatrix},\ J=\begin{bmatrix}1&-5&6\end{bmatrix},\ K=\begin{bmatrix}7\\0\\-2\end{bmatrix}$$

5 $E+F$ 6 EF 7 FE

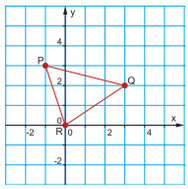
8 H^2 9 G^3 10 FK

ڕێزکرییێ بکاربینە بۆ جهگوهۆڕکیا سێگوشەیا PQR ب جهگوهۆڕکا دیارکری.

11 ڕاکێشانا دوو یەکان بۆ سەری و یەکەکێ بۆ ڕاستی.

12 مەزنکرن ب ڕێژەیا $\frac{3}{2}$.

13 جهگوهۆڕکا ب ڕێزکرییێ $\begin{bmatrix}0&2\\2&0\end{bmatrix}$ ڕێزکری و وێنەیێ وی وەسفبکە.



سنووردارێ ڕێزکرییێ بینەدەر.

14 $\begin{bmatrix}4&0\\0&-3\end{bmatrix}$ 15 $\begin{bmatrix}0.25&1\\2&8\end{bmatrix}$

16 $\begin{bmatrix}3&-1\\-2&-1\end{bmatrix}$ 17 $\begin{bmatrix}1&-2&3\\3&-1&-3\\2&1&5\end{bmatrix}$

سیستەمی بکارئینانا ڕێسایا گرامەر شیکاربکە.

18 $\begin{cases}x+2y=1\\3x-y=10\end{cases}$ 19 $\begin{cases}x+3z=3+2y\\3x+22=y+3z\\2x+y+5z=8\end{cases}$

هەلگەڕاوێ ڕێزکرییێ بینەدەر هەکەر یا دشیاندا بیت.

20 $\begin{bmatrix}2&0.7\\4&1.4\end{bmatrix}$ 21 $\begin{bmatrix}3&-1\\1&3\end{bmatrix}$

22 $\begin{bmatrix}3&1\\2&-1\end{bmatrix}$ 23 $\begin{bmatrix}3&2&-1\\2&3&-5\\1&4&2\end{bmatrix}$

24 بهایێ $2.5\,kg$ ژ هەژیران و $1.5\,kg$ ژ قەسپان دبیتە 14 420 دینار. و بهایێ $3.5\,kg$ ژ هەژیران و $1\,kg$ ژ قەسپان دبیتە 16 910 دینار. ڕێزکرییێ بکاربینە بۆ دەرئینانا بهایێ $1\,kg$ ژ هەر جۆرەکی.

سیستەمێ هێلی ل سەر شێوەیێ ڕێزکرییێ بنڤیسە، پاشی شیکاربکە هەکەر یا دشیاندا بیت.

25 $\begin{cases}6x+y=2\\3x-2y+1=0\end{cases}$ 26 $\begin{cases}5x-2y=3\\2.5x-y=1.5\end{cases}$

27 $\begin{cases}x+2y=3.5\\3x=2.7+y\end{cases}$ 28 $\begin{cases}2x-z=3+y\\x+2=y+5\\4z+x+y=1\end{cases}$

بڕێ ل سەر شێوەیێ $a+bi$ بنڤیسە.

29 $(1-2i)-(5+2i)$ 30 $(6-2i)(2-2i)$

31 $-2i^{18}$ 32 $\frac{1-8i}{4i}$

هاوکێشەیێ شیکار بکە.

33 $x^2+25=0$ 34 $x^2+12x=-40$

35 $(x-1)^2+7=0$ 36 $2x^2-x+5=0$

ئاولێ ژمارەیا ئاوێتە بینەدەر.

37 $5+3i$ 38 $6-7i$ 39 $-2+i\sqrt{2}$

بەشێ 3

ئەزموونا کەلۆکی

1 ژییێ هەلزێ دوو ساڵان ژ 4 جارانی ژییێ هێرش کێمترە و ژییێ سەرداری 6 ساڵان ژ نیف ژییێ هەلزێ زێدەترە. هێمایێ x بۆ ژییێ هێرش بکاربینە و هێمایێ y بۆ ژییێ هەلزێ. کیژ بڕ ژییێ سەردار دنوێنیت؟

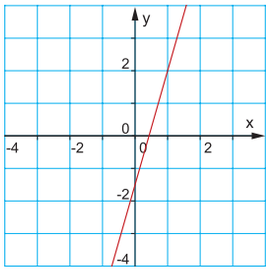
أ) $\frac{1}{2}x+6$

ب) $2x+5$

ج) $4x+\frac{1}{2}y+4$

د) $\frac{1}{2}(4x+2)-6$

2 وێنەیێ رۆنکرنێ راستەهێلەکی دیاردکەت، کو ئەو دبیتە هێلا سنووری بۆ دەڤەرا شیکارێ یا لاسەنگیا هێلی. هەردوو جوتێن رێکخستی: $(21, 83)$ و $(16, 62)$ نە ژ کۆمەلەیا شیکارێنە. کیژ یا دروستە؟



أ) دڤێت هێلا سنووری یا خالدار بیت و دەڤەرا دکەڤتە ژۆریا هێلێ بهێتە تاریکرن.

ب) دڤێت هێلا سنووری یا بەردەوام بیت و دڤێت دەڤەرا دکەڤتە ژۆریا هێلێ بهێتە تاریکرن (ڕەنگکرن).

ج) دڤێت هێلا سنووری یا خالدار بیت و دڤێت دەڤەرا دکەڤتە ژێر هێلێ بهێتە تاریکرن. [

د) دڤێت هێلا سنووری یا بەردەوام بیت و دڤێت دەڤەرا دکەڤتە ژێر هێلێ بهێتە تاریکرن.

3 کیژ بڕێ ڕێزکریێ یەکسان $\begin{bmatrix}2 & -4\\ 11 & 14\end{bmatrix}$ ؟

أ) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & -8\\ 22 & 28\end{bmatrix}$ ب) $2\begin{bmatrix}0 & -6\\ 9 & 12\end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & -4\\ 11 & 14\end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix}8 & -13\\ -3 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-6 & 17\\ 8 & 10\end{bmatrix}$

4 لەزا فرۆکەیا $X-43A$ ئەوا ئاژانسا ئەسمانی یا ئەمریکی (ناسا) دروستکری، گەهشتە لەزا 7 ماك ئانکو 7 جارانی لەزا دەنگی، ئانکو فرۆکە دشێت 16 میلان ب 12 چرکەیان ببڕیت. کیژ ڤان نەخشەیێن ل خوارێ ئەوا دووریا فرۆکە دبڕیت پێ دەمی دنوێنیت هەکەر ب لەزا 7 ماك بفڕیت؟

أ) $f(s)=16x+12s$ ب) $f(s)=\frac{3}{4}s$

ج) $f(s)=16s$ د) $f(s)=1\frac{1}{3}s$

5 دلشادی پشکداری د کۆنگرەکیدا کر، و د گەلەك ووركشۆپاندا کارکر. دلشادی ئەو ووركشۆپێن پشکداری تێدا کرین هەلسەنگاندن ب داناانا نمرەیان ژ 1 – 10. خشتەیێ ل خوارێ دەمێ هەر ووركشۆپەکێ و هەلسەنگاندنا دلشادی بۆ وان دیار دکەت.

ژمارەیا خۆلەکان	53	93	48	120	32
هەلسەنگاندن	7	4	5	9	8

هاوکۆلکێ پێکڤەگرێدانێ ل ناڤبەرا دەمێ ووركشۆپێ و هەلسەنگاندنا دلشادی چەندە، نێزیککری بۆ نێزیکترین بەش ژ سەدێ؟

أ) 0.01 ب) 0.12

ج) 0.88 د) 0.13

6 $M=\begin{bmatrix}6 & -2\\ 3 & 7\end{bmatrix}$ و $N=\begin{bmatrix}-1 & 8 & 2\\ 0 & 1 & 6\end{bmatrix}$. کیژ ئەڤێن دئێن د بیتە ڕێزکریێ $2MN$؟

أ) $\begin{bmatrix}0 & 184 & -24\\ 192 & 124 & -12\end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix}0 & 92 & -12\\ 96 & 62 & -6\end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix}-24 & -12\\ 184 & 124\\ 0 & 192\end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix}-12 & -6\\ 92 & 62\\ 0 & 96\end{bmatrix}$

7 ئەڤ ئێکدوبڕینێن ل خوارێ دگەل تەوەرێن پۆتان، یێن کیژ ڕووتەختێن پۆتانن: $(20, 0, 0)$ ، $(0, 40, 0)$ ، $(0, 0, 5)$.

أ) $20x+40y+5z=0$ ب) $20x+40y+5z=1$

ج) $4x+8y+z=5$ د) $2x+y+8z=40$

8 کیژ ئەڤێن ل خوارێ یەکسانە بڕێ $\frac{5(6-8i)}{2-i}$ ؟

أ) $-20+10i$ ب) $15-8i$

ج) $15-40i$ د) $20-10i$

9 کیژ ئەڤێن ل خوارێ دبیتە هەلگەڕاوێ ڕێزکریێ $\begin{bmatrix}-2 & -4\\ 4 & 2\end{bmatrix}$ ؟

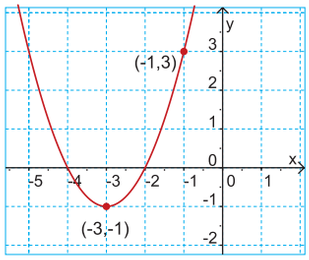
أ) $\begin{bmatrix}-\frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix}2 & 4\\ -4 & -2\end{bmatrix}$

10 کیژ ئەڤێن ل خوارێ دبیتە هاوکێشەیا نەخشەیا وێنەیێ دیارکری؟

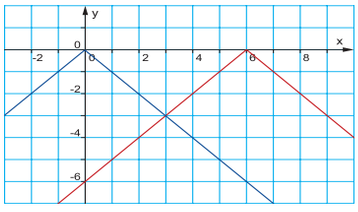
أ) $y=(x-3)^2-1$ ب) $y=(x+3)^2-1$

ج) $y=(x-1)^2-3$ د) $y=(x+1)^2-3$



بەرسڤەکا کورت

11 هەردوو هێلکاریێن نەخشەیێن: $f(x)=-|x|$ و $g(x)=f(x-h)$ بپشکنە. بهایێ h چەندە؟



12 ڕێزکرییەکێ بکاربینە بۆ جهگوهۆرکیا سێگۆشەیێ ABC کو $A(-1,0)$ ، $B(4,3)$ ، $C(2,-1)$ بیت.

أ) $A'B'C'$ وێنەیێ ڕاکێشانا سێگۆشەیا ABC بیت ب ئێك یەکە بۆ ڕاستێ، و 4 یەکە بۆ سەری. پۆتانێن سەرێن سێگۆشەیا $A'B'C'$ بینەدەر.

ب) $A''B''C''$ وێنەیێ $A'B'C'$ ب وێنەدانەوە ل دۆر تەوەرێ دووێ. پۆتانێن سەرێن سێگۆشەیا $A''B''C''$ بینەدەر.

13 سنووردارێ ڕێزکریێ $\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & -1\\ 0.4 & 10\end{bmatrix}$ بینەدەر.

14 خشتەیێ ل خوارێ، کرێیا ڕاوەستاندنا ترومبێلان ل پارکا فرۆکەخانەکێ دیار دکەت. لارێ نەخشەیا هێلی چیبە ئەوا کرێیا ڕاوەستاندنا ترومبێلان دنوێنیت پێ ماوەیێ ڕاوەستاندنێ ب دەمژمێران؟

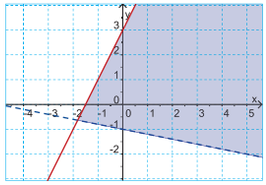
دەم	1	3	5	7
کرێ	3350	5050	6750	8450

15 کیژ بهایێ گۆراوێ c ، وەسا ل سیستەمێ هێلی $\begin{cases}2y-x+10=0\\ 3x-6y-c=16\end{cases}$ دکەت کو بێ سنووردار بیت.

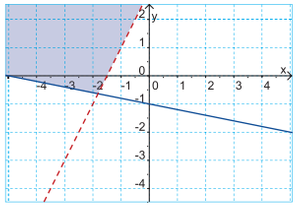
بەرسڤەکا ڕاستەوخۆ

16 سیستەمەکێ لاسەنگەیان بنڤیسە کو ئەڤ وێنەیێ ڕۆنکرنێ ل خوارێ ببیتە شیکارا وی.

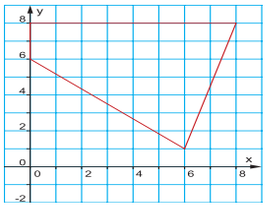
أ)



ب)



17 جوداهیێ دناڤبەرا هەردوو سیستەماندا ڕۆنکە د ڕاهێنانا بۆریدا.



أ) مەرجێن ڤێ پرسیارێ بنڤیسە.

ب) مەزنترین بها بۆ نەخشەیا قازانجی $P=3x-4y$ د ڤێ پرسیارێ دا بینەدەر.

بەرسڤا درێژ

18 هاوکێشەیا هێلی: $2x-3y=-15$ بکاربینە.

أ) ڕۆنبکە چەوا دێ ڤێ هاوکێشەیێ نڤیسی ل شێوەیێ لاری – ئێکدووبڕین.

ب) ئەگەر چیبە کو شێوەیێ لاری – ئێکدووبڕین باشترین شیوەیە بۆ نڤیسینا ڤی جۆرێ هاوکێشەیان، بەری وێنەکرنا وی ڕاستەهێلێ ئەوێ دنوێنیت؟

ج) پێنگاڤێن وێنەکرنا ڕاستەهێلێ ئەڤێ هاوکێشەیێ دنوێنیت، ئێك ب ئێك ڕۆنبکە.

بەشێ

4

نەخشەیێن توانی و لۆگاریتمی

Exponential and Logarithmic Functions

بەشێ چواریێ

وانە

4–1 نەخشەیێن توانی و گەشە بوون و نزمبوون.
دیارکرنا نەخشەیا بەرۆڤاژی
لاپەڕێ تەکنۆلۆژیا
4–2 نەخشەیا بەرۆڤاژی
4–3 نەخشەیێن لۆگاریتمی

ئەزموونا نیڤا بەشی

4–4 سیفەتێن لۆگاریتمێ
4–5 لۆگاریتما سروشتی
4–6 هاوکێشە و لاسەنگەیێن توانی و لۆگاریتمی.
4–7 نموونەیێن توانی و لۆگاریتمی.

e د کڤانیدا بهەژمێرە

کڤانا دەرگەهی ل باژێرێ سانت لویس ل ئەمریکا، ژ بلندترین جهێن ب ناڤ و دەنگێن ئەمریکانە. ڤێ کڤانێ شێوەیەکێ چەماوەیی وەکی برگەیێ هاوتا هەیە. ئەڤان جۆرە چەماوەیان د پرۆژەیێ بەشیدا دێ خوینی.

ئەرێ تو یێ ئامادەی؟

زاراف

هەر زاراڤەکی دگەل پێناسا وێ یا ل ڕەخێ چەپێ هاتی گرێدە.

1. نەگۆڕ
2. نەخشە
3. پەیوەندی
4. گۆڕاو

أ. هێمایەکە دهێتە بکارئینان بۆ نواندنا ژمارەیەکێ چێدبیت گەلەك بهایان وەربگریت.

ب. کۆمەلا ژمارەیێن بکاردهێن د هەژمارتن و بەرۆڤاژیێن واندا.

ج. پەیوەندییەکە هەر بهایەکێ گۆڕاوێ ئازاد گرێددەت دگەل بهایەکی ب تنێ ژ گۆڕاوێ پەیوەست.

د. ڕادەیەکە گۆڕاو تێدا نینن.

هـ. کۆمەڵەکا جوتێن ڕێکخستییە.

سیفەتێن هێزان

بڕێ ب سادەترین شێوە بنڤیسە.

5. $x^{-2}\left(x^{3}\right)(x)$
6. $3y^{-1}\left(5x^{2}y^{2}\right)$
7. $\frac{a^{8}}{a^{2}}$
8. $y^{15}\div y^{10}$
9. $\frac{x^{2}y^{5}}{xy^{6}}$
10. $\left(\frac{x}{3}\right)^{-3}$
11. $(3x)^{2}\left(4x^{3}\right)$
12. $\frac{a^{-2}b^{3}}{a^{4}b^{-1}}$

قازانجێ سادە

یاسایا قازانجێ سادە $I=Prt$ بکاربینە. کو I هێمایێ قازانجێیە و P هێمایێ کوژمێ بنەرەتە و r هێمایێ ڕێژەیا قازانجێ سالانەیە، t دەمە ب سالان.

13. قازانجێ کوژمێ 30 مەلیۆن دیناران بینەدەر، هەکەر بۆ دوو سالان تەرخانکری بیت و ب قازانجەکێ سالانە کو ڕێژەیا وی3% بیت.
14. ڕێژەیا قازانجی سالانە بینەدەر بۆ کوژمێ 2 مەلیۆن دیناران هەکەر بۆ دوو سالان تەرخانکری بیت و قازانجی وێ گەهشتبتە 90 000 دیناران.
15. کاروانی کوژمەکێ پارەی ژ بانکێ قەر کر بۆ ماوێ 3 سالان ، و ب قازانجەکی سادە ڕێژەیا وی 6% . بهایێ وی قەری چەندە هەکەر بزانی کو پارەیێ گشتی یێ کاروان دایی 5310 مەلیۆن دینار بوو؟

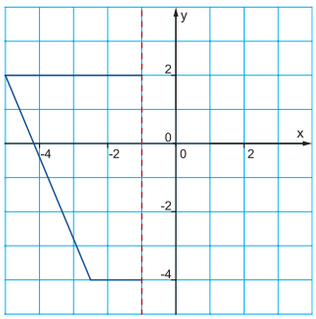
شیکارکرنا هاوکێشەیەکێ پێ گۆڕاوەکی

بهایێ گۆڕاوێ x بهەژمێرە پێ گۆڕاویێن دی.

16. $3x-y=4$
17. $y=-7x+3$
18. $\frac{x}{2}=3y-4$
19. $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$

هاوجێبوون

20. وێنەیێ بەرامبەر دوبارە وێنەبکە و تەمامبکە بکارئینانا تەوەرێ سۆر یێ هاوجێبوونێ.



شێوەیێ زانستی

ل سەر شێوەیێ زانستی بنڤیسە.

21. 7 000 000 000
22. 0.0000000093
23. 16.75

بەشێ 4

ڕێبەرێ خواندنێ: لێنێرینەك بۆ بەشی

ل دەمێ بۆری

تە ئەڤە خواند بوو

- بکارئینانا سیفەتێن هێزان بۆ نڤیسینا بڕەکی ب سادەترین شێوە.
- ئەنجامدانا کردارێن بەرۆڤاژی.
- شیکارکرنا ئەوان پرسیارێن نەخشەیێن هێلی و دوجایی و رادەداران ب خوەڤە دگرن.

د ڤی بەشیدا

دێ فێری ئەڤان بی

- نەخشەیێن توانی.
- لۆگاریتم و نەخشەیێن بەرۆڤاژی.
- شیکارکرنا ئەوان پرسیارێن نەخشەیێن توانی یان لۆگاریتمی ب خوەڤە دگرن .

د ئایندە دا

تو دشێی شارەزاییێن ڤی بەشی بکاربینی

- بۆ شیکارکرنا ئەوان پرسیارێن قازانجێ ئاوێتە ب خۆڤە دگرن.
- د بوارێن زانستی دا، وەکی زیندەزانی و کۆمەڵناسی، کو پێدایی دهێنە کومکرن و ڕێکخستن و شیتەلکرن.
- د قۆناغێن بلندتر دا کو ئامار و بیرکاریا کاری وەردگرن.

زاراڤ — Vocabulary

Asymptote	دەرکنار
Base	بنچینە
Common logarithm	لۆگاریتما ئاسایی
Exponential equation	هاوکێشەیا توانی
Inverse function	نەخشەیا بەرۆڤاژی
Logarithmic equation	هاوکێشەیا لۆگاریتمی
Logarithmic function	نەخشەیا لۆگاریتمی
Natural logarithm	لۆگاریتما سروشتی

ڕۆناهییەك ل سەر زاراڤان

دا شارەزابی ل زاراڤێن دڤی بەشیدا هاتین، ئەڤان پێنگاڤان پەیڕەو بکە:

1. تو دشێی هزرا خۆ د **بنچینەی** دا بکەی وەك ئاولەك بۆ توانێ، کێژ ژمارە دبیتە بنچینە د ژمارە 10^3 دا
2. **لۆگاریتما دەهێ** (ئاسایی) دبیتە توان د هێزا ژمارە 10دا. بهایێ لۆگاریتما ئاسایی بۆ ژمارە 1000 چەندە.
3. ل کیڤە پێشبینینا هەژمارتنا کۆڕاوێ x دکەی د **هاوکێشەیەکا توانیدا**؟
4. دابەشکرن دبیتە کردارا بەرۆڤاژی یا لێکدانێ. چەوا پێشبینیا کارتێکرنا نەخشەیەکا دایی دکەی ل سەر وێ نەخشەیێ.
5. بنچینەیێ **لۆگاریتما ئاسایی** دبیتە ژمارە e, کێژ بهایێ دی یێ نەگۆری هێمایێ وی پیتێ وەردگرت؟
6. پەیڤا Asymptote پەیڤەکا یۆنانیە و ڕامانا وێ نەپێکگەهشتنە. چەوا پەیوەندیا ل نافبەرا چەماوەیەکی و **ڕاستەهیلەکێ دەرکنارێ** وی دبینی؟

بەشێ
4

بیرکاری
ب خواندن و نڤیسینێ

ستراتیژییێن خواندنێ: شیڤازێ خو بکاربینە

دەمێ بیرۆکەکا(تێگەهەك) ب زەحمەت یا بیرکاریێ دخوینی، ئەوێ بیرۆکێ دوبارە بنڤیسە ب شیڤازێ خو. ئەڤ چەندە دێ هاریکاریا تە کەت بۆ تێگەهشتنەکا باشتر . و باشترە هەکەر نموونەیەکێ ژ نك خو بینی بۆ رۆنکرنا وێ بیرۆکێ.

پلەیا ڕادەداریێ دیاردبیت بکارئینانا رادەیێ پلەیا وی بلندتر. رادەداریێ ئێك گۆڕاوی ل سەر شیڤەیێ گشتی نڤیسیە، دەمێ رادەییێن وێ بەرەڤ خوارێ ڕێزکریبن ل دویڤ پلەییێن وان، ئانکو دەمێ ڕادەدار ل سەر شیڤەیێ گشتی نڤیسیبیت، دێ پلەیا رادەیێ ئێکێ بیتە پلەیا ڕادەداریێ، و هاوکۆلکێ رادەیێ ئێکێ دێ بیتە هاوکۆلکێ سەرەکی یێ رادەداریێ .

ڕادەدار

1. پلەیا ڕادەداریێ پلەیا بلندترین رادەییە
2. شیڤەیێ گشتی: ڕادە بەرەڤ خواریێ د ڕێزکرینە ل دویڤ پلەییێن وان.
3. د شیڤەیێ گشتیدا. پلەیا ڕادەیێ ئێکێ دبیتە پلەیا رادەداریێ.
4. هاوکۆلکێ رادەیێ ئێکێ دبیتە هاوکۆلکێ سەرەکی.

بنڤیسە برگەیا بۆری بکارئینانا ڕستەییێن کورت بۆ رۆنکرنا بیرۆکێن گرنگ ئەوێن رادەداران ب خۆڤە دگرن.

پشتڕاستبوون نموونەیەکێ شرۆڤەبکە کو دەق و بیرکاریێ پێکڤەگرێدەت.

نموونە:شیڤەیێ گشتی $2x^4 - 5x^3 + 3x - 9x + 10$
پلەیا ڕادەداریێ : 4
هاوکۆلکێ سەرەکی: 2

هەولبدە

برگەیا دهێت بخوینە و دوبارە بنڤێسە ب شیڤازێ خۆ.

سەلمێنراوا رەگێ نە ڕێژەیێ دبێژیت : رەگێن نەڕێژەیی یێن هاوکێشەیەکا هاوکۆلکێن وێ ژمارەییێن ڕێژەیی، دبنە ئاولێن ئێکودوو. بۆ نموونە ئەگەر تە زانی $1+\sqrt{2}$ رەگەکە ژ رەگێن هاوکێشەیا $x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$ دێ بێژی کو $1-\sqrt{2}$ژی رەگەکە ژ رەگێن وێ

ل بیرا تە بیت کو ژمارەییێن راستی دوو جۆرن ژمارەییێن ڕێژەیی و ژمارەییێن نەڕێژەیی. تو دشێی سەلمێنراوا ڕەگێ ڕێژەیی و سەلمێنراوا نە ڕێژەیی پێکڤە بکاربینی دا هەموو رەگێن هاوکێشەیا $P(x) = 0$ بینەدەر .

1-4

نەخشەییێن توانی و گەشەبوون و نزمبوون

Exponential Functions, Growth and Decay

ئارمانج

• برێن توانی دێ نڤیسن بۆ تواندنا باڕێن گەشەبوون و نزمبوونێ، و ئەوان برِان دێ هەژمێرن.

کێ ئەڤێ بکاردئینیت؟

ئەوێن تشتێن سەیر کۆمدکن دشێن نەخشەییێن توانێ بکاربینن بۆ پێکئینانا نموونەیەکی کو بهایێن وان تشتێن خرِڤەدکەن بنوێنت، وەکی ئامیرێن مۆزیکێ یێن کەڤن (نموونە 2).

زاراڤ
Vocabulary

نەخشەیا توانی
Exponetial function

بنچینە
Base

دەرکنار
Asymptote

گەشەبوونا توانی
Exponential growth

نزمبوونا توانی
Exponential decay

یاسا یا مۆر Moore ئەوا د ییشەسازیا کۆمپیوتەراندا بکاردهێت دبێژیت: ژمارِیا ترانسیستۆرێن د هەر کۆمپیوتەرەکیدا ، سالانە دوجاران دبیت. خشتەیێ ل خوارێ، ژمارەییێن نێزیککری تێدانە ل دۆر زێدەبوونا ژمارا ترانسیستۆران ژ دەسپێکا ڤێ پیشەسازیێ.

ژمارەیا ترانسیستۆران د هەر پێکهاتەکیدا							
سالّ	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971
ژمارە	60	120	240	480	960	1920	3840
		× 2	× 2	× 2	× 2	× 2	× 2

ئەم دشێین زێدەبوونا ل هەر سالەکێ دووجاران دبیت بنوینین، بکارئینانا نەخشەیەکا گۆڕاوەك د توان وێدا هەبیت. ئەڤ جۆرە نەخشەیە دبێژنێ: **نەخشەییێن توانی Exponential functions**، نەخشەیا بنەرەت بۆ نەخشەییێن توانی دبیتە نەخشەیا : $f(x)=b^x$ ، کو **b Base بنچینەیە** ژمارەیەکا نەگۆرە و توان x گۆڕاوێ ئازادە.

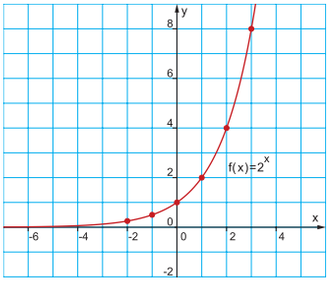
توان بنچینە

$f(x)=b^x$ و $b>0, b\neq 1$

ل بیرا تەبیت

د پەیوەندیا $y=b^x$، y گۆڕاوەکێ پەیوەستە بۆ گۆڕاوێ x چونکی بهایێ y ب بهایێ x دهێتە دیارکرن.

وێنەیێ بەرامبەر، هێلکارێ نەخشەیا توانی یا بنەرەت دیاردکەت $f(x)=2^x$. بواری ڤێ نەخشێ دبیتە هەموو کۆمەلایا ژمارەییێن راستی، لێ مەودایێ وێ دبیتە کۆمەلەیا ژمارەییێن راستی یێن موجەب. $\{y/y>0\}$



x	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)=2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

تێبینی بکە کو هێلکارێ نەخشەیێ نێزیکی تەوەرێ ئێکێ دبیت چەند بهایێن x کێمبن. هەروەسا تێبینی بکە کو هێلکار ب تەوەرێ ئێکێ ناکەڤیت و هەر ل ژۆریا وی دمینیت چونکی بهایێ برِێ 2^x هەر موجەب دمینیت بۆ هەمی بهایێن x . تەوەرێ ئێکێ دبیتە **دەرکناری ئاسۆیی** بۆ هێلکارێ نەخشەیا $f(x)=2^x$. **دەرکنار Asymptote** راستەهیلەکە، هێلکارێ نەخشێ نێزیکی وی دبیت هەر چەند بهایێن x گەلەك مەزن ببن یان گەلەك بچووك ببن.

هەر نەخشەیەك $f(x)=ab^x$ ، کو $a>0$ و $b>1$ نەخشەیەکا **گەشەبوونا تواییە Exponential growth** بهایێ وێ زێدە دبیت ب زێدەبوونا بهایێ x لێ هەگەر $0<b<1$ ، نەخشەیا $f(x)=ab^x$ دێ بیتە نەخشەیەکا بەرەڤ **کێمبوونا توانی Exponential decay** و بهایێ وێ کێم دبیت ب زێدەبوونا بهایێ x .

نموونـــــه 1 ویَنەکرنا هێلکاریێن نەخشەیێن توانی

بێژە ئەرێ نەخشە، نەخشەیەکا گەشەبوونا توانییە یان نزمبوونا توانییە، پاشی هێلکارێ وێ وێنە بکە؟

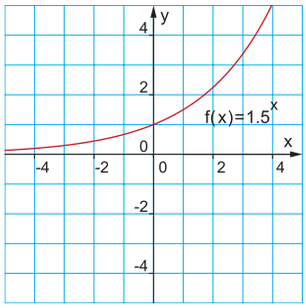
أ $f(x)=1.5^x$

پێنگاڤا (1)ێ بهایێ بنچینەی بینەدەر

$f(x)=1.5^x$ بنچینە1.5 مەزنتر ژ 1 ، نەخشە، نەخشەیەکا گەشەبوونا توانییە

پێنگاڤا (2)ێ هێلکارێ نەخشێ وێنە بکە بکارئینانا خشتەیێ بهایان.

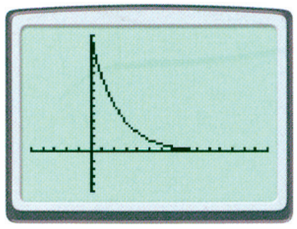
x	−2	−1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.4	0.8	1	1.5	2.3	3.4	5.1



ب $f(x)=30(0.8)^x$

پێنگاڤا (1)ێ بهایێ بنچینەی بینەدەر .

$f(x)=30(0.8)^x$ بنچینە0.8بچووکترە ژ 1 نەخشە نەخشەیەکا نزمبوونا توانییە.

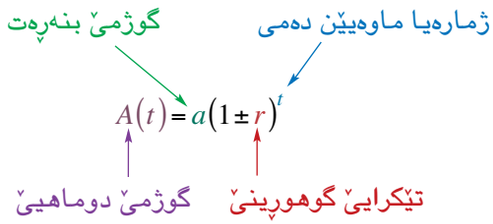


پێنگاڤا (2)ێ هێلکارێ نەخشەیێ وێنە بکە بکارئینانا بژمێرەکا ڕۆنکرنێ.

خالا چاڤدێریێ

1. دیاربکە ئەرێ نەخشەیا $f(x)=5(1.2)^x$ نەخشەیەکا گەشەبوونا توانییە یان نزمبوونا توانییە. هێلکارێ وێ وێنە بکە.

تو دشێی گەشەبوونێ و نزمبوونێ بنوێنی بکارئینانا ڕێژەیا سەدی یا نەگۆڕ بۆ گەشەبوونێ یان نزمبوونێ، و ب ئەقێ ڕێسایێ؟



بنچینەیێ نەخشەیا سەری $1+r$ دبێژنێ هاوکۆلکەیێ زێدەبوونێ، هەروەسا دبێژنە بنچینەیێ $1-r$ هاوکۆلکەیێ کێمبوونێ .

ژ قوتابیەکی بۆ قوتابیەکی — گەشەبوون و نزمبوون

دەمێ بهایێ نەخشەیەکێ ب تێکرایەکێ نەگۆڕ زێدەبیت. وەکی 7% ئانکو لێکبدە ل 7% + 100% ئانکو ل 107% بدە.
د شێوەیێ ل خوارێدا، دێ بیتە لێکدان ل 1+0.07 ئانکو 1.07

دەمێ بهایێ نەخشەیەکێ ب تێکرایەکێ نەگۆڕ کێم بیت. وەکی 12% ئانکو لێکبدە ل 100% − 12% ئانکو ل 88% بدە.
د شێوەیێ ل خوارێدا، دێ بیتە لێکدان ل 1 − 0.12 ئانکو 0.88

نموونـــــه 2 بجهێنان ل سەر ئابووریێ

ل ساڵا 2000 ێ، گوڤەندی گیتارەکا کەڤن کڕی کو ل ساڵا 1959،هاتیە چێکرن و 12 مەلیۆن دینار بهایێ وێ دان. شارەزایان خەملاند کو سالانە بهایێ وێ % 10 زێدە دبیت. ئەو سالا بهایێ گیتارێ دبیتە 25 مەلیۆن دینار،ب وێنەیێ ڕۆنکرنێ دیاربکە.

پێنگاڤا (1)ێ نەخشەیەکێ بنڤێسە کو نموونەیەکی بۆ گوهۆڕینا بهایێ گیتارێ بنوێنیت.

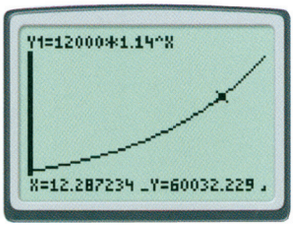
$f(t)=a(1+r)^t$ نەخشە گەشەبوونا تواناییە.

$=12(1+0.14)^t$ ل شوونا a بهایێ وێ 12 دانە، و ل شوونا r بهایێ وێ 0.14 دانە.

$=12(1.14)^t$

پێنگاڤا (2)ێ هێلکاریێ نەخشەیێ وێنە بکە .

دەمێ هێلکاریێ نەخشەیەکا توانی بکارئینانا بژمێرا ڕۆنکرنێ وێنە دکەی، دڤێت تو سیفەتێن پەنجەرکێ ڕاستڤەکەی، دا ئەو خالا دێ بکارئینی دیار ببیت.



هاریکاری

د بژمێرا ڕۆنکرنێدا x بکاربینە ل شوونا t :

$y_1 = 12\ 000 * 1.14\ \wedge\ x$

پێنگاڤا (3)ێ وێنەیێ ڕۆنکرنێ بکاربینە دا بهایێ وێ سالێ بخەملینی ئەوا بهایێ گیتارێ تێدا دبیتە 60 مەلیۆن دینار.

سیفەتێ TRACE بکاربینە دا بهایێ t بینیەدەر دەمێ $f(t)=60$.

بهایێ نەخشەیێ دبیتە نێزیکی 60 ێ دەمێ $t=12.29$. بهایێ گیتارێ دێ بیتە 60 مەلیۆن دینار پشتی 12.29 سالان ژ کڕینا وێ. ئانکو ل سالا 2012 .

خالا چاڤدێریێ

2. ژمارەیا نەهنگێن پشت کوودێن ئوسترالی ل ساڵا1981 گەهشتە 350 نەهنگان. و ژمارەیا وان سالانە ب تێکرایێ 5% ێ زێدە دبوو. نەخشەیەکا توانی بنڤیسە کو نموونەیەکی بۆ ڤێ زێدەبوونێ پێکبینیت، پاشی هێلکاریێ نەخشەیێ وێنە بکە و بکاربینە بۆ دیارکرنا وێ ساڵا ژمارەیا نەهنگان تێدا دبیتە 550 نەهنگ.

نموونـــــه 3 بجهێنانەك ل سەر نزمبوونا بهایان

بهایێ ترومبێلەکا بارهلگرا نوی دبیتە 28 مەلیۆن دینار. سالانە ئەڤ بهایە ب تێکرایێ 6% نزم دبیت نەخشەیەکا توانی بۆ ڤێ نزمبوونێ بنڤیسە. پاشی هێلکاری نەخشەیێ وێنە بکە و بکاربینە بۆ دیارکرنا وێ سالا بهایێ وێ دگەهیتە 20 مەلیۆن دینار.

پێنگاڤا (1)ێ نەخشەیەکێ بنڤیسە گوهۆڕینا بهایێ بارهلگرێ بنوێنیت.

$f(t)=a(1-r)^t$ نەخشەیا نزمبوونا توانی

$= 28\ (1-0.06)^t$ ل شوونا a بهایێ وێ 28 دانە، و ل شوونا r بهایێ وێ 0.06 دانە.

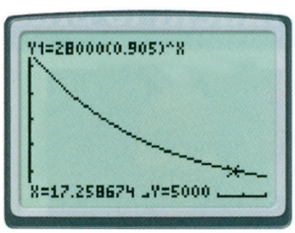
$= 28(0.94)^t$

پێنگاڤا (1)ێ هێلکاریێ نەخشەیێ وێنە بکە.

دەمێ هێلکاریێ نەخشەیەکا توانی بکارئینانا بژمێرەکا ڕۆنکرنێ وێنە دکەی. دڤێت تو سیفەتێن پەنجەرکێ ڕاستڤەکەی. دا ئەو خالا دێ بکارئینی دیار ببیت

سیفەتێ TRACE بکاربینە دا بهایێ t بینیەدەر دەمێ

$f(t)=5$



پێنگاڤا (3)ێ هێلکاریێ نەخشەێ بکاربینە دا وێ سالێ دیار بکەی ئەوا بهایێ ترومبێلێ دبیتە 5 مەلیۆن دینار

بهایێ نەخشەێ دگەهیتە نێزیکی 5 دەمێ $t=17.3$. بهایێ ترومبێلێ دێ بیتە 5 مەلیۆن دینار پشتی 17.3 سالان ژ کرینا وێ.

خالا چاڤدێریێ

3. بهایێ پایسکلەکی ئێك مەلیۆن دینارە و سالانە ئەڤ بهایە ب تێکرایێ 15% کێم دبیت نەخشەیەکا توانی بنڤیسە بۆ نواندنا ڤێ کێمبوونێ پاشی هێلکاریێ ڕۆنکرنێ یێ نەخشەێ وێنەبکە و بکاربینە دا دیاربکەی کەنگی بهایێ وێ دبیتە نیڤا بهایێ بنەڕەت.

هزر بکە و گەنگەشێ بکە

1. بژمێرەکێ بکاربینە بۆ بەراوردکرنا هەردوو بهایان 1.01^{500} و 0.99^{500} ئەوا ب دەست تە کەفتی ڕۆنبکە.
2. جوداهیێن ل ناڤبەرا هێلکارێن هەردوو نەخشەیان $f(x)=1.1^x$ و $g(x)=0.9^x$ بەراورد بکە. دێ چ ل هەردووان هێت وەکی $x=0$.
3. بەحسێ نەخشەیا $f(t)=a(1-r)^t$ بکە، دەمێ $r>0$ بەحسێ نەخشەی بکە دەمێ $r>0$.
4. ڕێکخەر بە، خشتەی دوبارە بنڤیسە پاشی تەمام بکە. گەشەبوونا توانی و نزمبوونا توانی بەراورد بکە.

فێربە و ڕێکخەر بکە

$f(x)=ab^x$ دەمێ $a>0$	زێدەبوون	کێمبوون
بهایێ b		
شێوەیێ گشتی یێ وێنەیێ ڕۆنکرنێ		
چ ل نەخشەێ دهێت دەمێ x زێدە دبیت		
چ ل نەخشەێ دهێت دەمێ x کێم دبیت		

1-4 ڕاهێنان

ڕاهێنانێن ئاراستەکری

1 **زاراڤ** ئەگەر بنچینە د نەخشەیەکا توانیدا، ژمارەیەك بیت دناڤبەرا 0 و 1 ێدا، نەخشە دێ بیتە نەخشەیەکا ؟ (گەشەبوونا توانی ، نزمبوونا توانی)

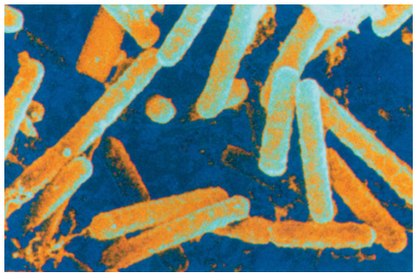
بەرێ خۆ بدە نموونە 1

دیاربکە ئەرێ نەخشە گەشەبوونا تواییە یان نزمبوونا تواییە. پاشی هێلکاریێ وێنە بکە

2 $f(x)=32\left(0.5^x\right)$ **3** $f(x)=0.5\left(1.2^x\right)$ **4** $f(x)=0.4\left(\frac{3}{4}\right)^x$

بەرێ خۆ بدە نموونە 2

5 **زیندەزانی** 150 بەکتریا ژ جۆرەکیە کو هەردوو دەمژمێران دوجاران دبن، د ئامانەکا چاندنا بەکتریان دانە. ژمارەیا بەکتریان د وێ ئامانیدا پشتی 10 دەمژمێران بخەملینە.



أ نەخشەیەکێ $f(t)$ بنڤیسە کو زێدەبوونا ژمارەیا بەکتریا بنوێنیت.

ب هێلکاریێ ڤێ نەخشەێ وێنە بکە.

ج هێلکاری بکاربینە بۆ خەملاندنا ژمارەیا بەکتریان پشتی 10 دەمژمێران.

نمونە 3

6 **فیزیا** تەپەیەکا نەرم ژ بلندایا 25 m ل ئەردەکێ رەق دا. ئەو تەپەگەلەك جاران بۆ سەری قەژەنی. وەهر جارەکێ دگەهشتە بلندایا $\frac{2}{5}$ ژ بلندایا جارا بەری وێ .

أ نەخشەیەکێ $f(n)$ بنقیسە، ئەوا بلندایا هەر جارەکێ تەپە دگەهتێ بنوێنیت.

ب هێلکاریّ وێ نەخشەیێ

ج پشتی چەند جاران، بلندایا تەپێ دێ ژ 1 m کێمتر بیت؟

راهێنان و شیکارکرنا پرسیاران

دیاربکە ئەرێ نەخشە گەشەبوونا توانییە یان نزمبوونا توانییە، پاشی هێلکاریّ وێ وێنە بکە.

راهێنانێن نازاد

بۆ شیکارکرنا راهێنانان	بەرێ خۆ بدە نموونە
9–7	1
10	2
11	3

7 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ **8** $f(x)=\frac{1}{3}(1.3)^x$ **9** $f(x)=10(2.7)^x$

10 **شەمەندەفر** چەندیا کەلوپەلێن ب شەمەندەفران هاتینە قەگوهاستن ل سالا 1960 ل وێلایەتێن ئێکگرتی گەهشتە 580 ملیار تەن/میل. وئەف چەندیە ژ وێ سالێ وەرە ب تێکڕایێ سالانە 2.32% زێدەبوو

أ نەخشەیەکێ بنقیسە کو زێدەبوونا سالانە یا چەندیا کەلوپەلان بنوێنیت (1960 = سالا 0).

ب هێلکاریّ قی نەخشەی وێنەبکە.

ج کیژ سالێ دێ چەندیا کەلوپەلێن ب شەمەندەفران هاتینە قەگوهاستن ل ویلایەتێن ئێکگرتی دێ ژ هزار ملیارتەن/میل زێدەتربیت؟

11 **نوژداری** چەندیا ئەنسۆلینا بکاردهێت بۆ ڕێکخستنا ڕێژەیا شەکری د خوینێدا ب تێکڕایێ 5% ب نێزیکی کێم دبیت دهەر خولەکەکێدا. چەندیا پێدڤیا لەشی دگەهتە 10 یەکەیان ب نێزیکی.

أ نەخشەیەکێ $f(t)$ بنقیسە کو چەندیا ئەنسۆلینا د خوینێدا دمینیت پێ دەمی بنوێنیت، پشتی کو نەخۆش 10 یەکەیان وەردگرت.

ب هێلکاریّ قێ نەخشەیێ وێنە بکە.

ج چەندیا ئەنسۆلینا د خوینێدا دمینیت پشتی 10 خولەکان بخەملینە.

د پشتی چەند خولەکان، چەندیا ئەنسۆلینێ دێ گەهیتە نیڤێ ؟

دیاربکە ئەرێ نەخشەیا توانییە یان نە؟

12 $f(x)=2(x)^{10}$ **13** $f(x)=0^x$ **14** $f(x)=1(0.5)^x$

15 ل سالا 1626 کۆمەکا کوچبەرێن ئەلمانی گزیرتا مانهاتن یا ئەمریکی، بەرامبەر کەلوپەلێن ب بهایێ 24 دۆلارێن وی سەردەمی کڕین. مگرتی ئەو کوژمە دانایە د بانکێدا ب قازانجەکی ئاوێتەیێ سالانە 3.5% ئەو کوژمە ل سالا 2008 دێ بیتە چەند؟

16 **تەکنەلۆژیا** چەندیا (برێ) پێزانینێن ب شێوەیەکی ئەلکترونی هاتییە هەلگرتن، ل سالا 2002 گەهشتنە نێزیکی 5 ئەکزابایت یان 5×10^{18} بایت.. قەکۆلەران خەملاند کو ئەف چەندە دوو جارانی وێیە ئەوا ل سالا 1999 . مگرتی زێدەبوونا پێزانینان ب قی شێوەی بەردەوام بوو. نەخشەیەکێ بنقیسە شێوازێ چەندیا پێزانینێن هەلگرتی ژ سالا 1999 وەرە بنوێنیت پاشی هێلکاریّ قێ نەخشەیێ وێنەبکە

17 **کۆمپیوتەر** بهایێ بژمێران سالانە ب ڕێژەیا 30% کێم دبیت، کاوەی بژمێرەکا پێشکەفتی ب 2765 000 دیناران کڕی. ژمارەیا سالێن پێدڤی بخەملینە ئەوێن پێدڤی دا بهایێ قێ کۆمپیوتەرێ کێمتر بیت ژ 350 000 دیناران.

خشتەی تەمام بکە. بهایان بۆ نێزیکترین بەش ژ سەدێ نێزیك بکە.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
18 $f(x)=2.2^x$									
19 $g(x)=0.4^x$									

20 هندەك کارتێن باوەرپێکری یێن پارەی، رێ ددنە خودانێ وێ کو کوژمێ پارەیێ A پشتی n هەیڤان ببیتە $A=P(1.015)^n$ کو p هێمایێ پارەیێ داییە؟

أ هێلکارێ ڤێ نەخشەیێ وێنە بکە هەکەر کوژمێ بنەرەت مەلیۆن دینار بیت.

ب کوژمێ پارەی پشتی ساڵەکێ دێ بیتە چەند؟

ج ئەو کوژمە کەنگی دێ گەهیتە 1 300 000 دیناران؟

21 **فرۆتن** فروتنێن هەیڤانە یێن خودانکەرەکێ مریشکان گەهشتە ئەو پەڕێ بلند کو 12 000 مریشك بوون ل مەها کانوونا دووێ. لێ فرۆتنێن وێ کێمبوون د مەهەهێن د دویڤدا ب ڕێژەیا 20% هەیڤانە.

أ خودانکەری چەند مریشك فرۆتن د مەها شەشێدا ئەوا د دویڤ کانوونا دووێدا دهێت.

ب پشتی چەند مەهان، فرۆتنێن مریشکان ژ 1000 کێمتر لێ هاتن؟

22 **بانك** بانك ڕیسایەکێ بکاردئینن بۆ هەژمارکرنا بهایێ نۆکە بۆ کوژمەکێ دانایی. ڕێسا ئەڤەیە: $A=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$. کو A گوژمێ نۆکەیە، و p گوژمێ بنەڕەت یێ دانایە. و r تێکڕایێ سالانە یێ قازانجێ یە، و t دەمە ب سالان، و n ژمارەیا ماوەیا نە د سالێدا کو تێدا پارە هاتیە ڤەگرتن (هەژمارتن)، ئانکو هەژمارکرنا قازانجی و زێدەکرنا وی ل سەر کوژمێ دانایی. خسرو 5 مەلیۆن دینار ب قازانجێ سالانە تێکڕایێ وی 5% دانا د بانکێدا، و ب هەژمارتنەکا وەرزی (4 جاران د سالێدا).

أ بهایێ کوژمەی پشتی 5 سالان دێ بیتە چەند؟

ب کەنگی کوژمەیێ دانایی دێ ژ 10 مەلیۆن دینار بۆریت؟

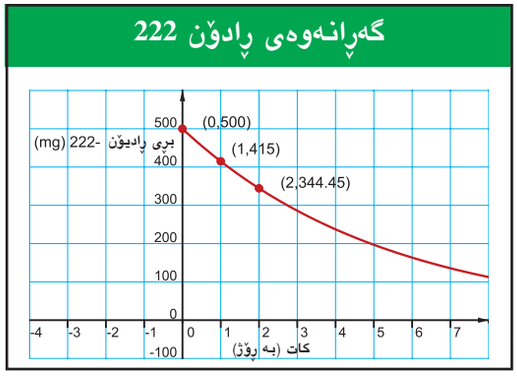
ج **دێ چ بیت هەکەر ....** ؟ خەسرو پشتی 5 سالان دێ چەند قازانج کەت، هەکەر هەژمارتنا ببیتە بوو هایڤانە ل شوونا هەژمارتنا وەرزی.

23 **هزرکرنا ڕەخنەگر** پۆتانێ خالا هاوبەش یا هێلکارێن هەردوو نەخشەیێن $f(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ و $f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ چییە؟

مەوادیێ بەرامبەری بواری $[0, 10]$ بینەدەر بۆ هەر ئێك ژ ڤان نەخشەیێن ل خوارێ :

24 $f(x)=3^x-2^x$ **25** $f(x)=100(0.9)^x$ **26** $f(x)=\frac{3}{4}(2)^x$

27 **ئەردناسی** ڕادۆن − 222 $(Radon-222)$ گازەکە ژ بەر و ئاخێ دەردکەڤیت. چێدبیت ئەڤ گازە د ئاڤاهییێن بلند دا کۆم ببیت وببیتە مەترسی ل سەر ئەوان ئاکنجییێن وێ گازێ هلدکێشن. ڕادۆن − 222 دهێتە گوهۆڕین و دبیتە پۆلۆنیۆم $(Polonium)$ یان قورقوشم.



أ ڕێژەیا سەدێ بۆ گوهۆڕینا ڕادۆن−222 یا ڕۆژانە بینەدەر.

ب نەخشەیەکا توانی بنڤیسە کو چەندیا رادۆن − 222 یێ مایی بنوێنیت پشتی t ڕۆژان، ژ چەندییەکا بنەڕەت کو برێ وێ $500mg$ بیت.

ج چەند دێ ژێ مینیت پشتی 14 ڕۆژان؟

28 **خەملاّن** ژمارەیا ئاکنجیێن ئەردی ل سالاّ 2000 ب 6.1 ملیار کەسان هاتە خەملاندن. هەروەسا تێکرایێ زێدەبوونا وان یا سالاّنە ب 1.4% هاتە خەملاندن. نەخشەیەکێ بنقیسە کو زێدەبوونا ئاکنجیێن ئەردی پێ سالاّن بنوێنیت پشتی سالاّ 2000 (2000 =سالاّ 0) ، و بکاربینە بۆ خەملاندنا ژمارەیا ئاکنجییان ل سالاّ 2000 .

29 **هزرکرنا ڕەخنەگر** کیژ هەردوو بڕان: x^3 ، 3^x ب لەزتر زێدەبیت ب زێدەبوونا بهایێن x ؟ ڕۆنبکە.

30 **بنقیسە** حالەتەکی وەسفبکە ئەم بشێین بکارئینانا نەخشەیەکا تونی بنوێنین. نەخشەیێ بنقیسە و ڕۆنبکە کا هەر بهایەکی وی چ دنوێنیت.

ئامادەکرن بۆ ئەزموونێ

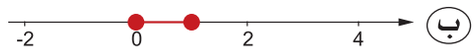
31 کیژ ئەڤان نەخشەیێن ل خوارێ، نەخشەیا نزمبوونا تواناییە؟

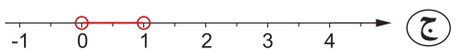
أ) $f(x)=0.9(1.001)^x$ ج) $f(x)=0.5(2)^x$

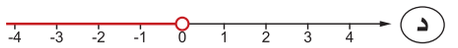
ب) $f(x)=1.5\left(\frac{10}{11}\right)^x$ د) $f(x)=\left(\frac{1}{0.5}\right)^x$

32 کیژ ئەڤێن ل خوارێ، بهایێن b دنوێنیت دەمێ نەخشەیا $f(x)=ab^x$ نەخشەیەکا نزمبوونا توانی بیت؟

أ)

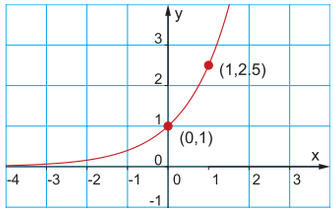
ب) 

ج) 

د) 

33 **بەرسڤەکا کورت** بهایێن aو b د نەخشەیا: $f(x)=ab^x$ چنە، کو هێلکارێ وێ ل خوارێ دیارە؟

34 ژمارەیا ئاکنجیێن باژێرەکی ل سالاّ 1990 ێ بوو 443 89 کەس، و تێکرایێ سالاّنە یێ زێدەبوونێ 0.6% بوو ژ وێ سالّێ وەرە. کیژ ژ ئەڤان نەخشەیێن ل خوارێ ژمارەیا ئاکنجیێن باژێری دنوێنیت پشتی x سالّ ژ 1990 ێ؟



أ) $f(x)=89\ 443(1.6)^x$ ج) $f(x)=89\ 443(1.06)^x$

ب) $f(x)=89\ 443(1.006)^x$ د) $f(x)=89\ 443(1.0006)^x$

بەرهنگاری و بەرفرەهکرن

35 **هرزکرنا ڕەخنەگر** ل بیرا تەیە، تە نەخشەیێن زۆر رادەدار پێ پلەیێن وان پۆلینکرن. بۆچی بەحسێ پلەیا نەخشەیەکا توانی ناکەی ؟

خشتەیەکێ بۆ شیکارکرنا هەر لاسەنگەیەکێ بکاربینە، بەرسڤا خۆ نێزیکبکە:

36 $1.15^x \geq 3$ **37** $0.97^x < 0.5$ **38** $5 < 1.5^x < 6$

39 هێلکارێن هەردوو نەخشەیان بەرواوردبکە $y=x^2$ و $y=2^x$. دەمێ $-10 < x < 10$ ژمارا خالێن ئێکدوبڕینێ چەندە؟

40 **زیندەزانی** زانایان دیت کو ژمارەیا پێشییان د ئێك ئەکر دا ل دەڤەرەکا سەرمایێ پشتی حەلیان بەفرێ، دگەهیتە $10^{\frac{1}{2}d+2}$ کو d ژمارەیا ڕۆژانە پشتی حەلیان بەفرێ. ژمارەیا پێشییان چەند بوو، د ئێك ئەکر دا، ل دەسپێکا حەلیانا بەفرێ؟ چەند دەم دێ بۆریت پشتی حەلیانا بەفرێ، هەتا ژمارەیا پێشییان دوجاران ببیت دئێك ئەکر دا؟ (ئەکر، یەکەیەکا پیڤانا ڕووبەرییە و یەکسانە $4\,047\text{m}^2$).

41 بۆچی بواری بهایێن دشیاندا بۆ بنچینەیی د نەخشەیا $f(x)=b^x$ ب تنێ دبیتە $\{b/b>0;\ b\neq 1\}$.

پێداچوونا لوولپێچی

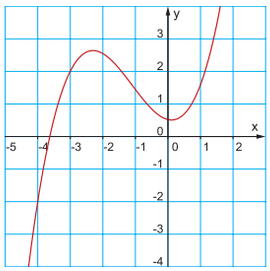
هێلکاریێ نەخشەیێ وێنە بکە بکارئینانا بژمێرا ڕۆنکرنێ. بوار و مەودایێ نەخشەیێ و ئەو جهگوهۆڕکا ڕێ ددەت بۆ وێنەکرنا هێلکاریێ وێ دیاربکە، دەسپێکرن ژ هێلکاریێ نەخشەیا بنەڕەت. *(پۆلێن پێشتر)*

42 $f(x)=\sqrt{x-3}$ **43** $f(x)=-x^2+1$ **44** $f(x)=2x^3$ **45** $f(x)=x-4$

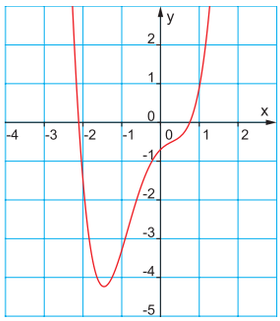
46 **بۆ خۆشیێ** هەڤال و خوشکا خو شیرینێ هندەك یاریێن ڤیدیۆیێ کڕین. هەڤال 3 یاریێن نوو و دوو یاریێن کەڤن کڕین و بهایێ وان 235 000 دینار دان، لێ خوشکا وی شیرینێ، یاریەکا نوو و 4 یاریێن کەڤن کڕین و بهایێ وان 195 000 دینار دان. نرخێ هەر یاریەکا نوو و هەر یاریەکا کەڤن چەندە؟ *(پۆلێن پێشتر)*.

ڕاهێنانێن 47 – 49 هەر ئێك ژ وان هێلکاریێ نەخشەیەکا رادەدار دنوێنیت. دیاربکە کا پلەیا ڤی نەخشەیێ کتە یان چووتە و کا هاوکۆلکەیێ سەرەکی یێ مووجەبە یان یێ سالبە. *(پۆلێن پێشتر)*.

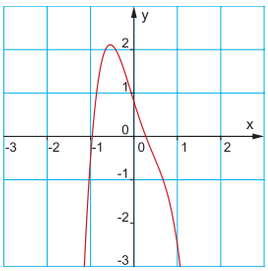
47



48

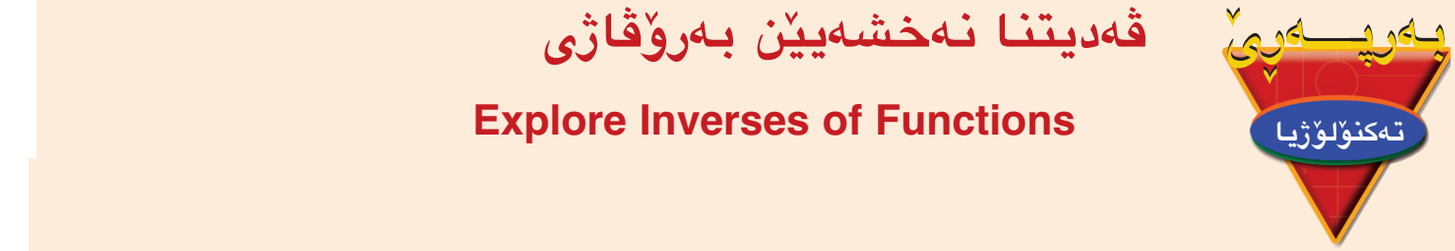


49



ڤەدیتنا نەخشەیێن بەرۆڤاژی

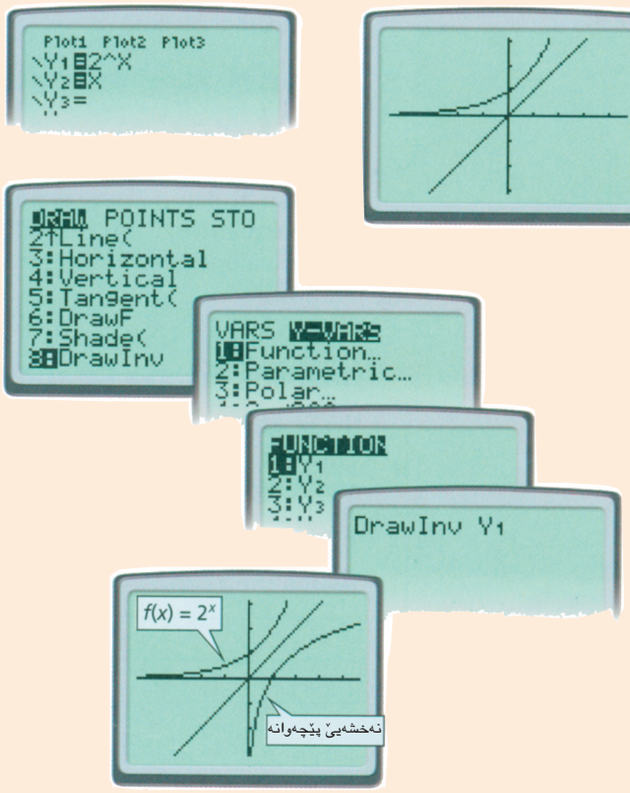
Explore Inverses of Functions



تو دشێی بژمێرا ڕۆنکرنێ بکاربینی بۆ ڤەدیتنا نەخشەیا بەرۆڤاژی و پەیوەندیا وێ دگەل نەخشەیا هێلی $f(x)=x$.

چالاکی

دێ هێلکاریێ نەخشەیا $f(x)=2^x$ و هێلکاریێ نەخشەیا وێ یا بەرۆڤاژی وێنەیەکی



1. هێلکاریێ نەخشەیا $f(x)=2^x$ و راستەهێلێ $y=x$ وێنەبکە بکارئینانا بژمێرا ڕۆنکرنێ و هەلبژارتنا پەنجەرکا دەهی. دا وێ چەندێ بجهبینی، هەردوو نەخشەیان تۆماربکە و پاشی ZOOM کلیك بکە و **4: ZDecimal** هەلبژێرە.

2. فرمانا **DrawInv** بکاربینە دا هێلکاریێ پەیوەندیا بەرۆڤاژی ب دەستڤەبینی. ئەو دێ ب دەستڤەهێت ب کلیك کرنا هەردوو کلیکێن 2nd و PRGM پاشی **8:DrawInv** هەلبژێرە. دا کو **Y1** هەلبژێری، VARS کلیك بکە و ب شێوەیەکێ ئاسووی هەڕە هەتا **Y-VARS** پاشی **1: Function** هەلبژێرە پاشی **1:Y1** و ل دوماهیێ ENTER کلیك بکە.

شاشە هێلکاریێ نەخشەیا بنەڕەت $f(x)=2^x$ دیاردکەت. و هێلکاریێ نەخشەیا بەرۆڤاژی و ڕاستەهێلێ $y=x$. تێبینی بکە کو پەیوەندیا بەرۆڤاژی دبیتە نەخشەیەکا بواریێ وێ $\{x/x>0\}$ و مەودایێ وێ R .

هەوڵبدە

هێلکاریێ نەخشەیا $f(x)=x^2$ و هێلکاریێ نەخشەیا $f(x)=x$ وێنە بکە.

1. بەراوردیێ بکە ل ناڤبەرا بواریێ نەخشەیا $f(x)=x^2$ و مەوادیێ وێ ژ لایەکێڤە ، و بواریێ پەیوەندیا بەرۆڤاژی و مەوادیێ وێ ژ لایەکێ دیڤە.

هێلکاریێ نەخشەیا $f(x)=x^3$ و هێلکاریێ نەخشەیا $f(x)=x$ وێنەبکە.

2. بەراوردیێ بکە دناڤبەرا نەخشەیا $f(x)=x^3$ و مەوادیێ وێ دا ژ لایەکێڤە، و بواریێ پەیوەندیا بەرۆڤاژی و مەوادیێ وێ ژ لایەکێ دیڤە. ئەرێ پەیوەندیا بەرۆڤاژی یا نەخشەیا $f(x)=x^3$ دبیتە نەخشە؟ ڕۆنبکە.

3. **دەستەواژەیەکێ بنڤیسە** ل دۆر پەیوەندیا ل ناڤبەرا بواریێ نەخشەیێ و مەودایێ وێ ژ لایەکێڤە و بواریێ پەیوەندیا بەروڤاژی و مەودایێ وێ ژ لایەکێ دیڤە .

4. **دەستەواژەیەکێ بنڤیسە** ل دۆر پەیوەندیا دناڤبەرا هێلکاریێ نەخشێ و هێلکاریێ نەخشەیا بەرۆڤاژیدا.

2-4 نەخشەیا بەرۆڤاژی
Inverse function

ئارمانج

- پەیوەندیەکا بەرۆڤاژی یا پەیوەندیەکێ دێ نیاسیت و ب وێنەیێ ڕۆنکرنێ دێ نوێنیت.
- هەژمارتنا نەخشەیەکا بەرۆڤاژی بۆ نەخشەیەکێ.

کی ئەقێ بکاردئینیت؟

ئەم دشێین نەخشەیا بەرۆڤاژی بکاربینین بۆ دەرئینانا بهایێ تشتەکی بەری ئێکڕاکرن بهێتە بکارئینان (نموونە 5) .

تو ل پۆلێن بنەڕەتی فێربووی کو لێدەرکرن دبیتە کردارا بەرۆڤاژی بۆ کۆمکرنێ، ئانکو بجهئینانا لێدەرکرنێ دێ ئەنجامێن بجهئینانا کۆمکرنێ هێنە لادان. نموونە: هەکەر تە 3 ل گەل a کۆمکر، تو دێ ئەنجامێ ڤێ کۆمکرنێ لادەی هەکەر تە 3 ژ ئەنجامێ کۆمکرنێ دەرکر. هەروەسا دابەشکرن کردارەکا بەرۆڤاژیە بۆ لێکدانێ. هەکەر تە ژمارەیەك وەکی a لێکدا ل 4 ێ پاشی تە ئەنجامێ لێکدانێ ل سەر 4 ێ دابەشکر، دێ جارەکا دی ژمارە a ب دەست تە کەڤیت، تو دشێی کردارا بەرۆڤاژیکرنێ ل سەر پەیوەندیێ و نەخشەیان بجهبینی. بۆ ب دەستڤەئینانا وێنەیێ ڕۆنکرنێ بۆ **پەیوەندیا بەرۆڤاژی** **Inverse relation** بۆ پەیوەندییەکێ، وێنەیێ هێلکاریێ پەیوەندیێ وێنە بکە ب وێنەدانەوە ل دۆر راستەهێلێ $y=x$ ، و ئەڤە یێ هاوتایە بۆ گوهۆڕینا جهان ل نافبەرا پۆتانێن x و y د جوتێ ڕێکخستیدا بۆ هەر خالەکا هێلکاریێ پەیوەندیێ .

زاراڤ
Vocabulary

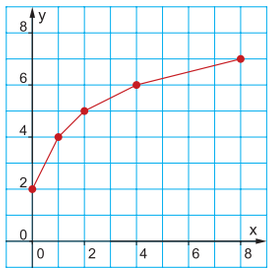
پەیوەندیا بەرۆڤاژی
Inverse relation
نەخشەیا بەرۆڤاژی
Inverse function

نموونـــــە 1 وێنەکرنا هێلکاریێ پەیوەندیا بەرۆڤاژی

نەخشەیێ بنوێنە و نافبەرا خالان بگەهینە ئێك. پاشی پەیوەندیا بەرۆڤاژی بنوێنە. بوار و مەودایێ هەر پەیوندییەکێ دیاربکە.

x	0	1	2	4	8
y	2	4	5	6	7

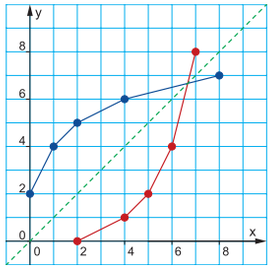
خشتەی ب خالان بنوێنە. و ب هێلەکی گونجایی بگەهینە ئێك.



جهێن هەردوو پۆتانان x و y بگوهۆڕە بۆ هەر خالەکا هێلکاریێ پەیوەندیێ.

x	2	4	5	6	7
y	0	1	2	4	8

وێنەیێ هەر خالەکێ وێنەبکە ب وێنەدانەوە ل دۆر راستەهێلێ $y=x$ ، و خالێن ب دەست تە کەفتین ب هێلەکی گونجایی بگەهینە ئێك دوو.



بواریێ نەخشەیێ: $\{x/0\le x\le 8\}$

مەودایێ نەخشەیێ: $\{y/2\le y\le 7\}$

بواریێ نەخشەیا بەرۆڤاژی. $\{x/2\le x\le 7\}$

مەودایێ نەخشەیا بەرۆڤاژی. $\{y/0\le y\le 8\}$

ل بیرا تە بیت

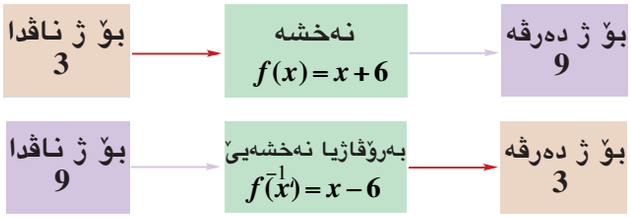
پەیوەندی دبیتە کۆمەلەکا جوتێن ڕێکخستی.
نەخشە پەیوەندییە، کو هەر بهایەکێ x بتنێ ب ئێك بهایێ y ڤە دهێتە گرێدان.

خالا چاڤدێریێ

نەخشەیێ بنوێنە و خالان بگەهینە ئێك دوو، پاشی نەخشەیا بەرۆڤاژی بنوێنە. بوار و مەودایێ هەردوو پەیوەندیان دیار بکە.

x	1	3	4	5	6
y	0	1	2	3	5

دەمێ پەیوەندی نەخشە بیت، بەرۆڤاژیا وێ دبیتە پەیوەندییەك و هێمایێ $f^{-1}(x)$ بۆ وێ دهێتە دانان.
ئەڤ نڤیسینە دەربڕینێ ژ هەلگەڕاوێ ژمارە $f(x)$ ناکەت. دبێژنە هەردوو نەخشەییّن کو ئێك ژ وان یا دی لاددەت، دوو **نەخشەییّن بەرۆڤاژی** **Inverse functions** و هەر ئێك ژ وان بەرۆڤاژیا نەخشەیا دییە.



بۆ دەرئینانا نەخشەیا بەرۆڤاژی کردارێن بەروڤاژی بکاربینە. و چونکی نەخشەیا $f(x)$ دێ 6 ل x زێدەکەت، نەخشەیا بەرۆڤاژی $f^{-1}(x)$ دێ 6 ێ ژ x دەرکەت.

نموونـــــە 2 نڤیسینا نەخشەیا بەرۆڤاژی بکارئینانا کردارێن بەروڤاژی

کردارێن بەرۆڤاژی بکاربینە بۆ دەرئینانا نەخشەیا بەرۆڤاژی بۆ نەخشەیا : $f(x)=2x$

$f(x)=2x$ ل نەخشەیا $f(x)$ دێ ژمارە x ل 2 دەت.

$f^{-1}(x)=\frac{x}{2}$ ل نەخشەیا بەرۆڤاژی $f^{-1}(x)$ دێ ژمارە x ل سەر 2 دابەشکەت

ساخبکە . ژمارە 7 وەکو ژمارەیەکێ بۆ ژ ناڤدا بکاربینە.

$f(x)=2x$

$f(7)=2(7)$ 7 ێ ل شوونا ژمارە x دانە .

$=14$

ژمارەیا ل ئەنجامی ل جهێ x ل نەخشەیا بەرۆڤاژی ژی دانە.

$f^{-1}(x)=\frac{x}{2}$

$f^{-1}(14)=\frac{14}{2}$ 14 ێ ل شوونا ژمارە x دانە

$=7$

نەخشەیا بەرۆڤاژی $f^{-1}(x)$ کاریگەریا نەخشەیا$f(x)$ لادا.

خالا چاڤدێریێ

2. کردارێن بەرۆڤاژی بکاربینە بۆ دەرئینانا نەخشەیا بەرۆڤاژی بۆ هەر نەخشەیەکێ.

أ $f(x)=\frac{x}{3}$

ب $f(x)=x+\frac{2}{3}$

نموونـــــە 3 نڤیسینا نەخشەیا بەرۆڤاژی بۆ نەخشەیەکا گەلەك پێنگاڤ

کردارێن بەرۆڤاژی بکاربینە بۆ دەرئینانا نەخشەیا بەرۆڤاژی بۆ نەخشەیا $f(x)=\frac{x}{4}-5$.

$f(x)=\frac{x}{4}-5$

$f^{-1}(x)=4(x+5)$

ل نەخشەیا $f(x)$ دێ ژمارە x ل سەر 4 ێ دابەشکەت پاشی دێ 5 ێ ژ ئەنجامی دەرکەت:
دڤێت تو کاریگەریا دەرکرنا ژمارە 5 لابەی، لەوما دڤێت تو 5 ێ بۆ ژمارە x زێدەبکەی . پاشی رابە ب لادانا کاریگەریا دابەشکرنێ ل سەر 4 ێ، ئەو ژی ب لێکدانا ئەنجامی ل 4 .

ساخبکە

$f(40)=\frac{40}{4}-5=10-5=5$ $\overset{?}{=}$ $f^{-1}(5)=4(5+5)=4(10)=40$

√

خالا چاڤدێریێ

3. کردارێن بەرۆڤاژی بکاربینە بۆ دەرئینانا نەخشەیا بەرۆڤاژی بۆ: $f(x)=5x-7$.

تو دشێی نەخشەیا بەرۆڤاژی بینییەدەر ب پێکگوهارتنێ ل ناڤبەرا x و y ، د رێسایا نەخشەیدا، پاشی y هەژمارەکەی پێ x.

نموونـــــە 4 نڤیسینا نەخشەیا بەرۆڤاژی و ویّنەکرنا هێلکاریّ وێ

ویّنەیێ رۆنکرنێ یێ نەخشەیا $f(x)=3x+6$ ویّنە بکە، پاشی نەخشەیا بەرۆڤاژی بنڤیسە و ویّنەیێ وێ یێ رۆنکرنێ ویّنە بکە.

بنڤیسە $y=f(x)$ و هێلکاریّ نەخشەیا $f(x)$ ویّنە بکە.

$y=3x+6$

x و y پێك بگوهۆرە

$x=3y+6$

x پێ y هەژمارێکە

$x-6=3y$

$\frac{x-6}{3}=y$

نەخشەیا بەرۆڤاژی ل سەر شێوەیێ ... = y بنڤیسە

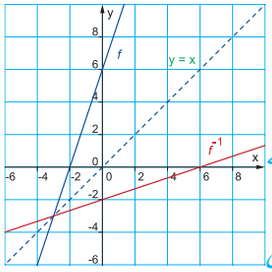
$y=\frac{x-6}{3}$

بنڤیسە : $y=f^{-1}(x)$

$f^{-1}(x)=\frac{x-6}{3}$

سادەبکە پاشی هێلکاریّ نەخشەیا بەرۆڤاژی ویّنە بکە.

$=\frac{1}{3}x-2$



خالا چاڤدێریێ هێلکاریّ نەخشەیا $f(x)=\frac{2}{3}x+2$ ویّنە بکە، پاشی نەخشەیا بەرۆڤاژی بنڤیسە و هێلکاریّ وێ ویّنە بکە.

ل هەر جارەکێ تە بڤێت کردارەکێ لابدەی، ژئەنجامی دەستپێبکە و ل پێنگاڤێن خو بزڤرە هەتا دگەهییە ناڤدایێ بنەڕەت. د ڤی حالەتیدا ، تو دشێی نەخشەیا بەرۆڤاژی بکاربینی.

نموونـــــە 5 بجهئینانەکا بازرگانی

بازرگانەکی کامیرەیەك ب کوژمەکێ گشتی ب 140 103 دیناران فرۆت. ئەڤ برە، نرخێ کامیرێ و 3000 دینار بهایێ کاغەزا پێچانێ ب خوەڤەدگرت، زێدەباری 8% ژ نرخێ وێ باج بوو. کامیرە ب دلێ بکرێ نەبوو، و بۆ بازرگانی زڤڕاند. بازرگان چەوا ئەو برێ پارەیێ بۆ بکری بزڤرینیت دێ هەژمارکەت.

پێنگاڤا (1)ێ نەخشەیەکێ بۆ کوژمێ فرۆتنێ بنڤیسە پێ نرخێ کامیرێ p .

$c(p)=1.08(p+3000)$ کوژمە وەك نەخشە پێ نرخێ کامیرێ

پێنگاڤا (2)ێ نەخشەیا بەرۆڤاژی بنڤیسە ئەوا نرخێ کامیرێ پێ کوژمەی دنوێنیت.

$c(p)=1.08(p+3000)$

$c(p)=1.08p+3240$ بەلاڤبکە (بەشینەوە)

$c(p)-3240=1.08p$ 3240 ژ هەر لایەکی دەربکە

$\frac{c(p)-3240}{1.08}=p$ دابەشبکە دا p جودا بکەی

پێنگاڤا (3)ێ بهایێ نەخشەیا بەرۆڤاژی بهەژمێرە دەمێ $c=103\,140$

$p=\frac{103\,140-3240}{1.08}=92\,500$

دڤێت بازرگان 92 500 دیناران بۆ بکرێ بزڤرینیت

$c(p)=1.08(925\,00+3000)$ ب لجهدانانێ

$=1.08(95\,500)$

$=103\,140$

خالا چاڤدێریێ بۆ بەرهەڤکرنا چایێ $\frac{1}{6}$ کەڤچك ژ تۆڤێ چایێ بکاردهێت بەرامبەر هەر کووپەکی و کەڤچکەك بۆ قۆری دهێتە زێدەکرن، نەخشەیا بەرۆڤاژی بکاربینە بۆ دیارکرنا ژمارەیان کووپان، دەمێ 7 کەڤچك ژ تۆڤێ چایێ بهێنە بکارئینان.

ڕۆناهییەك

دەمێ شیکارکرنا پرسیارێن ژیانا ڕۆژانە، گۆڕاوێ ئازاد و گۆڕاوێ پەیوەست پێك نەگوهۆڕە، چونکی هەر ئێك ژ وان تایبەتمەندیا خۆ هەیە.

هزربکه و گەنگەشێ بکه

1. ئەنجامێ پێکگوهارتنێ دناڤبەرا x و y دا شرۆڤە بکه بۆ دەرئینانا نەخشەیا بەرۆڤاژی $f(x)=x$ چەوا دێ پێشبینییا ڤی ئەنجامی کەی، بکارئینانا هێلکارێ نەخشەیا $f(x)$ ؟
2. نموونەیەکێ بینه ل سەر نەخشەیەکێ کو بەروڤاژیا پەیوەندیا وێ نەخشە بیت، و نموونەیەکێ ل سەر نەخشەیەکێ بینه کو بەروڤاژیا پەیوەندیا وێ نەخشە نەبیت.
3. چ دێ ب دەست تە کەڤیت، دەمێ نەخشەیا بەرۆڤاژی بینیەدەر بۆ بەرۆڤاژیا نەخشەیا $f(x)$ ؟

بۆ ژ دەرڤە ⟵ نەخشە ⟵ بۆ ژ ناڤدا

4. خشتەیێ بەرامبەر بنڤیسە وتمام بکه

بۆ ژ دەرڤە ⟵ نەخشەیا بەرۆڤاژی ⟵ بۆ ژ ناڤدا

نموونەیەکێ بینه ل سەر نەخشەیا $f(x)$ بۆ ژ ناڤدا و بۆ ژ دەرڤە و نەخشەیا بەرۆڤاژیا $f(x)$.

فێربه و شرۆڤه بکه

2-4 راهێنان

راهێنانێن ئاراستەکری

1 زاراڤ دەمێ ناڤبەرا x و y پێکدگوهوڕێ، ئەنجام هەردەم دبیتە ? بەروڤاژی (پەیوەندی یان نەخشە).

بڕێ خۆ بدە نموونە 1 هێلکارێ نەخشەیا ب خشتەی هاتییە نواندن وێنە بکه، پاشی هێلکارێ نەخشەیا بەرۆڤاژی وێنە بکه، بوار و مەودایێ هەردوو پەیوەندیان دیاربکه.

2

x	1	2	3	4
y	1	2	4	8

3

x	3	4	1	−1
y	−1	−2	−4	−4

بڕێ خۆ بدە نموونە 2 کردارێن بەرۆڤاژی بکاربینه بۆ نڤیسینا نەخشەیا بەرۆڤاژی.

4 $f(x)=x+3$ **5** $f(x)=4x$ **6** $f(x)=\frac{x}{2}$ **7** $f(x)=x-2\frac{1}{2}$

بڕێ خۆ بدە نموونە 3

8 $f(x)=5x-1$ **9** $f(x)=\frac{x}{2}+3$ **10** $f(x)=3-\frac{1}{2}x$

11 $f(x)=\frac{1}{2}(3-3x)$ **12** $f(x)=4(x+1)$ **13** $f(x)=\frac{3x-5}{2}$

بڕێ خۆ بدە نموونە 4 هێلکارێ نەخشەیێ وێنە بکه، پاشی نەخشەیا بەرۆڤاژی وێ بینەدەر، و هێلکارێ وێ وێنە بکه.

14 $f(x)=5-2x$ **15** $f(x)=\frac{x}{4}+2$ **16** $f(x)=10+0.6x$

بڕێ خۆ بدە نموونە 5

17 **کەش و هەوا** نەخشەیا $C=\frac{5}{9}(F-32)$ بکاردهێت بۆ گوهۆڕینا پلەیێن گەرمیێ ژ فەهرنهایت بۆ پلەیێن سەدی. نەخشەیا بەرۆڤاژی بینەدەر ئەوا پلەیێن سەدی دگوهۆڕیت بۆ پلەیێن فەهرنهایت. $16°$ سەدی بگوهۆڕە بۆ پلەیێن فەهرنهایت.

راهێنان و شیکارکرنا پرسیاران

هێلکارێ نەخشەیا ب خشتەیێ نواندی وێنە بکه، پاشی هێلکارێ نەخشەیا بەرۆڤاژی وێنە بکه. بوار و مەودایێ هەردوو پەیوەندیان دیاربکه.

18

x	−1	2	3	5
y	1	3	5	5

19

x	−4	−2	0	2	4
y	−2	−1	0	1	2

کردارێن بەرۆڤاژی بکاربینە بۆ نڤیسینا نەخشەیا بەرۆڤاژی.

ژمارەیا ڕاهێنانێن نازاد	
بۆ شیکارکرنا بەرێ خۆ بدە ژمارەیا ڕاهێنانان	نموونە
19–18	1
22–20	2
25–23	3
28–26	4
29	5

20 $f(x)=0.825x$

21 $f(x)=x-1\frac{3}{4}$

22 $f(x)=\frac{x}{0.25}$

23 $f(x)=21-32x$

24 $f(x)=145+12.5x$

25 $f(x)=\frac{1}{5}x+12$

هێلکارێ هەر نەخشەیەکێ وێنە بکە، پاشی نەخشەیا بەرۆڤاژی وێ بینەدەر و هێلکارێ وێ وێنە بکە.

26 $f(x)=\frac{4}{5}(x-15)$

27 $f(x)=2-\frac{x}{3}$

28 $f(x)=1.21x$

29 **فیزکرن** نموونەیەکا هێلی دیاردکەت کو ژمارەیا هەلگرێن باوەرنامەیا بەکالۆریۆسێ ل وەلاتەکێ مەزن ساڵانە 19 500 کەس زێدە دبن. ژمارەیا هەلگرێن بەکالۆریۆسێ ل ساڵا 2001 ێ ببوو 1.28 مەلیۆن کەس نەخشەیا بەرۆڤاژی بکاربینە دا بخەملینی کا چەند ساڵ دێ بۆرن پشتی ساڵا 2001 هەتا ژمارەیا وان ببیتە 1.7 مەلیۆن کەس.

30 **هزرکرنا ڕەخنەگر** ڕاستەهێلێ د هەردوو خالانڕا دبۆریت وێنە بکە (2,9) (3,4)

أ لارێ ڕاستەهێلی چی یە؟

ب لارێ ئەوی ڕاستەهێلی دبیتە هێلکارێ نەخشەیا بەرۆڤاژی چی یە؟

دەروازەیەک

فیزیا

هلباسکێن چیایان دشێن دەمێ ئەو ل بلندهییێن مەزن، چایێ قەخۆن وەختێ دکەلیت، چونکی پلەیێن گەرماتیێ وێ گەلەک دنزم بن.

31 **فیزیا** پلەیا کەلینا ئاقێ ل ئاستێ روویێ دەریایێ دبیتە 100 پلەیێن سەدی . نەخشەیا $f(x)=100-3.37x$ پلەیا کەلینا ئاقێ دنوێنیت ل بلندهیا $x$km ژ روویێ دەریایێ.

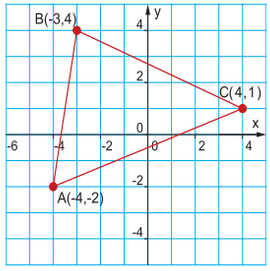
أ نەخشەیا بەرۆڤاژی بنڤیسە.

ب ل کیژ بلندهیێ، پلەیا کەلینا ئاقێ ژ 90 پلەیێن سەدی کێمتر دبیت؟ بەرسڤێ بۆ نێزیکترین 10 m نێزیکبکە.

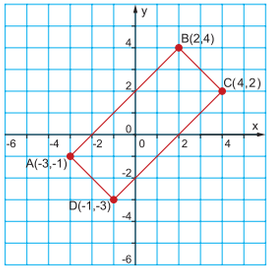
ج پلەیا کەلینا ئاقێ ل گوپیتکا چیایێ لوتش ل نیپال دگەهێتە 71.3 پلەیێن سەدی. بلندهیا ڤێ گوپیتکێ ژ سەر روویێ دەریایێ ب مێتران چەندە؟

ئەندازە پۆتانێن سەرێن شێوەیێ ئەندازەیی ئەوێ بەرۆڤاژیا پەیوەندیێ دنوێنیت بینەدەر.

32



33



34 **هزرکرنا ڕەخنەگر** پەیوەندیا نەخشەیا بەرۆڤاژی $f(x)=3$ چییە؟ ئەرێ ئەف پەیوەندیا بەرۆڤاژی دبیتە نەخشە؟ ڕۆنبکە.

35 **بنڤیسە** د بەریکانا دەربازبوون د بۆریاندا، هەلۆ 10 m د 12.59 چرکاندا بڕین، وەسا دانە کو هەلۆ ئەو دووراتیە ب لەزەکا نەگۆڕ بڕی. نەخشەیەکێ بنڤیسە، ئەو دووراتیا بڕی پێ دەمی بنوێنیت. نەخشەیا بەرۆڤاژی بنڤیسە و بکاربینە بۆ هەژمارتنا دەمێ پێدڤی بۆ بڕینا دووراتیا 25 m ب ئەوێ لەزێ.

36 بهایێ پلێتا چۆنا ژوور بۆ سێرکەکی جیهانی دبیتە 22 000 دینار. هەکەر ئەف پارە ب ڕێیا کارتێ هاتە دان، سێرك دێ کوژمەك زێدەتر وەرگرت کو دبیتە 3 500 دینار، هەر چەند بیت ژمارەیا پلێتێن تو بکڕی.

أ نەخشەیەکێ بنڤیسە کو ئەو کوژمێ تو ددەی ب ڕێیا کارتێ بنوێنیت پێ ژمارەیا پلێتێن هاتینە کڕین n .

ب نەخشەیا بەرۆڤاژی بنڤیسە، و بکاربینە بۆ هەژمارتنا پلێتێن کرین ب ڕێیا کارتێ، بۆ زانین لێچۆ 157 500 دینار بوو.

ج ئەرێ چێدبیت لێچۆێ کڕینا ژمارەیەکا پلێتان ب ڕێیا کارتێ ببیتە 332 500 دینار؟

37 **شاشی د شیکارکرنێدا** دوو قوتابیان نەخشەیا بەرۆڤاژی بۆ $f(x)=\frac{1}{2}x+1$ ئینادەر. کێ ژ وان شاشی کر؟ شاشیێ دیاربکە.

ب
$f(x)=\frac{1}{2}x+1$
$f(x)=2x-1$

أ
$f(x)=\frac{1}{2}x+1$
$f^{-1}(x)=2(x-1)$

38 **بنڤیسە** ئەوا ل نەخشەیێ و هێلکاریێ وێ ڕوودەدەت ڕۆنبکە، دەمێ هەردوو پۆتانێن هەر خالەکێ پێکدگوهۆڕن.

39 **هزرکرنا ڕەخنەگر** ئەرێ چێدبیت بەروڤاژیا پەیوەندییەکا نە نەخشە ببیتە نەخشە؟ بەرسڤا خو ب نموونەیەکێ ڕۆنبکە.

40 **کولاڤ** پیڤانا کولاڤی نەخشەیەکا هێلییە ل دویڤ چێوەیێ سەری. پیڤانا کولاڤی بۆ سەرەکێ چێوەیێ وی 55 cm دبیتە 17.5 و پیڤانا کولاڤی بۆ سەرەکێ چێوەیێ وی 57 cm دبیتە 18 .

أ پیڤانا کولاڤی s وەک نەخشەیەکا هێلی بنڤیسە پێ چێوەیێ سەری c؟

ب پەیوەندیا بەرۆڤاژی بینەدەر. ئەرێ دبیتە نەخشە؟ چ دنوێنیت؟

ج پیڤانا کولاڤەکی 18.5 بوو. چێوەیێ سەرێ خودانێ وی چەندە؟

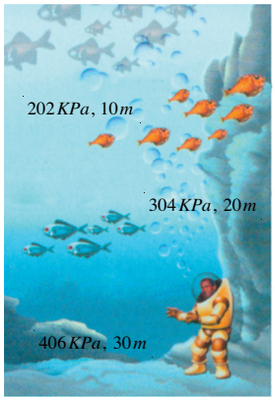
بێژە ئەرێ دەستەواژە، هەردەم یا دروستە یان هندەک جاران یا دروستە یان هەردەم نەیا دروستە.

41 بەرۆڤاژیا جوتەکێ ڕێکخستی، یێ خالەکێ ل سەر هێلکارەکی دنوێنیت کو دبیتە جوتێ ڕێکخستنێ بۆ وێنەیێ ئەوێ خالێ ب وێنەدانەوە ل دۆر ڕاستەهێلێ $y=x$.

42 نەخشەیا بەرۆڤاژی بۆ نەخشەیەکا هێلی دبیتە نەخشەیەکا هێلی.

43 نەخشەیا بەرۆڤاژی بۆ نەخشەیەکا هێلی لارێ وێ مووجەب، دبیتە نەخشەیەکا هێلی لارێ وێ سالب.

44 نەخشەیا بەرۆڤاژی بۆ نەخشەیەکا هێلی لارێ وێ ژ 1 ێ مەزنتر، دبیتە نەخشەیەکا هێلی لارێ وێ ژ 1 ێ کێمتر .



45 بەرۆڤاژیا خالەکێ دبیتە ئەو خال ب خو.

46 پەیوەندیا بەرۆڤاژی بۆ نەخشەیا $y=k$ کو k ژمارەیەکا نەگۆرە، نە نەخشەیە.

47 **نقۆنبوون** ئەو کەسێ وەرزشا نقۆنبوونێ دکەت، دزانیت کو فشارا (پەستان) ئاقێ (پیڤای ب کیلۆ باسکاڵ kpa)زێدە دبیت ب زێدەبوونا کووراتییا(پێڤای ب مێتران) ئەوا نقۆنڤان دگەهیتێ . پێدایێن د وێنەیێ بەرامبەر دا تایبەتن ب ئاڤا شرین ڤە.

أ پەستانێ بنڤیسە وەک نەخشە پێ کووراتیێ.

ب بوار و مەودایێ نەخشەیێ ب شێوەیەکێ بەرئاقل بنڤیسە.

ج بەرۆڤاژیا نەخشەیا تە د پرسیارا (أ) دا ئینایەدەر، دیار بکە.

د ئەرێ کووراتیەک هەیە، ئەم بشێین ب هەمان ژمارە دەربڕینێ ژ کووراتی و پەستانێ بکەین؟ ڕۆنبکە.

ئامادەکرن بۆ ئەزموونێ

48 کێژ ئەڤێن ل خوارێ، دبیتە نەخشەیا بەرۆڤاژی بۆ : $f(x)=4x-\frac{3}{4}$

أ $f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x+\frac{3}{16}$ ب $f^{-1}(x)=-\frac{1}{4}x+3$

ج $f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x+3$ د $f^{-1}(x)=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{16}$

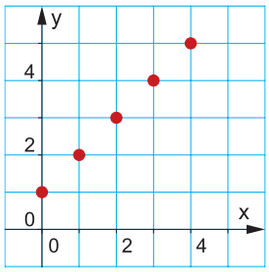
49 بۆ چێکرنا ترومبێلا خو، هێمن دێ 175 000 دینار نرخێ پارچەیێن یەدەك دەت و 35 000 دیناران بەرامبەر هەر دەمژمێرەکا دەمێ چێکرنێ دەت. نەخشەیا $f(x)=175\,000+35\,000x$ ؟ دبیتە نموونەیەك بۆ هەژمارکرنا لێچوویێ چیکرنا ترومبێلا هێمنی، پێ ژمارەیا دەمژمێرێن ب کاریڤە دهێنە بۆراندن. کیژ ئەڤێن ل خوارێ، دەربڕینێ ژ بەرۆڤاژیا نەخشەیا بۆری دکەت؟

أ) ژمارەیا دەمژمێران پێ لێچوویی.
ب) لێچوویی پێ ژمارەیا دەمژمێران.
ج) کرێیا دەمژمێرەکا چێکرنێ پێ لێچوویی.
د) لێچوویی پێ کرێیا دەمژمێرەکا چێکرنێ.

50 کیژ خال بەرۆڤاژیا وێ دبیتە خالا $(5,-2)$ ؟

أ) $(-5,2)$ ب) $(5,2)$ ج) $(-2,5)$ د) $(2,-5)$

51 **بەرسڤەکا کورت** خشتەیەکێ پێکبینە کو بەرۆڤاژیا پەیوەندیێ دیار بکەت ئەوا هێلکارێ ڕۆنکرنێ یێ بەرامبەر دنوێنیت.



بەرهنگاری و بەرفرەهکرن

نەخشەیا بەرۆڤاژی بۆ هەر نەخشەیەکا ل خوارێ بهەژمێرە $y=f(x)$

52 $y=mx+b$ **53** $ax+by=c$ **54** $y-y_1=m(x-x_1)$

55 ئەو پەیوەندیا ب خشتەیێ بەرامبەر پێناسەکری، ب وێنەیێ ڕۆنکرنێ بنوێنە. پاشی وێنەیێ هەر خالەکێ وێنە بکە ب وێنەدانەوە ل دۆر ڕاستەهێلێ $y=x$ ، دا وێنەیێ ڕۆنکرنێ بۆ پەیوەندیا بەرۆڤاژی ب دەست تە بکەڤیت هەکەر هاوکێشەیا نەخشەیا بنەڕەت $y=x^2$ بیت. ب جەبری ساخبکە کو هاوکێشەیا پەیوندیا بەرۆڤاژی دبیتە $x=y^2$.

x	y
−3	9
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

56 **هزرکرنا ڕەخنەگر** تو چ دبێژی دەبارەی نەخشەیەکا هێلی کو لارێ وێ و لارێ بەرۆڤاژیا نەخشەیا وێ یەکسان بن؟

هێلکارێ هەر نەخشەیەکێ و هێلکارێ بەروڤاژیا پەیوەندیێ وێنە بکە .

57 $y=3$ **58** $y=x^3$ **59** $y=2^x$

پێداچوونا لووڵپێچی

60 **بازرگانی** چەند پشکەك هاتنە کڕین ب بهایێ 180 45 دینار . بۆ هەر پشکەکێ ڤی خشتەیێ بەرامبەر گوهۆڕینێن ل سەر بهایێ هەر پشکەکێ پشتی کڕینێ دیار دکەت. *(پولێن پێشتر)*.

نرخی پشك	
ڕۆژ	گۆڕان لە نرخدا
1	−230
2	+2580
3	−640
4	+1270
5	−2120

أ بهایێن ڤان پشکان ژ بچووکتر بۆ مەزنتر ڕێز بکە، و ژ ئەوی بهایی کو ڕۆژا 0 ، کو دبیتە ڕۆژا کڕینێ .

ب مەودایێ بهایان بنڤیسە بکارئینانا زمانێ کۆمەڵان.

نەخشەیەکا ڕادەدار ژ کێمترین پلەیا د شیاندا بنڤیسە، ئەوا هاوکۆلکێ وێ یێ سەرەکی 2 و سفرێن وێ ئەڤ ژمارییێن داین بن. *(پولێن پێشتر)*.

61 $-3\,،\,2\,،\,1$ **62** $\sqrt{5}\,،\,-\sqrt{5}$ **63** $-1\,،\,1\,،\,2$ **64** $-3\,،\,8\,،\,9$

دیاربکە ئەرێ نەخشە گەشەبوونە یان نزمبوونە، پاشی هێلکارێ وێ وێنە بکە. *(وانە 1-4)*

65 $f(x)=15\left(\frac{89}{100}\right)^x$ **66** $f(x)=\frac{1}{25}(0.5^x)$

67 $f(x)=2(1.1^x)$ **68** $f(x)=0.01(1.9^x)$

3–4 نەخشەیێن لۆگاریتمی

Logarithmic functions

ئارمانج

• شێوەیێن هاوتا یێن نەخشەیێن توانی و لۆگاریتمی دێ نڤیسن. نەخشەیێن لۆگاریتمی دێ نڤیسن و هێلکارێن وان دێ وێنە کەن و بهایێن وان دێ هەژمێرن..

کێ ئەڤێ بکاردئینیت؟

لۆگاریتم بۆ پیڤانا ترشییا ئاڤێ(PH) بکاردهێت؟

زاراڤ
Vocabulary

لۆگاریتم
Logarithm

لۆگاریتما ئاسایی
Common Logarithm

نەخشەیا لۆگاریتمی
Logarithmic Function

چەند جاران دڤێت دینارەکێ چەند جار بکەی دا ببیتە 8 دینار؟ تو دشێی هاوکێشەیەکێ بکاربینی بۆ نواندنا ڤێ پرسیارێ $2^x)1=8$. تو دشێی ڤێ هاوکێشێ ب هزری شیکار بکەی هەکەر ل بیرا تە بیت کو $2^3=8$ ، ئانکو دڤێت دینارێ 3 جاران دوجاری بکەی هەتا ببیتە 8 دینار.

چەند جار ان دڤێت دینارەکێ دوجاری بکەی دا ببیتە 512 دینار؟ تو دشێی ڤێ پرسیارێ شیکاربکەی هەکەر توبشێی ڤێ هاوکێشەیێ $2^x=512$ شیکار بکەی، بکارئینانا کردارا بەروڤاژی بۆ کردارا بلندکرنا ژمارەیەکا دیارکری بۆ هێزەکا ب توانەکا دیارکری. ئەڤ کردارا بەروڤاژی دبیتە هەژمارکرنا لۆگاریتمێ. **لۆگاریتم** دبیتە توانا وێ هێزێ ئەوا ژمارەیەکا(بنچینە) دیارکری بۆ بلند دکەی دا بهایێ دیارکری ب دەست تەبکەڤیت.

تو دشێی هاوکێشەیەکا توانی ل سەر شێوەیێ هاوکێشەیەکا لۆگاریتمی بنڤیسی و بەرۆڤاژی.

هاوکێشەیا توانی　　هاوکێشەیا لۆگاریتمی

$$\log_b a=x \quad \Leftrightarrow \quad b^x=a$$

$$b>0, b\neq 1$$

خواندن

$\log_b a=x$ دێ خوینی:
x یەکسانە لۆگاریتم a ب بنچینەیێ b تێبینی بکە کو لۆگاریتم دبیتە توان .

نموونـــــە 1 گوهۆڕین ژ شێوەیێ توانی بۆ شێوەیێ لۆگاریتمی

هەر هاوکێشەیەکا توانی ل سەر شێوەیێ لۆگاریتمی بنڤیسە

	هاوکێشەیا توانی	هاوکێشەیا لۆگاریتمی
أ	$2^6=64$	$\log_2 64=6$
ب	$4^1=4$	$\log_4 4=1$
ج	$5^0=1$	$\log_5 1=0$
د	$5^{-2}=0.04$	$\log_5 0.04=-2$
هـ	$3^x=81$	$\log_3 81=x$

بنچینەیێ هێزێ دبیتە بنچینەیێ لۆگاریتمێ، توانا هێزێ دبیتە لۆگاریتم. هێزا هەر ژمارەیەکی ژ بلی سفرێ ب توانا سفر دبیتە 1 ، چێدبیت توان (یان لۆگاریتم) یا سالب بیت.

چێدبیت لۆگاریتم (یان توان) یا گۆراو بیت.

خالا چاڤدێریێ

1. هاوکێشەیا توانی ل سەر شێوەیێ لۆگاریتمی بنڤیسە.

أ $9^2=81$　　ب $3^3=27$　　ج $x^0=1(x\neq 0)$

نموونـــــه 2 گوهۆڕین ژ شێوەیێ لۆگاریتمی بۆ شێوەیێ توانی.

هاوکێشەیا لۆگاریتمی ل سەر شێوەیێ توانی بنڤیسە

	هاوکێشەیا لۆگاریتمی	هاوکێشەیا توانی
أ	$\log_{10} 100=2$	$10^{2}=100$
ب	$\log_{7} 49=2$	$7^{2}=49$
ج	$\log_{8} 0.125=-1$	$8^{-1}=0.125$
د	$\log_{5} 5=1$	$5^{1}=5$
هـ	$\log_{12} 1=0$	$12^{0}=1$

بنچینەیێ لۆگاریتمێ دبیتە بنچینەیێ هێزێ لۆگاریتم دبیتە توانا هێزێ، چێدبیت لۆگاریتم یا سالب بیت.

خالا چاڤدێریێ

2. هاوکێشەیا لۆگاریتمی ل سەر شێوەیێ توانی بنڤیسە.

أ $\log_{10} 10=1$ ب $\log_{12} 144=2$ ج $\log_{\frac{1}{2}} 8=-3$

لۆگاریتم توانە. ئەڤە رێ ددەت یاسایێن هێزان ل سەر لۆگاریتمان بجهبینن. چێدبیت ئەڤ سیفەتێن ل خوارێ تە ل نموونەیا دوماهیێ دیتبن.

فێربە و بجەربکە

هندەک سیفەتێن لۆگاریتمێ

b هەر بنچینەیەک بێت ،کو $b>0$ و $b\neq 1$.

شێوەیێ لۆگاریتمی	شێوەیێ توانی	نموونە
لۆگاریتمێ b ب بنچینەیێ b		
$\log_{b} b=1$	$b^{1}=b$	$\log_{10} 10=1$ $10^{1}=10$
لۆگاریتمێ 1		
$\log_{b} 1=0$	$b^{0}=1$	$\log_{10} 1=0$ $10^{0}=1$

تێبینی

هەگەر $1>b>0$

دێ $\log_{n}$ = ژمارەیەکا سالب دەمێ $n>0$

لۆگاریتما ئاسایی لۆگاریتمە ب بنچینە 10. هەکەر بنچینەیێ لۆگاریتمێ نەهێتە دیارکرن، ئەو دبیتە 10.

نموونە: $\log 5=\log_{10} 5$

نموونـــــه 3 هەژمارکرنا بهایێ لۆگاریتمێ ب هزری.

بهایێ لۆگاریتمێ ب هزری هەژماربکە (بهەژمێرە).

أ $\log 1000$

$10^{?}=1000$

$10^{3}=1000$

$\log 1000=3$

ب $\log_{4} \frac{1}{4}$

$4^{?}=\frac{1}{4}$

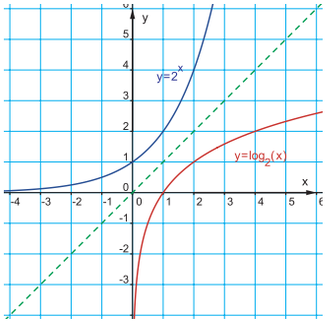
$4^{-1}=\frac{1}{4}$

$\log_{4} \frac{1}{4}=-1$

خالا چاڤدێریێ

3. بهایێ برێ ب هزری هەژمار بکە.

أ $\log 0.00001$ ب $\log_{25} 0.04$



چونکی لۆگاریتم بەرۆڤاژیا توانیێە، لەورا بەرۆڤاژیا نەخشەیەکا توانی وەکی $y=2^x$ دبیتە نەخشەیەکا لۆگاریتمی وەکی $y=\log_2 x$.
دقێت ل بیرا تە بیت، بواریّ هەر ئێك ژ هەردوو نەخشەیان دبیتە مەوادیێ نەخشەیا دی، و مەودایێ هەر ئێك ژ وان دبیتە بواریّ نەخشەیا دی.
بواریّ نەخشەیا $y=2^x$ دبیتە کۆمەلەیا ژمارەیێن راستی R ، و مەودایێ وێ دبیتە کۆمەلەیا ژمارەیێن ڕاستیێن موجەب $\{y\,|\,y>0\}$. و ژ ڤێ دەردکەڤت کو بواریّ نەخشەیا لۆگاریتمی $y=\log_2 x$ دبیتە کۆمەلەیا ژمارەیێن راستیێن موجەب $\{x\,|\,x>0\}$ و مەودایێ وێ دبیتە کۆمەلەیا هەموو ژمارەیێن راستی R .

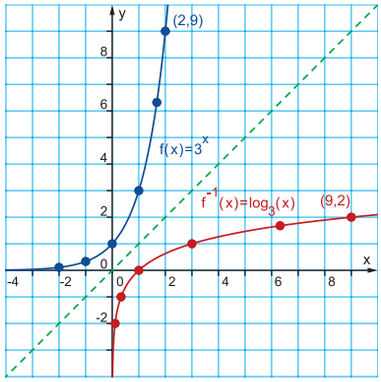
نموونـــــە 4 وێنەکرنا هێلکارێن نەخشەیێن لۆگاریتمی

بهایێن دایی یێن گۆڕاوێ x بکاربینە بۆ وێنەکرنا هێلکارێ نەخشەیێ، پاشی هێلکارێ نەخشەیا بەرۆڤاژی وێنە بکە. بوار و مەودایێ بەروڤاژیا نەخشەی دیار بکە.

أ $f(x)=3^x$ ؛ $x=-2,-1,0,1,2$

هێلکارێ نەخشەیا $f(x)=3^x$ وێنە بکە بکارئینانا خشتەیێ بهایان.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)=3^x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9



ژ بۆ وێنەکرنا نەخشەیا بەرۆڤاژی: $f^{-1}(x)=\log_3 x$ ، x ، $f(x)$ پێکبگوهوڕە د خشتەیێ سەریدا.

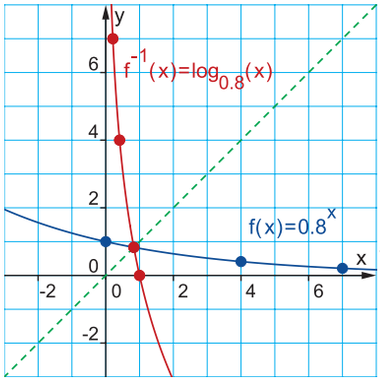
$f(x)=3^x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
x	-2	-1	0	1	2

بواریّ نەخشەیا بەرۆڤاژی $f^{-1}(x)$ دبیتە $\{x\,|\,x>0\}$ ومەودایێ وێ دبیتە R .

ب $f(x)=0.8^x$ ؛ $x=-3,0,1,4,7$

هێلکارێ نەخشەیا $f(x)=0.8^x$ وێنە بکە بکارئینانا بهایێن خشتەی .

x	-3	0	1	4	7
$f(x)=0.8^x$	2	1	0.8	0.4	0.2



ژ بۆ وێنەکرنا نەخشەیا بەرۆڤاژیا: $f(x)^{-1}=\log_{0.8} x$ ، x و $f(x)$ پێکبگوهوڕە د خشتەیێ سەریدا.

$f^{-1}(x)=\log_{0.8} x$	2	1	0.8	0.4	0.2
x	-3	0	1	4	7

بواریّ نەخشەیا بەرۆڤاژی $f^{-1}(x)$ دبیتە $\{x\,|\,x>0\}$ و مەودایێ وێ دبیتە R .

خالا چاڤدێریێ

4. بهایێن $x=-2,-1,1,2,3$ بکاربینە بۆ وێنەکرنا هێلکارێ نەخشەیا $f(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^x$، پاشی هێلکارێ نەخشەیا بەروڤاژی وێنە بکە. بوار و مەودایێ نەخشەیا بەرۆڤاژی دیار بکە.

نموونـــــه 5 بجهئینان ل سەر سروشتی

کیمیازان بەردەوام نموونەیان ژ بارانێ دپشکنن، دا ترشاتیا وێ دیار بکەن، ئانکو خەستیا ئایۆنێن هایدرۆجینێ (H^+) تێدا. ترشاتیا ئاڤێن بارانان دهێنە پیڤان بکارئینانا pH و ل دویڤ نەخشەیا ل خوارێ:

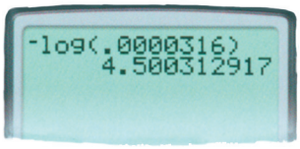
$pH = -\log[H^+]$ دەمێ $[H^+]$ خەستیا ئایۆنێن هایدرۆجینێ دنوێنیت پیڤایی ب مۆل د لیترەکا ئاڤا بارانێدا pH بۆ ئاڤا بارانێ بینەدەر ل هەر جهەکی.

أ جـهێ A خەستیا ئایۆنێن هایدرۆجینێ 0.0000316 مۆل د لیترەکێدایە.

$$pH = -\log[H^+]$$

$$pH = -\log(0.0000316)$$

ل جهێ $[H^+]$ دانە

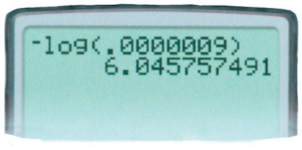


بژمێرێ بکاربینە بۆ دەرئینانا بهایێ لۆگاریتمێ ب بنچینەیێ 10. کـلیکا log بکاربینە. pH بۆ ئاڤا بارانێ ل جهێ A دبیتە نیزیکی 4.5 .

ب جـهێ B خەستیا ئایۆنێن هایدرۆجینێ 0.0000009 مۆل د لیترەکێدایە.

$$pH = -\log[H^+]$$

$$pH = -\log(0.0000009)$$



بژمێرێ بکاربینە بۆ دەرئینانا بهایێ لۆگاریتمێ ب بنچینەیێ 10 . کلیلکا log بکاربینە. pH بۆ ئاڤا بارانێ ل جهێ B دبیتە نێزیکی 6 .

خالا چاڤدێریێ

5. pH بۆ چایا سار دبیتە چەند کو خەستیا ئایۆنێن هایدرۆجینێ تێدا دبیتە 0.000158 مۆل د لیترەکێدا.

هزریکە و گەنگەشێ بکە

1. ئەگەر چییە کو $\log_b b$ یەکسانە 1 بۆ هەر ژمارەیەکا b کو نە سفر بیت؟

2. ڕۆنبکە ئەرێ $\log_a b$ و $\log_b a$ یەکسانن. پاڵپشتیا بەرسڤا خۆ بکە.

3. ڕێکخەربە هێلکارێ بەرامبەر دوبارە بنڤێسە پاشی تەمام بکە.

فێربە و هزربکە

پێناسە	سیفەت
نەخشەیا لۆگاریتمی	
نموونە	دژە نموونە

3–4 راهێنان

راهێنانێن ئاراستەکری

1 **زاراڤ** لۆگاریتم د هاوکێشەیا توانی دا $a^x = b$ دبیتە ـــــ؟

بەری خۆ بدە نموونە 1

هاوکێشەیا توانی ل سەر شێوەیێ لۆگاریتمی بنڤیسە.

2 $2.4^0 = 1$ **3** $4^{1.5} = 8$ **4** $10^{-2} = 0.01$ **5** $3^x = 243$

بەری خۆ بدە نموونە 2

هاوکێشەیا لۆگاریتمی ل سەر شێوەیێ توانی بنڤیسە.

6 $\log_4 0.0625 = -2$ **7** $\log_x (-16) = 3$ **8** $\log_{0.9} 0.81 = 2$ **9** $\log_6 x = 3$

بەری خۆ بدە نموونە 3

هەر بهایەکی ب هزری هەژمار بکە.

10 $\log_7 343$ **11** $\log_3 \frac{1}{9}$ **12** $\log_{0.5} 0.25$ **13** $\log_{1.2} 1.44$

بەری خۆ بدە نموونە 4

هێلکاریێ نەخشەیێ وێنە بکە بکارئینانا بهایێن پێدایی، پاشی هێلکاریێ نەخشەیا بەرۆڤاژی وێنە بکە. بوار و مەودایێ نەخشەیا بەرۆڤاژی دیاربکە.

14 $f(x) = 5^x$ ؛ $x = -2, -1, 0, 1, 1.5$

15 $f(x) = 0.5^x$ ؛ $x = -2, -1, 0, 1, 2$

بەری خۆ بدە نموونە 5

16 **کیمیا** بۆ خواندنا هێزا ترشیا گیراوەکی، کیمیازان نەخشەیا $pOH = -\log[OH^-]$ بکاردئینن. کو $[OH^-]$ دبیتە خەستیا ئایۆنێن هایدرۆکسیدی ب مۆل د لیترەکێدا، بهایێ pOH بۆ ئاڤەکا خەستیا ئایۆنێن هایدرۆکسیدێ تێدا 0.000000004 چەندە؟

راهێنان وشیکارکرنا پرسیاران

راهێنانێن نازاد

بۆ شیکارکرنا راهێنانان	بەری خۆ بدە نموونە
17–20	1
21–24	2
25–28	3
29–30	4
31	5

هاوکێشەیا توانی ل سەر شێوەیێ لۆگاریتمی بنڤیسە.

17 $x^{2.5} = 32$ **18** $6^x = 216$ **19** $1.2^0 = 1$ **20** $4^{-1} = 0.25$

هاوکێشەیا لۆگاریتمی ل سەر شێوەیێ توانی بنڤیسە.

21 $\log_5 625 = 4$ **22** $\log_2 x = 6$ **23** $\log_{4.5} 1 = 0$ **24** $\log_\pi \pi = 1$

هەر بهایەکی ب هزری هەژمار بکە.

25 $\log_2 1$ **26** $\log 0.001$ **27** $\log_4 64$ **28** $\log_{0.1} 100$

بهایێن دایی یێن گۆڕاوێ x بکاربینە بۆ وێنەکرنا هێلکاریێ نەخشەیێ پاشی هێلکاریێ نەخشەیا بەرۆڤاژی وێنە بکە. بوار و مەودایێ نەخشەیا بەرۆڤاژی دیار بکە.

29 $f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x$ ؛ $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3$

30 $f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$ ؛ $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3$

31 **باغچە** ڕەنگێ گولێن ئورتانسیا دیار دبیت پێ بهایێ pH یێ ئاخێ.

تێبینی

هەکەر تە بژمێر نەبیت
log (0.000000004)
≈ -8.4

ڕێکخەرێ باغچەیەکی خەستا ئایۆنێن هایدرۆجینێ ل ئەردێ باغچەی پیڤا، و دیت کو دبیتە 0.0000006 مۆڵ د لیترەکێدا. ئەرێ ئەڤ ئاخە ب کێر دهێت بۆ دەستڤەئینانا گولێن ئۆرتانسیا یێن شین؟

32 **کارتێن متمانە** نەخشەیا $n=\frac{\log A-\log P}{\log(1.0175)}$ د هندەك کارتێن متمانەدا بکاردهێت بۆ هەژمارکرنا ژمارەیا مەهان n ئەوێن بۆرین ژ بەروارا دانا کوژمێ بنەرەت p ، هەتا حساب دگەهتە بهایێ نۆکە A ، هەکەر وەسا دانێن کو چو کوژمێن زێدە نەهاتینە سەر حسابێ، و کارت ژی د ڤی ماوەیدا نەهاتیە بکارئینان.

أ ئاواتی کوژمێ 1 000 000 دینار دانانە د بانکێدا وبهایێ حسابا کارتێ بوو 1 210 260 دینار. چەند مەهـ بۆرین ژ بەروارا دانانا کوژمێ بنەرەت؟

ب چەند مەهێن زێدە بۆ ڤێ حسابێ پێدڤینە دا بهایێ وێ ژ 1 420 000 دیناران ببۆرت؟

ج تە چ تێبینی کر ل سەر بەرسڤێن هەردوو پرسیارێن بۆری؟

33 **هزرکرنا ڕەخنەگر** بهایێ b چیە هەکەر بزانی کو $\log_a b=0$ ؟ ئەڤێ ڕۆنبکە.

34 **دەنگ** ئاستێ تونديا دەنگی L ، دهێتە پێڤان ل سەر پێڤەرەکی لۆگاریتمی بکارئینانا نەخشەیا $L=10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$، کو L دبیتە هێمایێ ئاستێ تونديا دەنگی ب دیسیبل Decibel ، و I هێمایێ تونديا دەنگی، و هێمایێ I_0 بۆ تونديا گوهلێبوونێ.

دەنگ	تونديا
فڕینا فڕۆکێ	$10^{15}I_0$
هەمەر	$10^{12}I_0$
هشککەرێ پرچێ	$10^{7}I_0$
پستپست	$10^{3}I_0$
دەنگی بەلگێن دارێ	$10^{2}I_0$
گوهلێبوون	I_0

أ ئاستی تونديا هەر دەنگەکی د خشتەیدا دیار بکە.

ب ئاستێ تونديا دەنگەکی ل جۆرەکێ مۆزیکا توند دگەهیتە 110 دیسیبل. ئەڤی دەنگی ل کیژ جهێ خشتەی دێ دانی دا هەر ئەو خشتەیە ڕێك بمینیت.

ج **دێ چ بیت هەکەر ...؟** دیسیبل دبیتە دەهێکا یەکەکا دی یا پیڤانێ دبێژنێ بێل Bel . ئەرێ ئاستێ تونديا فڕۆکێ بلندترە ژ ئاستەکێ تونديا وێ کو ئەو 20 بێل؟ ڕۆنبکە

35 **هزرکرنا ڕەخنەگر** هەکەر n ژمارەیەکا راستی بیت، و هەکەر 10^n ل سەر شێوەیێ رەنووسی نڤیسی بیت. ئەرێ $\log 10^n$ یەکسانە ژمارەیا سفران د 10^n دا؟ پالپشتیا بەرسڤێ ب نموونەیەکێ بکە.

36 **خەملاندن** مفایی وەربگرە ژ $\log 100=2$ و $\log 1000=3$ بۆ خەملاندنا $\log 200$ و $\log 500$.

37 **خواردن** خشتەیێ برامبەر بکاربینە بۆ دیارکرنا جۆرێ هەر شەربەتەکێ ب زانینا خستیا ئایۆنێن هایدرۆجینێ د لیترەکا ڤێ شەربەتێدا.

شەربەت	مۆڵ pH
لەیمۆن	2.0 – 2.6
تری	2.9 – 3.2
پرتەقال	3.3 – 4.1
هنار	4.1 – 4.6

أ 0.00014 مۆل د لیترەکێدا.

ب 0.0081 مۆل د لیترەکێدا.

ج 0.00074 مۆل د لیترەکێدا.

38 **بنڤیسە** ئەگەر چیە کو $\log_0 3$ و $\log_1 3$ نە پێناسە کرینە؟

ئامادەکرن بۆ ئەزموونێ

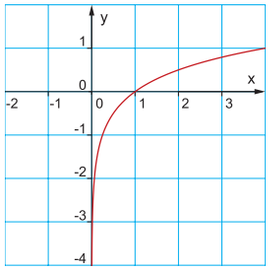
39 هێلکاریێ بەرامبەر یێ کیژ نەخشێیە؟

أ $f(x)=\log x$

ب $f(x)=\log_4 x$

ج $f(x)=\log_2 x$

د $f(x)=2^x$



40 کیژ هاوکێشەیا لۆگاریتمی یا هاوتایە بۆ $2^7 = 128$ ؟

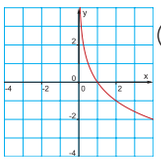
أ) $\log_7 2 = 128$ ج) $\log_2 7 = 128$

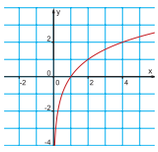
ب) $\log_2 128 = 7$ د) $\log_7 128 = 2$

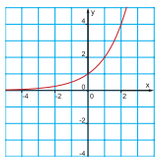
41 باشترین خەملاندن بۆ بهایێ $\log 50$ کیژ وانە؟

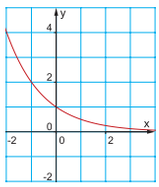
أ) 1.7 ب) 2.5 ج) 5 د) 10

42 کیژ ڤان هێلکاران باشترین نواندنا ڕۆنکرنێیە بۆ نەخشەیا $f(x) = \log_{0.5} x$ ؟

أ) 

ب) 

ج) 

د) 

43 **بەرسڤەکا کورت** بهایێ $\log_2 64$ چەندە.

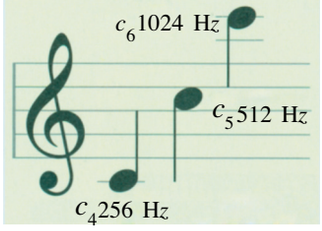
بەرهنگاری و بەرفرەهکرن

44 هێلکارێن هەردوو نەخشەیێن $\log_7 x$ و $\log_{0.7} x$ وێنە بکە. جودایێن دناڤبەرا هەردوو نەخشەیاندا وەسفبکە پشتبەستن ب هەردوو هێلکارێن وان.

45 بهایێن $\log_3 9$ و $\log_3 27$ و $\log_3 243$ هەژمارکە . دەستەواژەیەکێ ل دۆر پەیوەندیا د ناڤبەرا ڤان هەر سێ برێن لۆگاریتمیدا بنقیسە. گشتاندنێ بکە بکارئینانا گۆراوان.

46 بسەلمینە کو $\log_7 7^{2x+1} = 2x+1$ و ئەگەرێ هەر پێنگاڤەکێ بێژە.

47 **مۆزیك** پیڤەرێ مۆزیکێ پیڤەرەکێ لۆگاریتمییە، د ڤی پیڤەریدا، ئەم دشێین دەربڕینێ ژ لەرەلەرا هەر نۆتەکا مۆزیکی بکەین ب ژمارەیا لەرەلەران د چرکەیەکێدا یان ژمارەیا هێرتزان، ب هێزەکێ ژ هێزێن ژمارە 2 .



أ | لەرەلەرا نۆتەیا C_7 هەژمارکە ل سەر شێوەیێ توانی و ل سەر شێوەیێ لۆگاریتمی.

ب | لەرەلەرا کیژ نۆتەیێ دگەهیتە 32 هێرتزان؟

پێداچوونەکا لوولپێچی

بڕی ل سەر سادەترین شێوە بنقیسە و وەسا دانە کو بهایێن هەموو گۆراوان نە سفرن. *(پۆلێن پێشتر).*

48 $\left[\left(2a^4\right)\left(5b^2\right)\right]^2$

49 $\dfrac{8s^2t^6}{4st^8}$

50 $-2t^2\left(5st^{-1}\right)$

51 $7a^{-2}b^3\left(3ab + 4a^{-1}b^2\right)$

52 **ئافاکرن** بەرەك ژ بلندیا $7\ m$ ب ئەردی کەفت . نەخشەیا $h(t) = h_0 - 4.9t^2$ کو h هێمایێ بلندیا بەری ب مێترایە، پشتی t چرکەیان ژ کەفتنا وی، و h_0 هێمایێ بلندیا بنەڕەتیە ب مێتران بەری کەفتنێ بکاردهێت، دا دەمێ بەری ڤەکێشایی هەتا گەهشتیە ئەردی بهەژمێری. *(قۆناغێن پێشتر).*

خشتەی تەمام بکە بۆ هەر نەخشەیەکێ، و بهایان بۆ نێزیکترین بەش ژ سەدێ نێزیك بکە.

x	−2	−1	0	1	2
53 $f(x) = 1.7^x$					
54 $f(x) = 0.6^x$					
55 $f(x) = 0.3^x$					

بەشێ 4

ئەزموونا نیڤا بەشی

1-4 نەخشەیێن توانی و گەشەبوون و نزمبوون

دیار بکە ئەرێ نەخشە گەشەبوونە یان نزمبوونە. هێلکارێ وێ وێنە بکە.

1 $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ 2 $f(x)=\frac{1}{5}(0.2)^x$ 3 $f(x)=14(1.4)^x$ 4 $f(x)=6.4\left(1\frac{3}{8}\right)^x$

5 مگرتی ژمارەیا بەکتیریان د چاندنەکا بایەلۆجیدا رۆژا دووشەمبێ گەهشتە 1000 بەکتیریان، و ژمارەیا وان، ژ وێ رۆژێ وەرە، رۆژانە ب ڕێژەیا 50% زێدە دبیت.

أ نەخشەیەکێ بنڤیسە ژمارەیا زێدەبوونا بەکتیریان بنوێنیت پێ دەمی، [ب رۆژان هەژمارکری بیت].

ب هێلکارێ نەخشەیا تە نڤیسی وێنە بکە. و بکاربینە بۆ خەملاندنا ژمارەیا بەکتیریان ل ڕۆژا دووشەمبیا د دویڤدا.

2-4 پەیوەندیا بەرۆڤاژی و نەخشەیا بەرۆڤاژی

پەیوەندیا ب خشتەی نواندی، ب وێنەیێ ڕۆنکرنێ بنوێنە، پاشی پەیوەندیا بەرۆڤاژی ب وێنەیێ ڕۆنکرنێ بنوێنە

6

x	−1	0	1	2	3
y	0	4	8	12	16

7

x	0	1	2	3	4
y	−1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$1\frac{2}{3}$

هێلکارێ هەر نەخشەیەکێ وێنە بکە. نەخشەیا بەرۆڤاژی بنڤیسە و هێلکارێ وێ وێنە بکە.

8 $f(x)=x+2.1$ 9 $f(x)=\frac{3}{4}-x$ 10 $f(x)=5x+4$ 11 $f(x)=0.4\left(\frac{x}{2}+1.5\right)$

12 بۆ چاککرنا کۆمپیۆتەرێ میرانێ 210 000 دینار بۆ پارچەیێن یەدەك دڤێن، 55 000 دینار بۆ کرێیا هەر دەمژمێرەکا کاری . نەخشەیا $f(x)=55\,000x+21\,0000$ نموونەیە بۆ هەژمارکرنا لێچوێیێ چاککرنا کۆمپیۆتەرێ پێ ژمارا دەمژمێرێن چاککرنا وێ ڤەکێشایی. نەخشەیا بەرۆڤاژی بینەدەر، و بکاربینە بۆ دەرئینانا ژمارەیا دەمژمێرێن چاککرنێ ڤەکێشایی، بۆ زانین 500 402 دینار لێ چوون.

3-4 نەخشەیێن لۆگاریتمی

هەر هاوکێشەیەکا توانی ل سەر شێوەیێ لۆگاریتمی بنڤیسە.

13 $3^2=9$ 14 $17.6^0=1$ 15 $2^{-2}=0.25$ 16 $0.5^x=0.0625$

هەر هاوکێشەیەکا لۆگاریتمی ل سەر شێوەیێ توانی بنڤیسە.

17 $\log_4 64=3$ 18 $\log_{\frac{1}{5}} 25=-2$ 19 $\log_{0.99} 1=0$ 20 $\log_a x=5$

21 هێلکارێ نەخشەیا $f(x)=\left(\frac{5}{6}\right)^x$ وێنە بکە بکارئینانا بهایێن ل خوارێ $x=-1,0,2,3$. هێلکارێ نەخشەیا بەرۆڤاژی وێنە بکە.

4–4 سیفەتێن لۆگاریتمێ

Properties of Logarithm

ئارمانج

- سیفەتێن لۆگاریتمان دێ بکارئینین بۆ نڤیسینا بڕێن لۆگاریتمی ب سادەترین شێوە.
- لۆگاریتمێ ب بنچینەیەکی دیارکری دێ گوهوریت بۆ لۆگاریتمەکێ ب بنچینەیەکی دی.

کی ئەڤێ بکاردئینیت؟

زانایێن بیۆلەرزان لۆگاریتمان بکاردئینن بۆ هەژمارکرنا ئەوێ هێزا ژ بیۆلەرزان دەردکەڤت. (نموونە 6).

ئەم دشێین دەربڕینێ ژ نەخشەیا لۆگاریتمی $pH = -\log[H^+]$ بکەین، بۆ هەژمارکرنا pH ، ئەوێ تو ل وانەیا بۆری فێربووی، ل سەر شێوەیێ توانی: $10^{-pH} = [H^+]$. ژ بەر کو لۆگاریتم دبیتە توان، دێ سیفەتێن هێزان سیفەتێن لۆگاریتمان دروستکەن. ل بیرا تە بیت : دەمێ دوو هێزێن هەمان بنچینە هەین لێکدەی، هەردوو توانان کۆم دکەی :

$$b^m\ b^n = b^{m+n}$$

فێربە

سیفەتێ لۆگاریتما ئەنجامێ لێکبدانێ

هەکەر m و n دوو ژمارەیێن مووجەب بن، و b هەر ژمارەیەکا پاستی بیت $(b>0 \text{ و } b\neq 1)$.

ب پەیڤان	ب ژمارەیان	د جەبرێدا
لۆگاریتما ئەنجامێ لێکدانێ یەکسانە سەرجەمێ لۆگاریتمێن کۆلکەیان.	$\log_3 1000 = \log_3(10\times 100)$ $= \log_3 10 + \log_3 100$	$\log_b(mn) = \log_b(m) + \log_b(n)$

ئەم دشێین ئەو سیفەتا ل سەری هاتی بەرۆڤاژی بکاربینین، بۆ نڤیسینا سەرجەمێ لۆگاریتمێن هەمان بنچینە هەین، وەك ئێك لۆگاریتم، ب سادەترین شێوە.

نموونـــــە 1 کۆمکرنا لۆگاریتمان

ئەڤی بڕی وەك ئێك لۆگاریتم بنڤیسە. سادە بکە هەکەر دشیاندا بیت.

$\log_4 2 + \log_4 32$

$\log_4(2\times 32)$ — بۆ کومکرنا هەردوو لۆگاریتمان، هەردوو ژمارەیان لێکبدە. سادە بکە.

$\log_4 64$

3 — هزر بکە $4^{?} = 64$

خالا چاڤدێریێ

1. ئەڤی بڕی وەك ئێك لۆگاریتم بنڤیسە. سادە بکە هەکەر دشیاندا بیت.

أ) $\log_5 625 + \log_5 25$ ب) $\log_{\frac{1}{3}} 27 + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$

ل بیرا تە بیت: دا دوو هێزێن هەمان بنچینە هەین دابەش بکەی، هەردوو توانان دێ لێکدەرکەی $\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$ و چونکی لۆگاریتم توانە، لێدەرکرنا دوو لۆگاریتمێن هەمان بنچینە هەبن دێ بیتە دەرئینانا لۆگاریتما ئەنجامێ دابەشکرنا دوو هێزێن هەمان بنچینە هەین.

فێربە و شرۆڤەی بکە

سیفەتێ لۆگاریتما ئەنجامێ دابەشکرنێ

هەکەر m و n دوو ژمارەیێن مووجەب بن، و b هەر ژمارەیەکا ڕاستی بیت $(b>0 \text{ و } b\neq 1)$.

ب پەیڤان	ب ژمارەیان	د جەبرێدا
لۆگاریتما ئەنجامی دابەشکرنێ دبیتە ئەنجامێ دەرکرنا لۆگاریتما بەشدراوی ژ لۆگاریتما بەشکراوی.	$\log_5\left(\frac{16}{2}\right)=\log_5(16)-\log_5(2)$	$\log_b\left(\frac{m}{n}\right)=\log_b(m)-\log_b(n)$

ئاگەهداریە!

کا چەوا تو نەشێی a^5b^3 سادەبکەی، هەروەسا تو نەشێی ب ڕەکێ لۆگاریتمێ سادە بکەی هەکەر بنچینە د جیاوازبن.

نموونە 2 لێدەرکرنا لۆگاریتمان

$\log_2 32-\log_2 4$ وەك ئێك لۆگاریتمێ بنڤیسە، و سادە بکە هەکەر دشیاندا بیت.

$\log_2 32-\log_2 4$

$\log_2\left(\frac{32}{4}\right)$ بۆ لێدەرکرنا هەردوو لۆگاریتمان، هەردوو ژمارێن دابەشبکە سادە بکە.

$\log_2(8)$ هزر بکە $2^{?}=8$

3

خالا چاڤدێریێ

2. $\log_7 49-\log_7 7$ وەك ئێك لۆگاریتم بنڤیسە هەکەر دشیاندا بیت، و سادە بکە هەکەر د شیاندا بیت. و چونکی ئەم دشێین لۆگاریتمێن ئەنجامێ لێکدانێ هەژمار بکەین، ئەم دێ شێن لۆگاریتمێن هێزان هەژمارە بکەین.

فێربە و شرۆڤەی بکە

سیفەتێ لۆگاریتما هێزێ

هەکەر a و b دوو ژمارەیێن مووجەب بن $b\neq 1$ و p هەر چ ژمارەیەکا ڕاستی بیت.

ب پەیڤان	ب ژمارەیان	د جەبرێدا
لۆگاریتما هێزەکێ دبیتە ئەنجامێ لێکدانا توانا هێزێ ل لۆگاریتما بنچینەیێ وێ.	$\log 10^3$ $\log(10\times10\times10)$ $\log 10+\log 10+\log 10$ $3\log 10$	$\log_b a^p=p\log_b a$

ڕۆناهی

ل بیرا تەبیت کو: $\log j+\log a$ $+\log m=\log jam$

نموونە 3 سادەکرنا لۆگاریتمێن هێزان

ئەڤی بڕی ل سەر شێوەیێ ئەنجامێ لێکدانێ بنڤیسە. سادە بکە هەکەر دشیاندا بیت.

أ $\log_3 81^2$

$2\log_3 81$

$2(4)$ چونکی $\log_3 81=4$

8 $3^4=81$

ب $\log_5\left(\frac{1}{5}\right)^3$

$3\log_5\frac{1}{5}$

$3(-1)$ چونکی $5^{-1}=\frac{1}{5}$

-3

خالا چاڤدێریێ

3. هەر بڕەکی ل سەر شێوەیێ ئەنجامێ لێکدانێ بنڤیسە. سادە بکە هەکەر دشیاندا بیت

أ $\log 10^4$ ب $\log_5 25^2$ ج $\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^5$

چونکی کردارێن هێز و لۆگاریتمی دوو کردارێن بەرۆڤاژینە بۆ ئێکودوو، لەورا هەر ئێك ژ وان یا دی لاددەت.

فێربە و جەربکە

سیفەتێن بەرۆڤاژی یێن هێز و لۆگاریتمێ

هەکەر بنچینە b هەر چ ژمارەیەك بیت و $b>0$ و $b\neq 1$.

د جەبرێدا	نموونە
$\log_b b^x = x$	$\log_{10} 10^7 = 7$
$b^{\log_b x} = x$	$10^{\log_{10} 2} = 2$

نموونـــــە 4 ناسکرنا بەرۆڤاژیان

بڕی ب سادەترین شێوە بنڤیسە.

أ $\log_8 8^{3x+1}$

$\log_8 8^{3x+1}$

$3x+1$

ب $\log_5 125$

$\log_5 5^3$

3

ج $2^{\log_2 27}$

$2^{\log_2 27}$

27

خالا چاڤدێریێ

4. أ $\log 10^{0.9}$ ب سادەترین شێوە بنڤیسە

ب $2^{\log_2(8x)}$ ب سادەترین شێوە بنڤیسە

پتریا بژمێران، لۆگاریتما ئاسایی (بنچینە 10) یان لۆگاریتما سروشتی (بنچینە e) هەژمار دکەن سەحکە وانەیا 4 – 5، تو دشێی لۆگاریتمێ ژ بنچینەیەکی بۆ لۆگاریتمێ ب بنچینەیەکێ دی ب گوهۆڕی بکارئینانا ئەڤێ یاسایا ل خوارێ.

فێربە و جەربکە

یاسایا گوهۆڕینا بنچینەیێ لۆگاریتمێ

هەکەر a هەر چ ژمارەیەکا موجەب بیت و $a\neq 1$ و b هەر بنچینەیەکی موجەب بیت و $b\neq 1$.

د جەبرێدا	نموونە
$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$	$\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4}$

نموونـــــە 5 گوهۆڕینا بنچینەیێ لۆگاریتمی

بهایێ $\log_4 8$ بهەژمێرە

ڕێیا ئێکێ گوهۆڕینا بنچینەی بۆ 10

$\log_4 8 = \frac{\log 8}{\log 4}$

$\approx \frac{0.0903}{0.602}$ بژمێرێ بکاربینە

$= 1.5$

ڕێیای دووێ گوهۆڕینا بنچینەی بۆ 2 چونکی هەردوو هێژێن ژمارە 2 نە.

$\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2}$

$= 1.5$

خالا چاڤدێریێ

5. أ بهایێ $\log_9 27$ بهەژمێرە .

ب بهایێ $\log_8 16$ بهەژمێرە.

پەیسکا لۆگاریتمی بکاردهێت بۆ پیڤانا چەندییێن وان بهاییێن دکەڤنە د بوارەکی گەلەك بەرفرەهدا، وەکی توندیا دەنگی و ئاستێ توندیا وی، یان هێزا ژ بیڤەلەرزان دەردکەڤیت.

نموونـــــه 6

بجهێنانەك ل سەر جیۆلۆجیا (زەڤی ناسیێ)

شارەزایێن پیڤەرزان پیڤەرێ ریختەر بکاردئینن دا دەربڕینێ ژ ووزا پیڤەلەرز دەردئێخیت بکەت یان هێزا وان. پەیوەندیا $M=\frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{10^{11.8}}\right)$ ناڤبەرا هێزا پیڤەلەرزا M و ووزەیا وێ E گرێددەت. ل سالا 1964 پیڤەلەرزەکا هێزا وێ 9.2 ل سەر پیڤەرێ ڕیختەر ، ل ئالاسکا، ل ئەمریکا باکوور دا، چەندیا ووزەیا ڤێ پیڤەلەرزێ دەردئێخستی بینەدەر.

ڕۆناهیەکا ب مفا

پیڤەرێ ریختە پیڤەرەکی لۆگاریتمیە، لەورا هەر زێدەبوونا 1 ل سەر ڤی پیڤەری دبیتە بەرامبەر دەرکەتنا ووزەکا 10 جاران.

$$9.2=\frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{10^{11.8}}\right)$$ ل جهێ وێ دانە

$$\left(\frac{3}{2}\right)9.2=\log\left(\frac{E}{10^{11.8}}\right)$$ هەرلایەکێ ل $\frac{3}{2}$ بدە

$$13.8=\log\left(\frac{E}{10^{11.8}}\right)$$ ساده بکە

$$13.8=\log E-\log 10^{11.8}$$ سیفەتێ لۆگاریتما ئەنجامێ دابەشکرنێ بکاربینە

$$13.8=\log E-11.8$$ بەروڤاژیا هێز و لۆگاریتمێ بکاربینە

$$25.6=\log E$$ پێناسەیا لۆگاریتمێ بکاربینە

$$10^{25.6}=E$$ بژمێرێ بکاربینە.

$$3.98\times10^{25}=E$$

ووزەیا پیڤەلەرزێ دەرێخستی گەهشتە : 3.98×10^{25} ئەرگز (ergs)

خالا چاڤدێریێ

هێزا دوو پیڤەلەرزان گەهشتە 9.2 پلە و 8 پلە ل سەر پیڤەرێ ریختەر. و وزەیا ژ پیڤەلەرزا ئێکێ دەرکەتی چەند جارانی و وزەیا پیڤەلەرزا دووێ بوو؟

هزربکە و گەنگەشێ بکە

1. هێلکاریێ نەخشەیا $y=\log_5 x$ دێ چەوا وێنەکەی بکارئینانا بژمێرا ڕۆنکرنێ؟
2. چەوا تە $10^{25.6}$ د نموونەیا 6 یێدا ئینادەر بکارئینانا سیفەتێن هێزێ؟
3. دێ چ روودەت دەمێ یاسایا گوهۆڕینا بنچینەیان بجهدئینی: $\log_b x=\frac{\log_a x}{\log_a b}$ دەمێ $x=a$ ؟
4. ڕێکخەربە، خشتەیێ بەرامبەر دوبارە بنڤیسە و تەمام بکە. سیفەتێن پێکڤەگرێدانا هێز و لۆگاریتمان ب شێوازێ خو دەربڕە.

فێربە و شرۆڤە بکە

سیفەتێن هێزان	سیفەتێن لۆگاریتمان

4–4 ڕاهێنان

ڕاهێنانێن ئاراستەکری

بەڕێ خۆ بدە نموونە 1 هەر بڕەکێ وەك ئێك لۆگاریتم بنڤیسە. ساده بکە هەکەر دشیاندا بیت.

1 $\log_5 50+\log_5 62.5$ 2 $\log 100+\log 1000$ 3 $\log_3 3+\log_3 27$

بەڕێ خۆ بدە نموونە 2 هەر بڕەکی وەك ئێك لۆگاریتم بنڤیسە. ساده بکە هەکەر دشیاندا بیت.

4 $\log_4 320-\log_4 5$ 5 $\log 5.4-\log 0.054$ 6 $\log_6 496.8-\log_6 2.3$

بەڕێ خۆ بدە نموونە 3 ساده بکە هەکەر دشیاندا بیت.

7 $\log_8 8^2$ 8 $\log_3 3^5$ 9 $\log_7 49^3$ 10 $\log_{\frac{1}{2}}(0.25)^4$

بەڕێ خۆ بدە نموونە 4

11 $\log_2 2^{\frac{x}{2}+5}$ 12 $2.5^{\log_{2.5}19}$ 13 $\log_4 1024$ 14 $\log_2(0.5)^4$

بەڕێ خۆ بدە نموونە 5 بهایێ هەر بڕەکی بینەدەر.

15 $\log_9\left(\frac{1}{27}\right)$ 16 $\log_8 32$ 17 $\log_5 10$ 18 $\log_2 27$

بەڕێ خۆ بدە نموونە 6

19 **زەڤی ناسی** پەیوەندیا $M=\frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{10^{11.8}}\right)$ ناڤبەرا هێزا پیڤەلەرزا M و ووزێ E ئەوا بیڤەلەرز دەردئێخیت گرێددەت. ئەو ووزەیا پیڤەلەرزا تایگون دەردئێخێت چەند جارانی پیڤەلەرزا مەدریدە.

گرنگترین بیڤەلەرز ل ئەمریکا باکوور		
جهـ	ساڵ	M
نیومەدرید	1881	8.1
نیومەدرید	1812	8.0
فورت تایگون	1957	7.9
سان فرانسیسکۆ	1906	7.8
دولا ئەباترە	1892	7.8

ڕاهێنان و شیکارکرنا پرسیاران

هەر بڕەکی وەك ئێك لۆگاریتم بنڤیسە، ساده بکە هەکەر دشیاندا بیت

20 $\log_8 4+\log_8 16$ 21 $\log 2+\log 5$ 22 $\log_{2.5} 3.125+\log_{2.5} 5$

23 $\log 1000-\log 100$ 24 $\log_2 16-\log_2 2$ 25 $\log_{1.5} 6.75-\log_{1.5} 2$

ساده بکە هەکەر دشیاندا بیت.

26 $\log_2 16^3$ 27 $\log(100)^{0.1}$ 28 $\log_5 125^{\frac{1}{3}}$

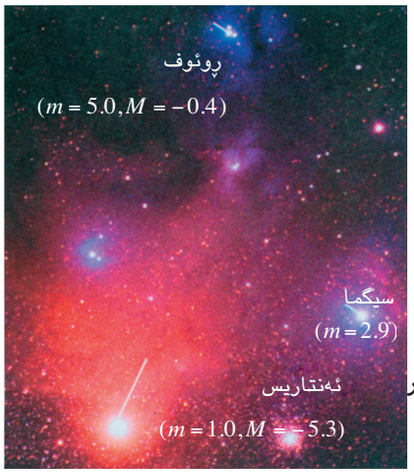
29 $\log_3 3^{7+x}$ 30 $3^{\log_3 4.52}$ 31 $\log_9 6561$

بهایێ هەر بڕەکی بینەدەر.

32 $\log_{\frac{1}{2}} 16$ 33 $\log_{25} 125$ 34 $\log_4 9$

ڕاهێنانی نازاد	
بۆ شیکارکرنا ڕاهێنانان	بەڕێ خۆ بدە نموونە
22–20	1
25–23	2
28–26	3
31–29	4
34–32	5
35	6

35 **دەنگ** پشتی گەلەك گازندە ژ وەلاتییان، دیاربووین کو دەنگێ مۆزیکێ ل ئاهەنگێن ل دەرڤەی هۆلان دهێنە گێران، کو ئاستێ توندیا وێ ب 5 دیسیبل زێدەتر دبیت ژ ڕادەیێ ڕێپێدایی کو دبیتە 100 دیسیبل. ئاستی توندیا دەنگی ب پەیوەندیا $L=10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ دهێتە هەژمارکرن، کو I هێمایێ توندیا دەنگییە و I_0 هێمایێ توندیا بەرگۆهلێبوونیە. توندیا دەنگێ ڕێپێدایی دێ بیتە چەند جارانی توندیا دەنگێ مۆزیکا ل ئاهەنگێن دەرڤەی هۆلان دهێنە گێران؟



36 **گەردوون** جیاوازیا دناڤبەرا ڕوویێ دیار m یێ ستێرەکێ و ڕوویێ وێ یێ ڕاستی M دهێتە پێڤان بکارئینانا پەیوەندیا $m-M=5\log\frac{d}{10}$ کو d دبیتە هێمایێ دووراتیا دناڤبەرا ستێرێ و ئەردیدا پێڤایی ب فەرسەخێ ستێری Parsec .

أ دووراتیا ستێرا ئەنتاریس Antares ژ ئەردی بینەدەر.

ب دووراتیا ستێرا سێگماسکۆ Sigma Sco ژ ئەردی دبیتە 225 فەرسەخێن ستێری. ڕوویێ ڕاستی یێ ڤێ ستێرێ چەندە ؟

ج دووراتیا ستێرا ئەنتاریس ژ ئەردی دبیتە چەند جارا تی دوور ستێرا ڕۆ ئۆفە Rho Oph ژ ئەردی ؟

ڕۆناهیەك

فەرسەخێ ستێرێ یەکەیەکا پێڤانێیە ئەو دبیتە 3.3 سالێن ڕۆناهیێ.

هەر هاوکێشەیەکا توانی ل سەر شێوەیێ لۆگاریتمی بنڤیسە.

37 $b^{m+n}=b^m b^n$ **38** $b^{m-n}=\frac{b^m}{b^n}$ **39** $(b^m)^n=b^{mn}$

سادەبکە هەکەر د شیاندا بیت.

40 $\log_2 32-\log_2 128$ **41** $\log 0.1+\log 1+\log 10$ **42** $2-\log_{11} 121$

43 $\log_{\frac{1}{2}} 2+\log_{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{2}}$ **44** $7^{\log_7 7}-\log_7 7^7$ **45** $\frac{10^{\log 10}}{\log 10^{10}}$

46 **هزرکرنا ڕەخنەگر** سیفەتێن لۆگاریتمان و بهایێنا $\log 2\approx 0.30$ بکاربینە بۆ هەژمارکرنا.

أ $\log 20$ ب $\log 200$ ج $\log 2000$

47 **کیمیا** پسپورێن کیمیایێ شیرەتان دکەن کو pH د ئاڤا مەلەڤانگەهادا دناڤبەرا 7.0 و 7.6 دا بیت. پەیوەندیا $pH=-\log[H^+]$ بکاربینە ، دا بڕەکی بنڤیسی کو دەربڕینێ ژ جیاوازیا دناڤبەرا خەستیا ئایۆنێن هایدرۆجینێ دا بکەت یێن هەردوو بهایێن pH یێن دیارکری.

48 **پێنگاڤێن جۆرەوجۆر** ل جهێ دیارکری، 143 گیاندار ژ جۆرێن بەرەڤ قڕبۆنێ دژین، ژمارەیا وان سالانە ب ڕێژەیا 4% کێم دبیت.

أ نەخشەیەکا توانی بنڤیسە کو ژمارەیا گیانداران ل وی جهی بنوێنیت ، پێ ژمارەیا سالان.

ب نەخشەیەکا لۆگاریتمی بنڤیسە کو ژمارەیا سالان پێ ژمارەیا گیانداران بنوێنیت.

ج زنجیرەیا وان کلیلکان بنڤیسە ئەوێن بکاردئینی بۆ تۆمارکرنا نەخشەیا لۆگاریتمی د بژمێرا ڕۆنکرنێدا.

د ژمارەیا گیانداران پشتی چەند سالان دێ ژ (30)ێ کێمتر لێ هێت؟ بۆ نێزیکترین سال نێزیك بکە.

49 **پارەدان** بهایێ بەرهەمەکی 40 000 دینارە، سالانە ب ڕێژەیا 8% زێدە دبیت. بڕەکێ لۆگاریتمی بنڤیسە و بکاربینە بۆ دیارکرنا ژمارەیا سالێن پێدڤی دا بهایێ وێ بگەهتە 50 000 دیناران، (هاریکاری : ئەوی بڕێ ل سەر شێوەیێ توانی بنڤیسە).

50 بانکەك سالانە قازانجەکی ڕێژەیا وی 19.2% دەتە وان کەسێن پارە ل وێ بانکێ دانین، و ئەڤ قازانجە هەیڤانە دهێتە هەژمارکرن. نەخشەیا $A=P(1.016)^n$ نموونەیەکێ دنوێنیت بۆ هەژمارکرنا بهایێ نوکە A یێ پارەیێ بنەڕەت p پشتی n هەیڤان ژ دانانا وی.

أ 500 000 دینار ل وێ بانکێ دانان. بڕەکێ لۆگاریتمی بنڤیسە وبکاربینە بۆ دیارکرنا ژمارەیا هەیڤێن پێدڤی بۆ دوجاریبوونا ڤی کوژمی.

ب چەند هەیڤ دێ بۆرن هەتا ئەڤ کوژمە دوجاران ببیت؟

ج ئەرێ دەم کارتێکرنێ ل سەر کوژمێ پارەی دکەت هەتا بهایێ وی دوجاران بیت؟

بژمێرا ڕۆنکرنێ یاسایا گۆهۆرینا بنچینەی و بژمێرەکا ڕۆنکرنێ بکاربینە دا هێلکاریّ نەخشەیێ وێنە بکەی.

51 $y=\log_3 x$ 52 $y=2\log_5 x$ 53 $y=\frac{\log_{12} x}{3}$

54 **بنڤیسە** چەوا هێلکاریّ نەخشەیا $y=\log_{16} x$ وێنە دکەی بکارئینانا بژمێرا ڕۆنکرنێ ؟

55 **هزرکرنا ڕەخنەگر** بهایەکێ نێریککری بۆ هەر برەکی بینەدەر، بۆ زانین $\log_{12} 20\approx 1.2$ $\log_{12} 33\approx 1.4$

أ $\log_{12} 1.65$ ب $\log_{12} 660$ ج $\log_{12} 400$

56 **هزرکرنا ڕەخنەگر** پەیوەندیەکا گرنگ هەیە ل ناڤبەرا لۆگاریتمێ و شێوەیێ زانستی بۆ نڤیسینا ژمارەیان.

أ لۆگاریتما 2.5 بینەدەر.

ب لۆگاریتما بارستەیا پاپۆرا تایتانیك بینەدەر. بەرسڤێ ل گەل بەرسڤا پرسیارا (أ) بەراورد بکە.

ج **دەستەواژەیەکێ بنڤیسە** بارستەیا شێرەکی دبیتە 2.5×10^2 kg لۆگاریتما ڤێ ژمارێ بینەدەر. ڤێ بەرسڤێ و بەرسڤێن هەردوو پرسیاران (أ) و (ب) بکاربینە دا دیار بکەی کا چەوا لۆگاریتما ژمارەیەکا ل سەر شێوەیێ زانستی نڤیسی دێ ئینیەدەر.

د دەستەواژەیەکێ بکاربینە بۆ دەرئینانا لۆگاریتما بارستەیا پارچەیەکا پارەی کو دبیتە: 2.5×10^{-3}kg ئەرێ ئەڤ دەستەواژەیە یا دروستە بۆ وان ژمارەیێن ل سەر شێوەیێ زانستی نڤیسی و ب توانێن سالب.

مگـرتی $b>0$ و $b\neq1$. دیاربکە ئەرێ دەستەواژە: هەرجار یا دروستە یان هندەك جاران یادروستە، یان هەردەم نە یادروستە.

57 یا دشیاندایە لۆگاریتمەکا بنچینەیێ وێ b بگوهۆڕین بۆ لۆگاریتمەکێ بنچینەیێ وی ژمارەیەکا ڕێژەییا دیارکری بیت.

58 لۆگاریتما بنچینەیێ وی 6 یێ هێژەکا ژمارە 6 یەکسانە توانا ڤێ هێزێ.

59 دەرکرنا لۆگاریتما ژمارە 1 ب بنچینەیێ b ژ ژمارەیەکێ ، چو ژ ڤێ ژمارێ ناگوهوڕیت .

60 چێدبیت بنچینەیێ لۆگاریتمێ ببیتە ژمارەیەکا سالب.

61 لۆگاریتما دوجاییا ژمارەیەکێ یەکسانە دوجارانی لۆگاریتما ڤێ ژمارێ.

62 چێدبیت لۆگاریتمێن بنچینەیێن وان جیاواز کۆمبکەین بێی کو گوهوڕێنان د بنچینەیێن واندا بکەین.

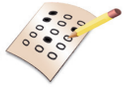
63 یا دشیاندایە $\frac{\log_b 16}{\log_b 8}$ سادەبکەین.

64 لۆگاریتما لۆگاریتما ژمارەیەکێ دبیتە ئەو ژمارە ب خۆ.

65 **شاشی د شیکارکرنێدا** ئەڤێن ل خوارێ دوو ڕێکین بۆ سادەکرنا $\log 80+\log 20$ کیژ وان نە یادروستە؟

أ
$\log 80+\log 20=\log(80\times20)$
$=\log 1600$
$=\log(16\times10^2)$
$=\log 16+\log 10^2$
$=\log 16+2$

ب
$\log 80+\log 20=\log(80+20)$
$=\log 100$
$=\log(10^2)$
$=2\log 10$
$=2$



66 **کیژ یەکسانی نەیا دروستە؟**

أ $\log 140-\log 35=\log 4$ ب $\frac{\log 140}{\log 35}=\log 4$

ج $\log 35+\log 4=\log 140$ د $\log\frac{140}{35}=\log 4$

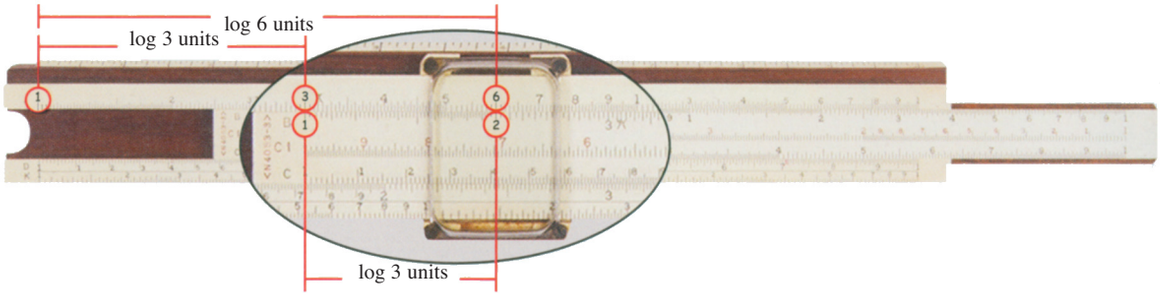
67 $\log_9 x^2 + \log_9 x$ ب سادەترین شێوە بنڤیسە.

أ) $\log_9(x^2+x)$ ب) $\log_9(3x)$ ج) $3\log_9 x$ د) $3(x^2+x)$

68 کیژ بڕێ لۆگاریتمی یەکسانە $\log 6$ ؟

أ) $\log 3+\log 2$ ب) $\log 3+\log 3$ ج) $\log 3\times\log 2$ د) $\log 3\times\log 3$

بەرهنگاری و بەرفرەهکرن



69 **میژوویا بیرکاریێ** بەری پەیدابوونا بژمێران، ئەندازیار و قوتابیان جۆرەکی ڕاستەیان بکاردئینان، بۆ هەژمارکرنا کرداڕێن بیرکاریێ یێن ئالۆز. ئەو ڕاستەیە پێکدهات ژ دوو هێلێن ژمارەیان کو ئێك ل سەر یا دی دتەحسی، و پیڤەرێ هەر ئێك ژ وانا لۆگاریتم بوو، و ب وێ دشیان سیفەتێن لۆگاریتمان بکاربینن د لێکدان و دابەشکرنێدا.

أ ل وێنەیی چەوا ئەنجامێ لێکدانا 2 ل 3 دیار دکەی؟

ب ئەو چەوا سیفەتێ لۆگاریتما ئەنجامێ لێکدانێ دنوێنیت؟

بواڕێ نەخشەیێ دیار بکە :

70 $f(x)=\log(x^2-4)$ **71** $f(x)=\log x-\log(x-1)$ **72** $f(x)=\log\left(\frac{x}{x^2-1}\right)$

73 $f(x)=\log\left(\frac{1}{x}\right)^2$ **74** $f(x)=-\sqrt{\log(x+1)}$ **75** $f(x)=\sqrt{-2\log(-x)}$

76 بسەلمێنە کو: $\log_b a^p = p\log_b a$ **77** $\log_9 3^{2x}$ سادەبکە

هەر هاوکێشەیەکێ شیکار بکە

78 $\log_x 25=2$ **79** $\log_x(-8)=3$ **80** $0=\log_x 1$

پێداچوونا لوولپێچی

هەر هاوکێشەیەکێ شیکار بکە. *(پۆلێن پیشتر)*

81 $4(x+1)=3(2x-6)$ **82** $-20+8n=n+29$ **83** $8\left(n+\frac{3}{4}\right)=10n-4$

ژمارێ پێ i بنڤیسە. *(وانەیا 6-2)*

84 $3\sqrt{-16}$ **85** $-\frac{1}{2}\sqrt{-40}$ **86** $4\sqrt{-8}$ **87** $\sqrt{-125}$

هاوکێشەیا توانی ل سەر شێوەیێ لۆگاریتمی بنڤیسە. *(وانەیا 4 – 3)*

88 $5^3=125$ **89** $10^{-1}=1$ **90** $36^{0.5}=6$ **91** $4^x=256$

بهایێ بڕی بینەدەر. *(وانەیا 4 – 3)*

92 $\log_{12} 1$ **93** $\log_5 25$ **94** $\log_{16} 4$ **95** $\log_{625} 0.04$

5–4 لۆگاریتما سروشتی

Natural Logarithm

ئارمانج

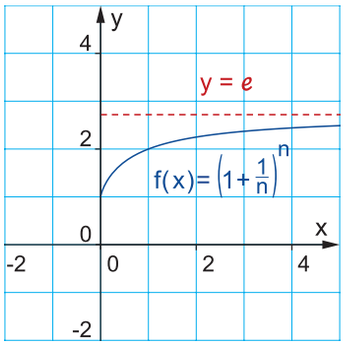
- ژمارە e دهێتە بکارئینان بۆ نڤیسینا نەخشەیێن توانی کو حالەتێن ژیانا رۆژانە دنوێنن.
- هێلکارێن ڤان نەخشەیان وێنە دکەن.
- هاوکێشە و پرسیارێن ژمارە e بخۆڤەدگرن و لۆگاریتمێن سروشتی دێ شیکارکەن.

کی ڤێ بکاردئینیت؟

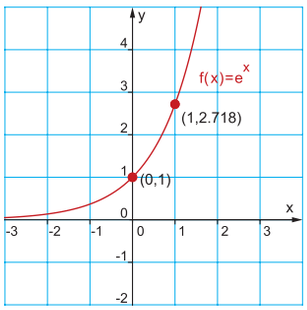
زانا لۆگاریتما سروشتی و مێژوویێ بکاردئینن بۆ دیارکرنا ژییێ بەرمایکێن گیاندارێن کەڤن (نموونە 4).

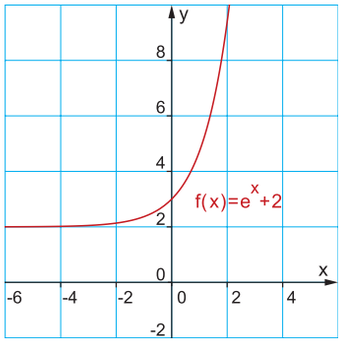
ل بیرا تەیە، یاسایا قازانجێ رێژەیی دبیتە $A=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ کو p هێمایێ کوژمەیێ بنەڕەتیە و A بهایێ نۆکە یێ ڤی کوژمەییە، و r تێکڕایێ سالانە یێ قازانجێیە، و t ژمارەیا سالانە، و n ژمارەیا جارێن ئەڤ حسابە دهێتە زێدەکرن د سالێدا.

مگرتی تە ئێك دینار دانا د حسابە خودا، تێکڕایێ قازانجێ وێ یێ سالانە دبیتە $100\%\left(r=1\right)$ ، وئەڤ حسابە n جاران د سالێدا دهێتە زێدەکرن، بهایێ ڤی کوژمەیی پشتی سالەکێ دێ بیتە $f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$. مەگرتی ژمارەیا جاران n زێدە دبیت و مەزن دبیت. هینگێ تو دشێی بێژی ئەڤ حسابە ب بەردەوامی دهێتە زێدەکرن. هێلکارێ نەخشەیا $f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ بپشکنە، ڤی نەخشەی دەرکنارەکێ ئاسوویی هەیە کو بهایێ نەخشەیێ نێزیکی ڤێ ژمارێ دبیت ...2.7182818 دەمێ n نێزیکی $+\infty$.دبیت، بیرکاری زان هێمایێ e بۆ ڤێ ژمارێ ددانن، کو ئەو ژی ژمارەیەکا نە رێژەییە وەکی ژمارە π .



نەخشەیێن توانی ئەوێن بنچینەیێ وان e ، هەمان سیفەتێن نەخشەیێن دی هەنە، و هێلکارێ نەخشەیا $f(x)=e^{x}$ وەکی هێلکارێن نەخشەیێن توانی یێن دییە، وەك $f(x)=3^{x}$ بواریێ نەخشەیا $f(x)=e^{x}$ دبیتە R، و مەودایێ وێ دبیتە $\{y/y>0\}$ دبێژنە نەخشەیا $f(x)=e^{x}$ **نەخشەیا توانی یا سروشتی Natural exponential funcio** و ئەڤێ رۆلەکێ مەزن هەیە د مێژوویا بیرکاریێدا.





زاراڤ
Vocabulary

لۆگاریتما سروشتی
Natural logarithm

نەخشەیا لۆگاریتما سروشتی
Natural logarithm function

هاریکاری

هێلکارێ نەخشەیا $f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ هاری تە دکەت دا ببینی کو بهایێن $N_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ بەرامبەر نێزیکی ژمارە e دبن.

نموونـــــە 1 وێنەکرنا هێلکارێن نەخشەیێن توانی یێن سروشتی

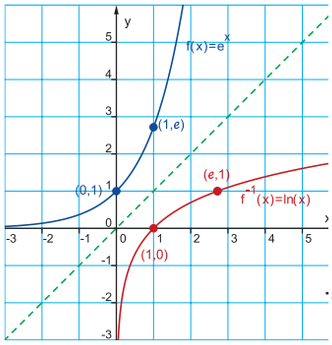
هێلکارێ نەخشەیا $f(x)=e^{x}+2$ وێنە بکە.

خشتەیەکی بهایان بۆ ڤێ نەخشەیێ پێکبینە. چونکی ژمارە e نە یا رێژەییە، دڤێت تو بهایێن ڤی نەخشەی نێزیکی دەهئێکێ بکەی بۆ نموونە.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)=e^{x}+2$	2.0	2.1	2.4	3	4.7	9.4	22.1

1. هێلکارێ نەخشەیا $f(x)=e^{x}-3$ وێنەبکە.

خالا چاڤدێریێ



لۆگاریتما سروشتی **Natural logarithm** لۆگاریتما بنچینەیێ وێ e یە. ئەم دێ هێمایێ $\ln$ بکارئینین دا دەربڕینێ ژ لۆگاریتما سروشتی بکەین. ئەڤێ لۆگاریتمێ هەمان سیفەتێن لۆگاریتمێن ئاسایی(دەهی) و لۆگاریتمێن دی هەنە.

نەخشەیا لۆگاریتما سروشتی **Natural logarithm function**

$f(x)=\ln x$ دبیتە نەخشەیا بەرۆڤاژی بۆ نەخشەیا توانی یا سروشتی. ئەو نەخشەیەکا لۆگاریتمییە ب بنچینە e . بواریێ وێ کۆمەلّەیا ژمارێن ڕاستی یێن موجەبە و مەودایێ وێ کومەلەیا هەموو ژمارەیێن ڕاستییە. و هێلکاریێ وێ ئەوێ بەرامبەرە.

نموونـــــە 2 سادەکرنا بڕێن توانی و لۆگاریتمی یێن سروشتی

هەر بڕەکی ب سادەترین شێوە بنڤیسە.

أ $\ln e^{-2t}$

$\ln e^{-2t}=-2t$

ب $e^{\ln(x-1)}$

$e^{\ln(x-1)}=x-1$

ج $e^{5\ln x}$

$e^{5\ln x}=e^{\ln x^5}=x^5$

خالا چاڤدێریێ

2. هەر بڕەکی ب سادەترین شێوە بنڤیسە.

أ $\ln e^{3.2}$ ب $e^{2\ln x}$ ج $\ln e^{x+4y}$

ڤەگەڕیان بۆ یاسایا قازانجی ئاوێتە، دێ $A=pe^{rt}$ دەمێ ئەو هەژمارتنا بەردەوام بیت.

نموونـــــە 3 بجهئینان ل سەر ئابووریێ

مەلیۆن دینار هاتنە دانان د بانکەکێدا بۆ ماوێ 10 سالان ب تێکرایێ قازانجێ سالانە 5% ، و دڤێت ئەو حسابە ب شێوەیەکێ بەردەوامی بیت. بهایێ حسابێ دێ بیتە چەند پشتی سالا 10 ؟

تێبینی

هەکەر تە بژمێر نەبیت:
$e^{0.5}\approx 1.648720$

یاسا

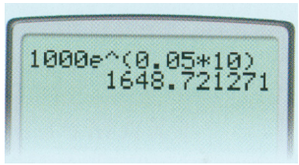
$A=pe^{rt}$

ل شوونێ دانە

$A=1000\ 000\ e^{0.05\times 10}$

بژمێرێ بکاربینە

$A\approx 1\ 648\ 720$

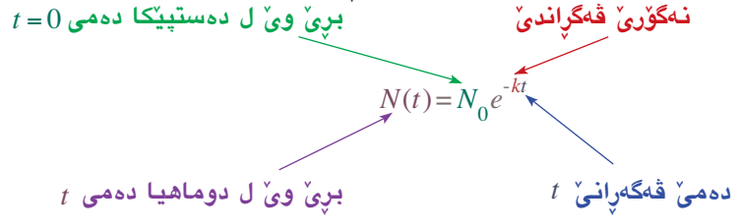


بهایێ حسابێ پشتی 10 سالان دێ بیتە 1 648 720 دینار ب نێزیکی.

خالا چاڤدێریێ

3. 100 000 دینار پشتی 8 سالان دێ بیتە چەند، بۆ زانین ئەڤ کوژمە هاتە دانان د حسابەکا بەردەوام دا، وب تێکڕایەکێ قازانجێ سالانە 3.5% ؟

زانا چەمکێ ژییێ نیڤێ بکاردئینن بۆ ڤەکۆلینێ ل سەر هندەك کەرەستەیان و نەخاسمە ئەوێن تیشکدار. ژییێ نیڤێ **half - life** یێ کەرەستەیەکی دبیتە دەمێ پێدڤی بۆ شیبوونا (اغلال) نیڤا ڤی کەرەستەی یان گوهۆڕینا وی بۆ تشتەکێ دی. نەخشەیا ل خوارێ دهێتە بکارئینان بۆ ڤەدیتنا ڤەکۆلینا لسەر ڤێ کریارا ڤەگەڕیانا سروشتی .



نموونـــــه 4 بجهێنانەك ل سەر گیاندارێن بنبڕبووین

زانایەکێ گیانەوەران ل کالیفۆرنیا کەلەخەکێ بوویە بەر یێ گیانەوەرەکێ دبێژنێ دوو (کێلبە شمشیر) دیت، کو ئەو دبیتە گیانەوەرەکێ بنبڕبووی ژ بنەمالا پشیکان. پشتی ڤەکۆلێن ل سەر کرین دیار بوو کو کەلەخێ وی 15% ژ کاربۆنا 14 تێدایە. ژییێ وی دیار بکە بۆ زانین ژییێ نیڤێ یێ کاربۆنا 14 دبیتە 5730 سال.

ئاگەهداریە!

ln هێمایێ لۆگاریتما سروشتییە لێ log هێمایێ لۆگاریتما ئاساییە (ئانکو بنچینە 10)

پێنگاڤا (1)ێ نەگۆڕێ ڤەگەڕانا کاربۆنا 14 بینەدەر.

$N(t)=N_0e^{-kt}$ نەخشەیا ڤەگەڕانا سروشتی

$\frac{1}{2}=1\times e^{-k\times 5730}$ ل شوونێ دانە

$\ln 2^{-1}=-5730k$ سادە بکە و لۆگاریتما سروشتی یێ هەر لایەکی وەربگرە. $ln\,2^{-1}=(-1)lu\,2=-ln\,2$

$-\ln 2=-5730k$

$k=\frac{\ln 2}{5730}\approx 0.00012$

پێنگاڤا (2)ێ یاسایا ڤەگەڕانێ بکاربینە و هاوکێشەیا دەردکەڤیت شیکار بکە.

$N(t)=N_0e^{-0.00012t}$ نەخشەیا ڤەگەڕانێ

$15=100\times e^{-0.00012t}$ لجهدانانێ بکاربینە 100

$0.15=e^{-0.00012t}$ هەردوو لایان لسەر 100 دابەشبکە.

$\ln 0.15=\ln e^{-0.00012t}$ سادە بکە و لۆگاریتما سروشتی بۆ هەر لایەکی وەربگرە.

$\ln 0.15=-0.00012t$ سادەبکە

$t=-\frac{\ln 0.15}{0.00012}\approx 15809.3$ شیکاربکە

650 mg

ئەڤ بەرماییکە دزڤریت بۆ 800 15 سالان ب نێزیکی.

خالا چاڤدێریێ

4. چەند سالّ دڤێت بۆ شیبوونا(انحلال) $650mg$ ژ کرۆمیۆم51 دا ببیتە 200 mg، بۆ زانین ژییێ نیڤێ یێ کرۆمیۆم 51 دبیتە 28 ڕۆژ ب نێزیکی؟

هزر بکە و گەنگەشێ بکە

فێربە و ژبەرکە

1. هەردوو ژمارە e و π ب چ وەکئێکن/ و ب چ جودانە .
2. ئەوا e و ln پێکڤە گرێددەت ڕۆنبکە.
3. ڕێکخەربە خشتەیی دوبارە بنقیسە پاشی تەمام بکە. خانەیێن خشتەی تەمام بکە دا خالێن وەکهەڤ و خالێن جودابوونێ دناڤبەرا هەردوو جۆرێن لۆگاریتمێدا دیار بکەی. شێویێ گشتی بنقیسە ل گەل نموونەیان. ل دەمێ پێدڤی سادە بکە.

	لۆگاریتما ئاسایی	لۆگاریتما سروشتی
بنچینە		
شێوەیێ لۆگاریتمی		
شێوەیێ توانی		
$\log_b 1$		
$\log_b b$		
$\log_b b^x$		
$b^{\log_b x}$		

5–4 ڕاهێنان

ڕاهێنانێن ئاراستەکری

1 **زاراف** لۆگاریتما سروشتی بۆ ژمارە x ل سەر شێوەیێ نەخشەیەکێ پێ x بنقیسە. دبێژنە قێ نەخشەیێ ـــــ؟ـــــ (لۆگاریتما سروشتی، لۆگاریتما دەهی).

بڕێ خۆ بدە نموونە 1

هێلکاریێ نەخشەی وێنە بکە.

2 $f(x)=e^{x}-4$ **3** $f(x)=-e^{x}$ **4** $f(x)=4-e^{x}$ **5** $f(x)=e^{1-x}$

بڕێ خۆ بدە نموونە 2

هەر بڕەکی ب سادەترین شێوە بنقیسە.

6 $\ln e^{1}$ **7** $\ln e^{x-y}$ **8** $\ln e^{\left(-\frac{x}{3}\right)}$ **9** e^{ln2x} **10** $e^{3\ln x}$

بڕێ خۆ بدە نموونە 3

11 **ئابووری** قیانێ 000 750 7 دینار دانانە د حسابەکا ب زێدەبوونا بەردەوامدا، ب قازانجەکی تێکڕایێ سالانە یێ وی 4%. بهایێ قێ حسابێ پشتی 5 سالان چەندە؟

بڕێ خۆ بدە نموونە 4

12 **فیزیا** تەکنتیوم Technetuim-99m کەرەستەیەکێ تیشکدارە، دهێتە بکارئینان د وێنەکرنا ماسوولکەیێن دلی و پەیکەرێ هەستیێ لەشێ مرۆڤێدا. ژییێ نیڤێ یێ قی کەرەستەی نێزیکی 6 دەمژمێرانە. نەگوڕێ ڤەگرانێ یێ قی کەرەستەی بینەدەر. نەخشەیا ڤەگەڕانێ : $N(t)=N_0e^{-kt}$ بکاربینە بۆ هەژمارکرنا ئەوا ژ 250 mg قی کەرەستەی دمینیت پشتی 24 دەمژمێران.

ڕاهێنان و شیکاکرنا پرسیاران

هێلکاری نەخشەیێ وێنە بکە.

13 $f(x)=e^{x}+1$ **14** $f(x)=e^{x}-1$ **15** $f(x)=1-e^{x}$ **16** $f(x)=10-e^{x}$

بڕی ب سادەترین شێوە بنقیسە.

17 $\ln e^{0}$ **18** $\ln e^{2x}$ **19** $e^{\ln(x+2)}$ **20** $e^{4\ln x}$

ڕاهێنانێن نازاد

بۆ شیکارکرنا ڕاهێنانان	بەرێ خۆ بدە نموونە
16–13	1
20–17	2
21	3
22	4

21 **ئابووری** حسابا دلشاد د بانکێدا 000 565 7 دینارا. دلشادی کوژمەیێ 000 000 5 دینار ژ وان بکارئینان بۆ حسابەکا تێکرایێ قازانجێ وێ یێ سالانە 3.5% و بەردەوام لێ زێدە دکەت. بهایێ گشتی یێ حسابا دلشاد پشتی سێ سالان دێ بیتە چەند؟

22 **ژینگەهـ** ل سالا 1986، کویرها ئەتۆمی تشیرنۆبل(مفاعل نووي) ل ئۆکرانیا تۆشی رووداندکێ بوو و چەندەکا مەزن ژ بلۆتۆنیۆم ژێ دەرکەت. ژییێ نیڤێ یێ قی کەرەستەی دبیتە 110 24 سال. نەگوڕێ ڤەگەرانێ یێ قی کەرەستەی بینەدەر. نەخشەیا ڤەگەڕانێ : $N(t)=N_0e^{-kt}$ بکاربینە بۆ هەژمارکرنا ئەوا مایی ژ 20g قی کەرەستەی پشتی 000 5 سالان؟ پشتی چەند سالان چەندیا ژ قان 20 گرامان مایی دێ بیتە ئێك گرام ؟

23 **بژمێر** بهایێ نێزیکی یێ هەر ئێك ژ : $\ln 10$ و $\log e$ بینەدەر.

أ هەردوو ژمارەیێن ب دەست تە کەفتین چەوا پێکڤە دهێتە گرێدان؟

ب ڕێسایا گوهۆڕینا بنچینەی بۆ پاڵپشتیا بەرسڤا خو بکاربینە.

24 ڕۆنبکە: $\ln x=\ln 10\times\log x$.

25 **پێنگاڤێن جۆرەوجۆر** د یاسایا نیوتن یا سارکرنێدا هاتیە: پلەیا گەرماتیا شلەیەکی کێمدبیت پێ نەخشەیا توانییا : $T = T_s + (T_0 - T_s)e^{-kt}$ ، کو T_0 پلەیا گەرماتیا بنەڕەتیە و T_s پلەیا گەرماتیا دەوروبەرێن وی تشتییە، و k ژمارەیەکا نەگۆڕە و t هێمایێ دەمییە. وەکی دەم ب خۆلەکان دهێتە هەژمارتن، $k = 0.283$. پلەیا گەرماتیا قەهوەخانەیەکێ 21 پلەیێن سەدییە، ئەو قەهوەیەکا پلەیا گەرماتیا وێ 96 پلەیێن سەدی ددتە مێهڤانێن خو. ئەو مێهڤانان شیرەت دکەت کو قەهوێ ڤەخون دەمێ پلەیا گەرماتیا وێ دبیتە 60 پلەیێن سەدی ب نێزیکی.

أ | دڤێت مێهڤان چەند خۆلەکان خو بگرت بەرێ قەهوێ ڤەخوت؟

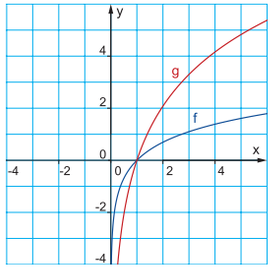
ب | بەرسڤا بۆری دێ بیتە چەند هەکەر پلەیا گەرماتیا قەهوەخانێ 30 پلەیێن سەدی بیت؟

ج | هێلکارێ نەخشەیا سارکرنێ وێنە بکە د هەردوو حالەتێن بۆریدا، و ب وێنەیێ ڕۆنکرنێ دەربێخە، ژماریا خۆلەکێن پێدڤی هەتا کو پلەیا گەرماتیا قەهوێ یەکسان بیت بۆ پلەیا گەرماتیا قەهوەخانێ.

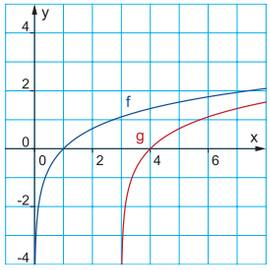
26 هێلکارێن هەردوو نەخشەیێن : $y = \frac{\ln x}{\ln 6}$ و $y = \frac{\log x}{\log 6}$ وێنە بکە. هەردوو هێلکاران بەراورە بکە، پاشی بەراوردیێ دناڤبەرا هەر ئێك ژ وان و هێلکارێ نەخشەیا : $y = \log_6 x$ بکە.

هەر نەخشەیەکا دیار بووی ژ گوهۆڕینا نەخشەیا: $f(x) = \ln x$ گرێدە دگەل ئێك ژ هێلکارێن ل خوارێ.

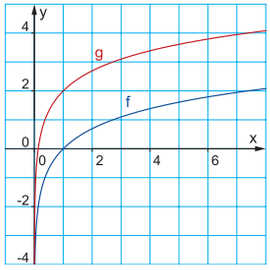
أ



ب



ج



27 $g(x) = \ln(x-3)$ **28** $g(x) = 3\ln x$ **29** $g(x) = \ln x + 2$

30 **ژینگەهـ** ڕێکخراوەك پووتەی ب ژێنگەهێ ددەت ل کەنەدا، ئەوێ خەملاند کو ژمارەیا خەزالێن رەننە ئەوێن ل دولا ڕووبارێ جۆرچ ل کەنەدا دژین، ل سالا 1954 گەهشتە 4 700 خەزال، و ئەڤ ژمارە ب توان زێدە بوو هەتا گەهشتیە 472 000 خەزالان ل سالا 1984 .

أ | نەخشەیا توانی $N(t) = N_0 e^{kt}$ بکاربینە ، کو N_0 هێمایێ ژمارەیا بنەڕەتە یا وان خەزالان ، هێمایێ t یێ دەمییە و هێمایێ $N(t)$ بۆ ژمارەیا خەزالان پشتی t سالان و k بۆ ڕێژەیا زێدەبوونا سالانەیە. بهایێ k بینەدەر.

ب | دێ چ بیت هەکەر؟ ئەڤ ئاژەلە بەردەوام ل سەر هەمان شێوازێ زێدەبوون، ژمارەیا وان ل سالا 2012 دێ بیتە چەند ؟

31 **ڤەگرتن** کارمەندێن بوارێ ساخلەمیێ، نەخشەیا $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ بکاردئینن بۆ پیڤانا مەودایێ بەلاڤبوونا ئێشەکێ دناڤ کۆمەلگەهەکێدا.

أ | هێلکارێ ڤی نەخشەیێ وێنە بکە.

ب | ڤی نەخشەیێ چەند دەرکنار هەنە؟

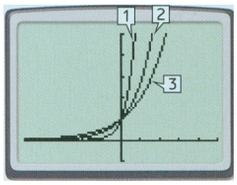
ج | وەسفێ ڤی نەخشەیێ بکە د حالەتەکی ڕاستی یێ بەلاڤبوونا ئێشەکێدا.

دەروازەیەك

زانستێن گیانەوەران

خەزالێن ڕەننە گیانەوەرەکێ کیڤییە ل دولا ڕووبارێ جۆرج دژین، دبیتە مەزنترین کەرێ ژ وی جۆری ل جیهانێ. ژمارەیا وان ل سالا 1993 ببوو نێزیکێ 776 000 سەران .

32 **هزرکرنا ڕەخنەگر** وێنەیێ بەرامبەر هێلکارێن نەخشەیان : $f(x)=2^x$ و $g(x)=10^x$ و $h(x)=e^x$ دیار دکەت.



أ هێلکارێن هەر ئێك ژ ڤان نەخشەیان ژێکجودا بکە.

ب پۆتانێن خالا هەڤپشك یا هەر سێ هێلکاران چییە؟

ج ئەگەر چییە کو ئەڤ خالە ببیتە هەڤپشك بۆ هەر سێ هێلکاران ؟

33 **بنڤیسە** بەراوردیێ بکە ل ناڤبەرا دانانا حسابەکا بانکێ ب شێوەیەکێ بەردەوام و ب شێوەیەکێ ڕۆژانە. ئەو حسابە دێ چەندێ قازانج کەت هەکەر یا بەردەوام بیت ل شوونا ڕۆژانە بیت؟ بەرسڤا خو ب نموونەیەکێ بێژە.

34 ژمارەیا زەڤیێن چاندنێ ل وەلاتەکی گەهشتنە 500 33 زەڤیان ل سالا 1990 و ل سالا 2000 بوویە 800 30 زەڤی.

أ بهایێ k د نەخشەیا توانیدا : $N(t)=N_0e^{kt}$ بینەدەر بۆ ب دەستڤەئینانا نموونەیەکی بۆ کێمبوونا ژمارەیا زەڤیان.

ب نموونەیێ بکاربینە بۆ خەملاندنا ژمارەیا زەڤیان ل سالا 2010 .

ج تێکڕایێ ڕووبەرێ زەڤیان زێدە بوو ل ماوەیێ 1990 - 2000 ژ 1209 بۆ 1279 دۆنەمان.
نموونەیەکا توانی بینەدەر، کو ڕێ بدەت بۆ خەملاندنا تێکڕایێ ڕووبەرێن زەڤیان ل سالا 2010 .

ئامادەکرن بۆ ئەزموونێ

35 کیژ کۆمەلّەیا بڕان یا ڕێزکریە ژ بچووکتر بۆ مەزنتر؟

أ) $\log e$ ، $\ln 10$ ، $\log 10$ ، $\ln 1$

ب) $\log e$ ، $\ln 1$ ، $\log 10$ ، $\ln 10$

ج) $\log e$ ، $\ln 1$ ، $\ln 10$ ، $\ln 10$

د) $\ln 1$ ، $\log 10$ ، $\ln 10$ ، $\log e$

36 کیژ بڕ یەکسانە x کو $x\neq 0$ ؟

أ) $e^{\ln x}$ ب) $\ln e^x$ ج) $x\ln e$ د) $x+\ln e$

37 کیژ بڕ یەکسانە $\log 50$ ؟

أ) $\ln 50\div\ln 10$ ب) $\ln(50\div 10)$ ج) $\ln 50+\ln 10$ د) $(\ln 50)\times(\ln 10)$

38 **بەرسڤەکا کورت** بڕەکی بنڤیسە یەکسان بیت بۆ $-\ln x$ بێی بکارئینانا نیشانا سالب.

بەرهنگاری و بەرفرەهکرن

39 چەند جار د سالّەکێدا دڤێن بۆ دانانا حسابەکا بانکێ یا ب تێکڕایێ قازانجێ سالانە 8% ێ زێدە بکەین، دا بهایێ وێ ببیتە 99.9% ژ بهایێ وێ، هەکەر دانان یا بەردەوام بیت؟ ئەرێ گوهۆڕین د تێکڕایێ قازانجێدا دێ بەرسڤێ گوهۆڕیت؟ ڕونبکە.

40 هێلکارێ نەخشەیا $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\left(\frac{x^2}{2}\right)}$ وێنە بکە. هێلکارێ وەسفبکە، و بوار و مەودایێ وێ دیار بکە.

41 بەرسڤا ڤان پرسیاران بدە کو گرێدایینە دگەل ڤی نەخشێ: $f(x)=\ln x$

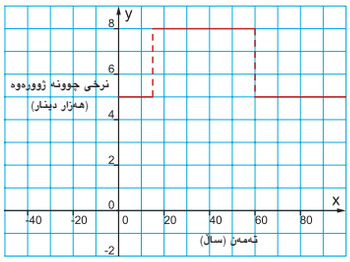
أ کیژ نەخشە ب وێنەیێ ڕۆنکرنێ دهێتە نواندن، ب وێنەدانەوەیا هێلکارێ نەخشەیا $f(x)$ ل دۆر تەوەرێ دووێ.

ب کیژ نەخشە ب وێنەیێ ڕۆنکرنێ دهێتە نواندن، ب وێنەدانەوەیا هێلکارێ نەخشەیا $f(x)$ ل دۆر تەوەرێ ئێکێ.

ج کیژ نەخشە ب وێنەیێ ڕۆنکرنێ دهێتە نواندن، ب وێنەدانەوەیا هێلکارێ نەخشەیا $f(x)$ ل دۆر هەردوو تەوەران ل دویڤ ئێکودوو.

د هێلکارێ نەخشەیا $f(x)$ و هەرسێ وێنەدانەوەیان ل هەمان ڕووتەختێ پۆتانی وێنە بکە.
ئەوان دەرکەنارن دیار بکە ئەوێن هەرچار هێلکار تێدا پشکدار دبن.

پێداچوونا لوولپێچی



42 **بۆ خۆشیێ** هێلکاریێ بەرامبەر، نرخێن چوونا ژۆر بۆ باغچەیەکێ گیانداران پێ ژییێ سەردانکەری دیار دکەت. هێلکارەکی وێنە بکە کو هەر ئێك ژ ڤان حالەتێن ل خوارێ بنوێنیت، و وێ جهگۆهۆرکێ دیار بکە، ئەوا رێ ددەت بۆ ب دەستقەئینانا هێلکاریێ پێ هێلکاریێ بەرامبەر. *(پولێن پێشتر)*.

أ بەری دەمژمێر 5:00 پ. ن . بها بو نیڤی دهێتە خوار.

ب بۆ هەر چەشنا ژییەکی، 3 ساڵ ژ بلندترین رادە ئینانەخوار.

ج هەموو بها هاتنە دوجاریکرن.

ئەوێ نەخشەیێ بنڤیسە ئەوا ژ جهگۆهۆرکا نەخشەیا: $f(x)=-2x^2+3x-4$ پەیدابووی، بۆ ڤان هەموو جهگۆهۆرکان. *(پۆلێن پێشتر)*.

43 ڕاکێشان بۆ سەری 5 یەکان.

44 ڕاکێشان بۆ لایێ چەپێ دوو یەکان.

45 وینەدانەوە ل دۆر تەوەرێ ئێکێ.

46 ڕاکشانا ئاسوویی ب هاوکۆلکێ 2 .

هەر بڕەکی بنڤیسە بکارئینانا ئێك لۆگاریتمێ. بەرسڤێ ب سادەترین شێوە دەربببڕە.

47 $\log_2 8+\log_2 \frac{1}{2}$

48 $\log_4 64-\log_4 1$

49 $\log_3 243-\log_3 2187$

50 $\log_5 25+\log_5 125$

51 $\log_8 8+\log_8 \frac{1}{8}$

52 $\log x^2+\log x$

6–4 هاوکێشە و لاسەنگەیێن توانی و لۆگاریتمی

Exponential and Logarithmic Equations and Inequalities

ئارمانج

- هاوکێشە و لاسەنگەیێن توانی و لۆگاریتمی دێ شیکار کەن.
- وان پرسیاران دێ شیکارکەن کو هاوکێشە و لاسەنگەیێن توانی و لۆگاریتمی ب خوەڤە دگرن .

کێ ئەڤێ بکاردئینیت؟

پیڤەرێن توانی بکاردهێن بۆ پیڤانا ڕۆناهیێ دکرداریێن وێنەگرتنێدا. (ڕاهێنان 40).

زاراڤ
Vocabulary

هاوکێشەیا توانی
Exponential Equation

هاوکێشەیا لۆگاریتمی
Logarithmic Equation

هاوکێشەیا توانی Exponential Equation هاوکێشەیەکە بڕەکی یان پتر ب خۆڤە دگریت کو گۆڕاو توان بیت ، دا کو هاوکێشەیەکا توانی شیکار بکەی:

- بزاڤێ بکە ب شێوەیەکی بنڤیسی کو هەموو هێزان هەمان بنچینە هەبن.
  هەکەر $b^x = b^y$ دێ $x = y$ $(b \neq 0 \quad b \neq 1)$
- لۆگاریتما هەردوو لایێن هاوکێشەیێ بکاربینە.
  هەکەر $a = b$ دێ $\log a = \log b$ ، $(a > 0 \quad b > 0)$

نموونـــــە 1 شیکارکرنا هاوکێشەیێن توانی

شیکار بکە و ساخبکە

أ $8^x = 2^{x+6}$

$(2^3)^x = 2^{x+6}$ وەك هێزەکێ بۆ 2 بنڤیسە دا هەمان بنچینە ب دەست تە بکەڤت. بۆ هەژمارکرنا هێزا هێزێ، هەردوو توانان لێکبدە.

$2^{3x} = 2^{x+6}$

$3x = x + 6$ چونکی بنچینە وەك ئێکودوونە، هەردوو توان یەکسانن.

$x = 3$ شیکار بکە.

ساخبکە

8^x	2^{x+6}
8^3	2^{3+6}
8^3	2^9
512	512 ✓

شیکار دبیتە $x = 3$

ب $5^{x-2} = 200$

$\log 5^{x-2} = \log 200$ چونکی 200 نە ژ هێزێن 5 ، لۆگاریتما هەردوو لایان وەربگرە.

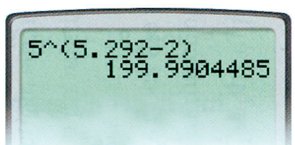
$(x-2)\log 5 = \log 200$ سیفەتێ لۆگاریتما هێزێ بکاربینە .

$x - 2 = \dfrac{\log 200}{\log 5}$ هەر لایەکی ل سەر log5 دابەشبکە.

$x = 2 + \dfrac{\log 200}{\log 5} \approx 5.292$

ساخبکە بژمێرێ بکاربینە .

شیکار دبیتە $x \approx 5.292$



ڕۆناهییەك

دەمێ بەرسڤەکا نێزیککری د کرادەکا ساخکرنێدا بکاردئینی، تو بەرسڤەکا دروست نابینی، لێ بەرسڤەکا بەرئاقل دێ بینی.

خالا چاڤدێریێ

1. شیکاربکە و ساخبکە.

أ $3^{2x} = 27$ **ب** $7^{-x} = 21$ **ج** $2^{3x} = 15$

نموونـــــه 2 بجهێنان ل سەر پارەی

تو دشێی هەلبژێری، ل ناڤبەرا ب دەستڤەئینانا ترومبێلەکا بهایێ وێ 20 مەلیۆن دینار یان ب دەستڤەئینانا ئێك دینار ل ڕۆژا ئێکێ و دوجارانی وێ ل ڕۆژا دووێ، و هەروەسا هەکەر تە یا دووێ هەلبژارت، کیژ ڕۆژێ دێ کوژمەکی مەزنتر ژ بهایێ ترومبێلێ وەرگری؟

ڕۆژا ئێکێ دێ دیناڕەکێ ب دەستڤەئینی، ئانکو 2^0 و دوو دیناران ل ڕۆژا دووێ 2^1 و هەروەسا دێ 2^{n-1} دیناران ب دەستڤەئینی ل ڕۆژا n. بۆ دەرئینانا بەرسڤێ، لاسەنگەیێ شیکار بکە.

$$2^{n-1} > 20\ 000\ 000$$

20 مەلیۆنان ل سەر شێوەیێ زانستی بنڤیسە. $2^{n-1} > 2\times10^7$

لۆگاریتما هەر لایەکی وەربگرە $\log(2^{n-1}) > \log(2\times10^7)$

سیفەتێ هێزێ و سیفەتێ ئەنجامێ لێکبدنێ بکاربینە. . $(n-1)\log 2 > \log 2 + \log 10^7$

$\log 10^7 = 7$ $(n-1)\log 2 > \log 2 + 7$

هەر لایەکی ل سەر $\log 2$ دابەشبکە $n-1 > \frac{\log 2+7}{\log 2}$

بژمێرێ بکاربینە.

بەرسڤێ بۆ نێزیکترین ژمارەیا تەواو نێزیکبکە ژ ڕەخێ سەریڤە. $n > \frac{\log 2+7}{\log 2}+1$

$n > 25.26$

ژ ڕۆژا بیست و شەشێ و پێڤە، ئەوێ وەردگری دێ ژ بهایێ ترومبێلێ زێدەتربیت.
ساخبکە چونکی $2^{26-1} = 2^{25} = 33\ 554\ 432$ تو دێ ڕۆژا بیست و شەشێ 32 44 55 33 دیناران وەرگری و ئەو کوژمە ژ بهایێ ترومبێلێ زێدەترە.

تێبینی

یا ئاساییە کو قوتابی بەراوردیێ بکەت د ناڤبەرا سەرجەمێ دێ وەرگرت هەتا ژ بهایێ ترومبێلێ دبۆرت، ئانکو دڤێت شیکار بکەت.

$2^0+2^1+2^2\ldots+$
$2^{n+1}>20\times10^6$
$\Longrightarrow n=24$

تێبینی

هەکەر تە بژمێر نەبیت:
$\log 2 \approx 0.30$
$\log 3 \approx 0.47$
$\log 5 \approx 0.69$

خالا چاڤدێریێ

2. مگرتی د نموونەیا 2 ێدا، ئەو کوژمێ ڕۆژانە وەردگری، 3 جارانی کوژمێ ل ڕۆژا بەری وێیە، ل شوونا دوو جاران. ل کیژ ڕۆژێ ئەو کوژمێ وەردگری دێ ژ بهایێ ترومبێلێ زێدەتربیت؟

هاوکێشەیا لۆگاریتمی Logarithmic Equation هاوکێشەیەکە بڕەکێ لۆگاریتمێ یان پتر ب خوەڤە دگریت، کو نەزانراوەکی ب خۆڤە دگریت. تو دشێی هاوکێشەیێن لۆگاریتمی شیکار بکەی بکارئینانا سیفەتێن لۆگاریتمان.

نموونـــــه 3 شیکارکرنا هاوکێشەیێن لۆگاریتمی

شیکاربکە

أ $\log_3(x-5)=2$

3 بکاربینە وەك بنچینەیەکێ هەڤپشك بۆ هەردوو لایان. $3^{\log_3(x-5)} = 3^2$

بەروڤاژیکرنێ بکاربینە دناڤبەرا هێز و لۆگاریتمێدا سادەبکە. $x-5=9$

$x=14$

ب $\log 45x - \log 3 = 1$

سیفەتێ لۆگاریتما ئەنجامی دابەشکرنێ بکاربینە دابەشبکە. $\log\left(\frac{45x}{3}\right)=1$

10 بکاربینە وەك بنچینەیەکێ دناڤبەرا هەردوو لایاندا بەروڤاژیکرنێ بکاربینە دناڤبەرا هێز و لۆگاریتمێدا . سادەبکە $\log(15x)=1$

$10^{\log(15x)} = 10^1$

$15x=10$

$x=\frac{2}{3}$

ل بیرا تەبیت

پێداچوونا سیفەتێن لۆگاریتمێ بکە ل وانەیا 4-4 .

ج

$\log_4 x^2 = 7$

سیفەتێ لۆگاریتما هێزێ.

$2\log_4 x = 7$

هەردوو لایان ل سەر 2 دابەشبکە.

$\log_4 x = \frac{7}{2}$

پیناسەیا لۆگاریتمێ.

$x = 4^{\frac{7}{2}}$

$4 = 2^2$

سادە بکە .

$x = \left(2^2\right)^{\frac{7}{2}}$

$x = 2^7 = 128$

د

$\log x + \log(x+9) = 1$

سیفەتێ لۆگاریتما ئەنجامێ لێکبدانێ بکاربینە

$\log x(x+9) = 1$

10 بکاربینە وەك بنچینەیەکێ هەڤپشك دناڤبەرا هەردوو لایاندا.

$10^{\log x(x+9)} = 10^1$

بەرۆڤاژیکرنێ بکاربینە د ناڤبەرا هێز و لۆگاریتمێدا.

$x(x+9) = 10$

رادەیان لێکبدە و کۆمبکە.

$x^2 + 9x - 10 = 0$

شیتەلبکە

$(x-1)(x+10) = 0$

سیفەتێ لێکدانا سفرێ بکاربینە.

$x-1=0$ یان $x+10=0$

شیکار بکە.

$x = 1$ یان $x = -10$

ساخبکە

$\log x + \log(x+9)$	1
$\log 1 + \log(1+9)$	1
$\log 1 + \log 10$	1
$0 + 1$	1
$0 + 1$	1 ✓

ئانکو، شیکار دبیتە $x = 1$

$\log x + \log(x+9)$	1
$\log(-10) + \log(-10+9)$	1 ✗

$\log(-10)$ نە پێناسە کریە

ئاگاداریە!

هەر جار خو ژ شیکاران پشتراست بکە، چونکی چێدبیت ریکا شیکارکرنێ هندەك شیکارێن نە ڕەوا بێنە دناڤ شیکاراندا

خالا چاڤدێریێ

3. شیکاربکە

أ $3 = \log 8 + 3\log x$

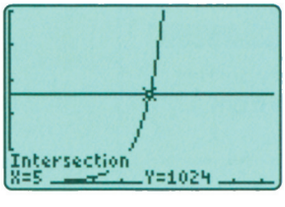
ب $2\log x - \log 4 = 0$

نموونە 4 بکارئینانا خشتە و وێنەیێن ڕۆنکرنێ بۆ شیکارکرنا هاوکێشە و لاسەنگەییێن توانی و لۆگاریتمی.

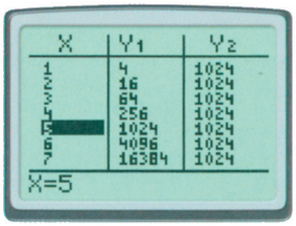
خشتەیەکی و وێنەیەکێ ڕۆنکرنێ بکاربینە دا شیکار بکەی.

أ $2^{2x} = 1024$

بژمێرا ڕۆنکرنێ بکاربینە. $2^{\wedge}(2X)$ تومار بکە ل بەرامبەر Y1 و 1024 ل بەرامبەر Y2 .



د وێنەیێ ڕۆنکرنێدا، ل پۆتانێ ئێکێ یێ خالا ئێکودوو بڕینا هەردوو هێلکاران بگەڕە.

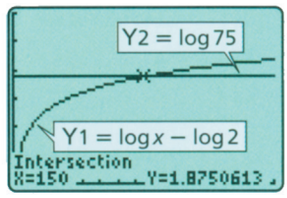


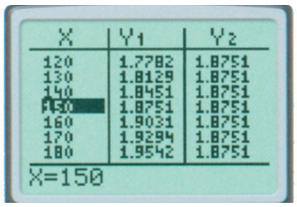
د خشتەیدا، ل بهایێ x بگەڕە ئەوێ وەسا دکەت کو Y1 = Y2

شیکار دبیتە $x = 5$

ب $\log x - \log 2 \le \log 75$

بژمێرا ڕۆنکرنێ بکاربینه $\log x - \log 2$ تۆماربکه ل بەرامبەر Y1 و $\log 75$ ل بەرامبەر Y2.





د وێنەیێ ڕۆنکرنێدا، ل پۆتانێ ئێکێ یێ خالا ئێکودوو بڕینا هەردوو هێلکاران بگەڕە.

د خشتەیدا، ل بهایێن x بگەڕە ئەوێ وەسا دکەت کو $Y1 \le Y2$.

کۆمەلّەیا شیکارێ دبیته $\{x/x \le 150\}$

ساخبکه: جەبرێ بکاربینه.

$\log x - \log 2 \le \log 75$	
$\log \frac{x}{2} \le \log 75$	*سیفەتێ لۆگاریتما ئەنجامێ دابەشکرنێ بکاربینه.*
$10^{\log \frac{x}{2}} \le 10^{\log 75}$	*10 بکاربینه وەك بنچینەیەکێ هەڤپشك دناڤبەرا هەردوو لایاندا.*
$\frac{x}{2} \le 75$	*بەروڤاژیکرنێ بکاربینه دناڤبەرا هێز و لۆگاریتمێدا.*
$x \le 150$ √	*سادە بکه.*

4. خشتەیەکێ و وێنەیەکێ ڕۆنکرنێ بکاربینه دا شیکار بکەی.

خالا چاڤدێریێ

أ $2^x = 4^{x-1}$ ب $2^x > 4^{x-1}$ ج $\log x^2 = 6$

هزربکه و گەنگەشێ بکه

1. بۆچی دێ دەرئەنجام کەی هەکەر $\log a = \log b$ دێ $a = b$ دەمێ $a > 0$ و $b > 0$؟
2. پێنگاڤا ئێکێ ب تنێ بێژە، ل شیکارکرنا هەر ئێك ژ ئەڤێن ل خوارێ :

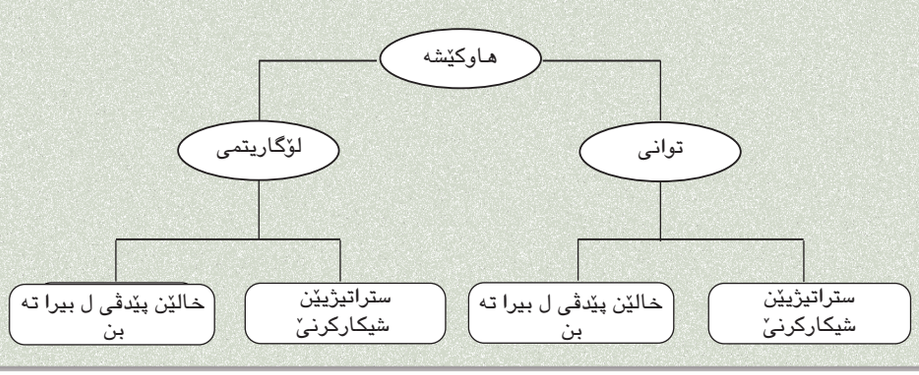
أ $\log x^5 = 10$ ب $\log 2x + \log 2 = 1$

ج $x^4 = 100$ د $\log(x + 1000) = 2$

هـ $\log(x + 4) + \log x = 2$ و $\log_6(x + 6) = 3$

3. ڕۆنبکه چەوا هاوکێشەیەکا لۆگاریتمی دێ شیکارەکا نێگەتیڤ هەبیت. ئەگەرێ بەرسڤا خو بێژە و نموونەیەکێ بۆ بەرسڤا خو بینه هەکەر یا وەسا بیت.
4. ڕێکخەربه، خشتەی دوبارە بنڤیسه پاشی تمام بکه. ب شێوازێ خو بنڤیسه ئەوان ستراتیژی و خالێن پێدڤی ل بیرا تە بن دەربارەی هاوکێشەیێن توانی و لۆگاریتمی.

فێربه و بڕێبکه



6–4 ڕاهێنان

ڕاهێنانێن ئاراستەی

1 **زاراف** تو دشێی هاوکێشەیا _____ شیکار بکەی، ب وەرگرتنا لۆگاریتما هەردوو لایان. (توانی یان لۆگاریتمی)

بەری خۆ بدە نمونە 1

شیکاربکە و ساخبکە .

2 $4^{2x} = 32^{\frac{1}{2}}$ **3** $9^{x} = 3^{x-2}$ **4** $2^{x} = 4^{x+1}$

5 $4^{x} = 10$ **6** $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ **7** $2.4^{3x+1} = 9$

بەری خۆ بدە نمونە 2

8 **ئاکنجی** ژمارەیا ئاکنجیێن گوندەکی دبیتە 3400 کەس، و ئەڤ ژمارە سالانە ب ڕێژەیا 3% زێدە دبیت. ئەم دشێین نەخشەیا $P = 3400(1+0.03)^{t}$ بکاربینن بۆ نواندنا ژمارەیا ئاکنجیان پێ دەمی t . کو p دبیتە ژمارەیا ئاکنجیان پشتی t ساڵان. ژمارەیا ئاکنجیان پشتی چەند ساڵان دێ ژ 100 000 کەسان بۆریت.

بەری خۆ بدە نمونە 3

شیکاربکە و ساخبکە.

9 $\log_2(7x+1) = \log_2(2-x)$ **10** $\log_6(2x+3) = 3$

11 $\log 72 - \log\left(\frac{2x}{3}\right) = 0$ **12** $\log_3 x^{9} = 12$

13 $\log_7(3-4x) = \log_7\left(\frac{x}{3}\right)$ **14** $\log 50 + \log\left(\frac{x}{2}\right) = 2$

15 $\log x + \log(x+48) = 2$ **16** $\log\left(x+\frac{3}{10}\right) + \log x + 1 = 0$

بەری خۆ بدە نمونە 4

خشتەیەکی و ویێنەیەکێ ڕۆنکرنێ بکاربینە دا شیکار بکەی:-

17 $2^{2x+1} = 256$ **18** $2^{x}3^{x} \le 7776$ **19** $2\log x^{4} = 16$ **20** $x > 10\log x$

ڕاهێنان و شیکارکرنا پرسیاران

شیکاربکە و ساخبکە .

21 $2^{x-1} = \frac{1}{64}$ **22** $\left(\frac{1}{4}\right)^{x} = 8^{x-1}$ **23** $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} = 125^{\frac{x}{2}}$

24 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 1.6$ **25** $(1.5)^{x-1} = 14.5$ **26** $3^{\frac{x}{2}+1} = 12.2$

27 **دەرمان** پەرستارەکی حەبکەکا ئارامکەر دا نەساخەکی کو 325mg ژ ئەسپرینێ تێدا بوو. نەخشەیا $A = 325\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{15}}$ دهێتە بکارئینان بۆ دیارکرنا چەندیا ئەسپرینا مایی د خوینا نەساخیدا پشتی t خولەك ژ خوارنا حەبکا ئارامکەر. لاسەنگەیەکا لۆگاریتمی بنقیسە و شیکاربکە، بۆ دیارکرنا ژمارەیا خولەکێن پێدڤی دا چەندیا ئەسپرینێ ژ 50mg کێمتر بیت.

شیکاربکە

28 $\log_3(7x) = \log_3(2x+0.5)$ **29** $\log_2\left(1+\frac{x}{2}\right) = 4$

30 $\log 5x - \log(15.5) = 2$ **31** $\log_5 x^{4} = 2.5$

32 $\log x - \log\left(\frac{x}{100}\right) = x$ **33** $2 - \log 3x = \log\left(\frac{x}{12}\right)$

خشتەیەکی یان جەبرێ بکاربینە دا شیکار بکەی.

34 $2 \times 3^{x-1} = 162$ **35** $4x \le 2^{x+1}$ **36** $\log(2x-17) + \log x \ge 2$

ڕاهێنانێن ئازاد	
بۆ شیکارکرنا بەرێ خو بدە نموونە	ڕاهێنانان
1	26–21
2	27
3	33–28
4	36–34

37 شیکاربکە : $\log x = \log(x^2 - 12)$. بەرسڤا خو رۆنبکە.

38 شیکاربکە : $5^{2x} = 100$. بەرسڤێ بۆ نێزیکترین بەش ژ سەدێ نێزیکبکە.

39 شیکاربکە : $5^{x+2} = 64$. پتر ژ ریکەکێ بکاربینە.

40 **مۆزیك** لەرەلەرا هەر ئاوازەکێ(ب هیرتز) ژ ئاوازێن پیانۆیێ، دهێتە گرێدان ب پیوەندیەکێ دگەل کلیلکێن تەختێ کلیلکان پێ نەخشەیا: $f(n) = 440 \times 2^{\frac{n}{12}}$، کو n دبیتە ژمارەیا وان کلیلکێن هەر ئێکێ ژ کلیلکا بنەڕەتی جودا دکەت، (n دێ یا سالب بیت هەکەر کلیلك ل رەخێ چەپێ یێ کلیلکا بنەڕەتی بیت، و دێ یا مووجەب بیت هەکەر کلیلك ل ڕەخێ ڕاستێ یێ کلیلکا بنەڕەتی بیت). جهێ کلیلکا ئاوازەکا لەرەلەرا وێ 110 هێرتز بینەدەر.

41 **پارەدان** مگرتی کوژمێ 250 000 دیناران هاتە دانان دبانکەکا قازانجەکێ وەرزی یێ ئاوێتە ددەت کو تێکرایێ وی 4.5%، و ئەڤ حسابە وەرزی دهێتە دانان (ئانکو سالّێ 4 جاران) $A = P(1+r)^n$ دهێتە بکارئینان بۆ هەژمارکرنا کوژمەکێ بنەڕەتی بهایێ وی p دێ چ لێ هێت، هەکەر هاتە دانان د حسابەکا قازانجەکێ ئاوێتەدا ب تێکرایێ r د وەرزیدا، پشتی بۆرینا n وەرزان ژ بەروارا دانانێ، ڤێ یاسایێ بکاربینە بۆ دەرئینانا وەرزێن پێدڤی دا ئەڤ کوژمە ببیتە 500 000 دینار ب کێماسی. (هاریکاری: هەردوو لایێن هاوکێشەی دابەشی p بکە).

42 **هزرکرنا ڕەخنەگر** چەند ژمارەیێن راستی دبنە شیکار بۆ لاسەنگەیا $\log x^2 < 2\log x$ ؟ بژمێرا رۆنکرنێ بکاربینە بۆ وێنەکرنا هەردوو وێنەیان، و ساخکرنا بەرسڤێ. رۆنبکە کا هەردوو وێنە چ دیار دکەن دەربارەی بەرسڤێ.

43 **شاشی د شیکارکرنێدا** دەمێ هاوکێشەیا: $\log x + 4 = 8$ ، دانا بەرسڤ: 999999 ب دەستڤەئینا. دانا ل کیژ جهی شاشی کر؟

44 **بنڤیسە** بەحسێ دوو ڕێیان بکە، تو بشێی بکاربینی بۆ شیکارکرنا هاوکێشەیەکا توانی. نموونەیەکێ بینە تێدا رۆنبکەی کا هەر ڕێیەکێ کەنگی بکاردئینی.

دەروازەیەك

مۆزیك

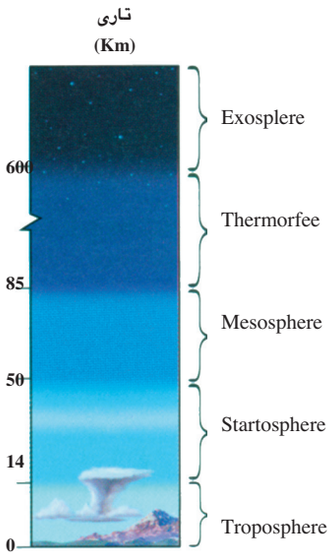
پیانۆ وەك ئامیرەکێ موزیکی یێ ژێدار د دەهولێ دهێتە دانان د ئێك دەمی دا، چەکوچێ بچووك بکاردهێت بۆ لێدانا ژیێن وێ.

45 ئەم دشێین نەخشەیا $N(t) = 119(0.987)^t$ وەك نموونە بکاربینین بۆ دیارکرنا ژمارەیا پروژەیێن مریشکان، ب هزاران، ل وەلاتەکی پێ ژمارەیا سالان t ئەوێن ل دویڤ 1980 دهێن.

أ ئەرێ ژمارەیا پروژەیان پشتی سالا 1980 بەرەڤ زێدەبوون یان کێمبوونە؟ تە چەوا زانی؟

ب ژمارەیا پروژەیان ل وی وەلاتی ل سالا 1980 و ل سالا 2000 چەند بوو؟

ج پێ ئەوێ نەخشەیێ، کەنگی ژمارەیا پرۆژەیان دێ بیتە نێزیکی 80 000 پروژە؟



46 **کەشناسی** ل چینەکا بەرگێ هەواییدا(طبقه الغلاف الجوی)، کو پلەیا گەرماتیێ یا نەگۆرە و دبیتە $-57°$ ، ئەم دشێین نەخشەیا : $P(h)=128(10)^{-0.0682h}$ بکاربینین وەك نموونەیەك بۆ پیڤانا پەستانا هەوایی p (ب کیلۆ باسکال kpa) پێ بلندایێ h (ب کیلۆمەتر) ل سەر ئاستێ رووییێ دەریایێ. پەستانا هەواییێ ل قێ چینێ دناڤبەرا $2.55\ kpa$ و $22.9\ kpa$ دایە .

أ نزمترین بلنداهی و بلندترین بلنداهی ل قێ چینێ چەندە کو نموونە بۆ وێ یا دروست بیت؟

ب دێ چ بیت هەکەر؟ پەستانا هەوایی ل ئاستێ رووییێ دەریایی بگەهیتە $101\ kpa$ب نێزیکی. هەکەر تە نموونەیا سەری بکارئینا بۆ دیارکرنا پەستانا هەوایی ل ئاستێ رووییێ دەریایێ، ئەرێ دێ بهایەکێ مەزنتر ژ بهایێ وێ یێ دروست ب دەست تە کەڤیت یان بهایەکێ کێمتر؟ ڕۆنبکە.

ئامادەکرن بۆ ئەزموونێ

47 شیکارا هاوکێشەیا: $b^x=c$ چییە؟

أ $x=\frac{\log b}{\log c}$ ب $x=\frac{\log c}{\log b}$ ج $x=\frac{\log b}{c}$ د $x=\frac{\log c}{b}$

48 شیکارا هاوکێشەیا: $\log(x-21)=2-\log x$ چییە.

أ $x=4$ ب $x=\frac{25}{4}$ ج $x=\frac{21}{2}$ د $x=25$

49 کیژ بڕ بهایێ مەزنتر وەردگرت دەمێ $p=5$ و $q=2$ ؟

أ $\log 2p-\log 3q$ ب $2\log q-3\log p$ ج $\log p^2-\log q^3$ د $\log p-\log q$

بەرهنگاری و بەرفرەهکرن

50 ئەرێ دێ شێی هاوکێشەیا: $\log_x x=x$ شیکار بکەی؟ ڕۆنبکە.

51 هاوکێشەیا: $x=0.125^{\log_2 5}$ ب جەبری شیکار بکە.

52 کۆمەڵەیا شیکاری بۆلاسەنگەیا $\log_3 36-\log_3 x>1$ بهەژمێرە؟ بژمێرا ڕۆنکرنێ بکاربینە بۆ شیکارکرنا لاسەنگەیێ ب وێنەیێ ڕۆنکرنێ

پێداچوونا لوولپێچی

53 **وێنەگرتن** بهایێ شووشتنا وێنەیەکێ ژ پیڤانا $24cm\times 20cm$ دبیتە 750 دینار. و بهایێ شووشتنا وێنەیەکێ ژ پیڤانا: $15cm\times 10cm$ دبیتە 350 دینار. ئارێ 5250 دینار هەنە. هێمایێ x بکاربینە بۆ ژمارەیا وێنەیێن ژ پیڤانا ئێکێ، وهێمایێ y بکاربینە بۆ ژمارەیا وێنەیێن ژ پیڤانا دووێ، *(وانەیا 2 – 1)*.

أ لاسەنگەیەکێ بنقیسە بۆ ژمارەیا وێنەیێن ئاری پشێت بشۆت ژ هەر پیڤانەکێ.

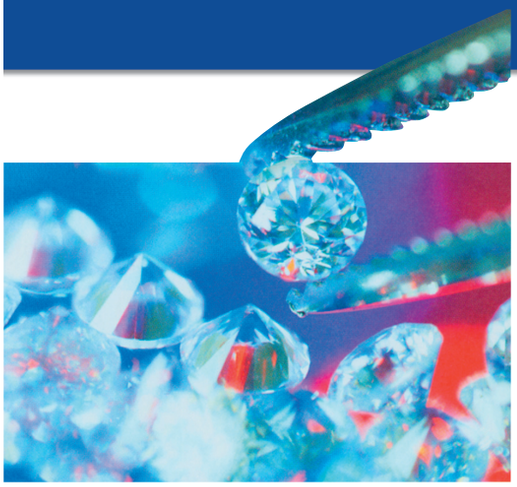
ب لاسەنگەیێ ب وێنەیێ ڕۆنکرنێ شیکاربکە. ئاری دێ شێت چەند وێنەیان ژ پیڤانا دووێ بشۆت، هەکەر بزانی وی 4 وێنە ژ پیڤانا ئێکێ شووشتن؟

سنووداریێ ڕێزکریێ بینەدەر *(وانە 3 – 4)*

54 $\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 7\end{pmatrix}$ **55** $\begin{pmatrix}-1 & -5\\ 9 & 10\end{pmatrix}$ **56** $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -1\\ 0 & 6\end{pmatrix}$ **57** $\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ 6 & 9\end{pmatrix}$

کردارێن بەرۆڤاژی بکاربینە بۆ دەرئینانا نەخشەیا بەرۆڤاژی *(وانەیا 4 – 2)*

58 $f(x)=4x+3$ **59** $f(x)=6(x-2)$ **60** $f(x)=\frac{x}{3}+9$ **61** $f(x)=\frac{7x-1}{5}$



7–4 نموونەییێن توانی و لۆگاریتمی

Exponential and Logarithmic Models

ئارمانج

- نەخشەییێن توانی و لۆگاریتمی دێ بکارئینن بۆ دەرئینانا سامپلان بۆ پێدانیان.
- نموونەییێن توانی و لۆگاریتمی دێ بکارئینن بۆ شلۆڤەکرن و دانانا پێشبینییان.

کێ ڤێ بکاردئینیت ؟

ئەو کەسێن بەرێن بهادار حولی دکەن، دزانن کو بهایێ گەوهەرێن ژهەمان جۆر پەیوەندییەکا توانی ب بارستەیا وانڤە گرێدایە. (نموونە 2)

چێدبیت بۆ شلۆڤەکرنا پێدانیان، شێوازەکی یان پەیوەندییەکێ دەربێخیت کو دناڤبەرا دوو چەندیاندا دوبارە دبیت. سەحکە خشتەیێ بهایان یێ نەخشەیا : $f(x) = 2(3^x)$.

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	2	6	18	54
		× 3	× 3	× 3	× 3

تێبینیێ بکە، ڕێژەیا هەر بهایەکی ژ بهایێن y بۆ بهایێ بەری وی، یا نەگۆڕە. هەر بهایەك ژ ڤان بهایان، ژبلی یێ ئێکێ، سێ جارانی یێ بەری وێیە. و هەروەسا، ڕێژەیا بهایێن نەخشەیا بەرامبەر بۆ بهایێن x ئەوێن هەمان دووراتی دناڤبەرا واندا، ڕێژەیەکا نەگۆڕە. ئەم دشێین پێدایێن وەکی ڤان ب نەخشەیەکا توانی بنوێنین : $f(x) = ab^x$.

زاراڤ Vocabulary

لێژبوونا توانی (الانحدار الاسی)
Exponential Regression

لێژبوونا لۆگاریتمی (الانحدار اللوغاریتمی)
Logarithm Regression

نموونە 1 ژێکچوداکرنا پێدایێن توانی

دیاربکە ئەرێ نەخشەیا f یا تواناییە یان نە. هەکەر یا توانی بیت، ڕێژەیا نەگۆڕ بینەدەر $f(x) = ab^x$

أ

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	−3	−1	1	3	5

جوداهییێن ئێکێ +2 +2 +2 +2

نەخشە نەخشەیەکا هێلییە چونکی جوداهییێن ئێکێ یەکسانن.

ب

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

جوداهییێن ئێکێ $+\frac{1}{2}$ +1 +2 +4

ڕێژە $\frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = 2$

نەخشە نەخشەیەکا تواناییە و ڕێژەیا نەگۆڕ دبیتە 2

ل بیرا تە بیت

نەخشەییێن هێلی دهێنە بکارئینان وەك سامپلەك بۆ وان پێدایێن جوداهییێن وان یێن ئێکێ نەگۆڕ بن. و نەخشەییێن دوجایی دهێنە بکارئینان وەك سامپلەك بۆ وان پێدایێن جوداهییێن وان یێن دووێ نەگۆڕ بن.

1. دیاربکە ئەرێ نەخشەیا f نەخشەیەکا تواناییە یان نە. هەکەر یا توانی بیت، ڕێژەیا نەگۆڕ بینەدەر $f(x) = ab^x$.

خالا چاڤدێریێ

أ

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	$2.\overline{6}$	4	6	9	13.5

ب

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	−3	2	7	12	17

ل دەمێن بۆری، تە بژمێرا رۆنکرنێ بکارئینا بۆ دیارکرنا نموونەیەکا هێلی کو پێدایێن هێلی بنوێنیت ئانکو تە کردارەکا **لێژبوونا هێلی** ئەنجامدا، تو دێ بژمێرا رۆنکرنێ بکارئینی بۆ دەرئینانا **نموونەیەکا توانی** کو پێدایێن توانی بنوێنیت. دەمێ پشتراست دبی کو ئەو پێدایێن توانینە، **فەرمانا ExpReg** (Exponential Regression) بکاربینە د بژمێرا رۆنکرنێدا، دا نموونەیەکا توانی بۆ ڤان پێدایان بینیەدەر. دبێژنە کردارا دەرئینانا نموونەیەکا توانی بۆ ناندنا کۆمەلەیەکا پێدایان، کردارا **لێژبوونا توانی Exponential Regression** نموونەیێن توانی ئەوێن بژمێرا رۆنکرنێ دەردئێخیت، ب تنێ نەخشەیێن ژ جۆری $f(x) = ab^x$ بخوڤەدگریت. لەورا ئەم نەشێین راکێشانا ڤان نەخشەیان د بژمێرێدا بنوێنین.

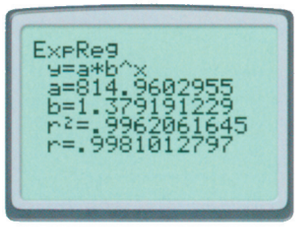
نموونـــــە 2 بجهئینان ل سەر حولیکرنا گەوهەران

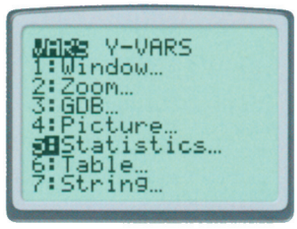
خشتەیێ بەرامبەر، بارستەیێن هندەك پارچەیێن ئەلماسی و بهایێن نێزیککری بۆ بهایێن وان دیاردکەت. نموونەیەکا توانی بۆ ڤان پێدایان بینەدەر. نموونەیا تە ئینایەدەر بکاربینە بۆ خەملاندنا بارستەیا ئەلماسەکا بهایێ وێ 2325 دینار.

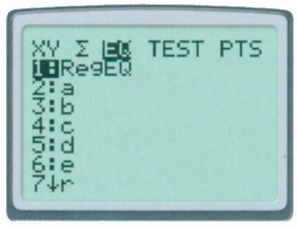
پێنگاڤا (1)ێ پێدایێن د هەر دوو لیستاندا دانە د بژمێرێدا. فەرمانا لێژبوونا توانی ExpReg بکاربینە. بژمێر دێ نموونەیەکا توانی بۆ ڤان پێدایان دەتە تە، ئەو ژی $V(w) = 805462.6\ (1.38)^{w}$ کو V هێمایێ بهایێ ئەلماسێیە و W هێمایێ بارستەیا وێیە پێڤایی ب قیراتێ.

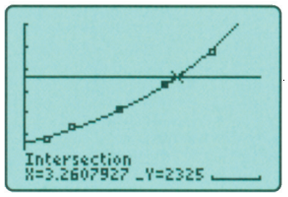
بهایێ ئەلماس	
بارستەیی (قیرات)	بها دینار
0.5	920 000
1.0	1 160 000
2.0	1 500 000
3.0	2 150 000
4.0	2 900 000

پێنگاڤا (2)ێ پێدایێن خشتەی ب وێنەیێ ڕۆنکرنێ بنوێنە، و هێلکاریێ نەخشەیێ وێنە بکە دا پشتڕاستبی کو نەخشە نموونەیەکێ بۆ پێدایان پێکدهینیت. بۆ تۆمارکرنا ڕێسایا نەخشەیا بەرامبەر Y1 د شاشەیا Y = دا، کلیلکا VARS لێبدە و **5 : Statistics** هەلبژێرە پاشی ENTER لێبدە. بلقە بۆ EQ و Reg EQ 1 : هەلبژێرە.









2 325 000 = V تۆماربکە بەرامبەر Y2 بۆ وێنەکرنا نەخشەیا: 2 325 000 دینار، نێزیکی 3,29 قیراتایە.

فەرمانا ئێکودووبڕینێ بۆ بژمێرێ بکاربینە. چێدبیت تو پێدڤی ب ڕاستڤەکرنا هەردوو دووریێن شاشێ ببی دا خالا ئێکودووبڕینێ دیار بکەت. بارستەیا ئەلماسا بهایێ وێ 2 325 000 دینار، نێزیکی 3,29 قیراتایە.

ل بیرا تە بیت

هەکەر تە r^2 و r ل سەر شاشا بژمێرێ نەدیت دەمێ لێژبوونێ هەژمار دکەی، کلیلکا CATALOG لێبدە پاشی کلیلکا Diagnosticon هەلبژێرە.

0

2nd

خالا چاڤدێریێ

2. لێژبوونا توانی بکاربینە بۆ دەرئینانا نموونەیەکی بۆ پێدایێن خشتەیێ ل خوارێ. کەنگی ژمارەیا بەکتریا دێ گەهتە 2000 بەکتریان.

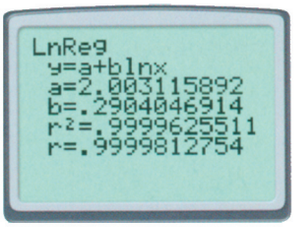
دەم (خولەك)	0	1	2	3	4	5
ژمارەیا بەکتریا	200	248	312	390	489	610

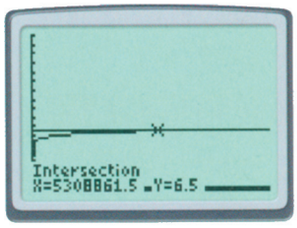
یا دشیاندایە گەلەك پێدایێن ژیانا ڕۆژانە ب نەخشەیێن لۆگاریتمیێ بنوێنن. تو دشێی بژمێرا ڕۆنکرنێ بکاربینی بۆ دەرئینانا **لێژبوونا لۆگاریتمی** **Logarithmic Regression**

نموونـــــە 3 بجهئینان ل سەر فیزیایێ

خشتەیێ بەرامبەر هێزا تەقینەکێ، ل سەر پیڤەرێ ڕێختەر، بۆ هندەك بڕین دیارکری ژ کەرەستەیێ TNT دیار دکەت. نەخشەیا لۆگاریتما سروشتی بینەدەر کو ببیتە نموونە بۆ ڤان پێدایان. نموونەیا تە ئینایەدەر بکاربینە، بۆ خەملاندنا بڕێ تەقەمەنیێن ژ کەرەستەیێ TNT یا یەکسان بۆ پیڤەلەرزەکا هێزا وێ 6.5 ل سەر پیڤەرێ ڕێختەر.

هێزا تەقەمەنیێ	
هێز	TNT تەن
2.0	
3.0	
4.0	
5.0	





پێدایان ب دوو لیستەیان د بژمێرا ڕۆنکرنێدا تۆمار بکە، پاشی فەرمانا لێژبوونا لۆگاریتمی بکاربینە. ل کلیلکا STAT بدە هەلبژێرە پاشی CALC **9 : LnReg** . نەخشەیا :

$R(x) = 2 + 0.29 \ln x$ کو R هێزا بیڤەلەرزێیە ل سەر پیڤەرێ ڕێختەر و x بڕێ تەقەمەنیێە ژ جۆرێ TNT ب تەنان، ئەڤ نەخشە دبیتە نموونەیەکا لۆگاریتمی بۆ نواندنا پێدایێن خشتەی.

بهایێ r^2 دیار دکەت کو ئەو نموونەیا گونجایە بۆ نواندنا پێدایێن خشتەی.

فەرمانا ئێکودووبڕینێ یا بژمێرا ڕۆنکرنێ بکاربینە دا x بینیەدەر دەمێ $y = 6.5$ بڕێ تەقەمەنیێ ژ کەرەستەیێ TNT ئەوا پەقینا وێ یەکسان دبیت بۆ پەقینا بیڤەلەرزەکا هێزا وێ 6.5 ل سەر پیڤەرێ ڕێختەر، دبیتە 5.3 تەن ب نێزیکی.

خالا چاڤدێریێ

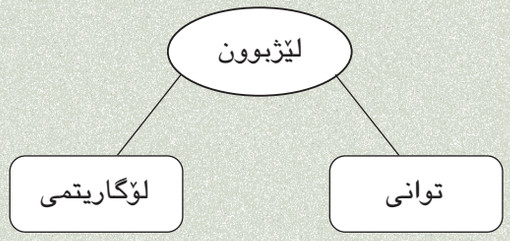
3. لێژبوونا لۆگاریتمی بکاربینە بۆ دەرئینانا نەخشەیەکێ کو ببیتە نموونە بۆ پێدایێن خشتەی. کەنگی دێ لەز گەهیتە $8\ m/s$ مەتر د چرکەیەکێدا؟

خولەك	1	2	3	4	5	6	7
لەز (m / s)	0.5	2.5	3.5	4.3	4.9	5.3	5.6

هزر بکە و گەنگەشێ بکە

1. چەوا دێ زانی هەکەر د شیاندا بیت کو پێدایێن ب نموونەیەکا توانی بنوێنی ل سەر شێوەیێ $f(x) = ab^x$ ؟
2. بۆچی پێدایێن ل دۆر خالان، تێرا ناکەن دا بزانی هەکەر د شیاندا بیت پێدایێن ب نموونەیەکا توانی یان لۆگاریتمی بنوێنی.
3. ڕێکخەربە هێلکاری بنقیسە و تەمام بکە. وان پێنگاڤێن پێدڤی دیاربکە بۆ دەرئینانا نموونەیەکا توانی یان نموونەیەکا لۆگاریتمی.

فێربە و ڕابەرێ بکە



7-4 ڕاهێنان

ڕاهێنانێن ئاراستەکری

1 **زاراف** ـــــــــــ دشیاندایە، دەمێ نواندنا پێداییان ب نەخشەیەکا ژ جۆرێ: $f(x)=ab^x$ بنوێنن. (لێژبوونا توانی یان لێژبوونا لۆگاریتمی).

بەرێ خۆ بدە نمونە 1 دیاربکە هەکەر f نەخشەیەکا توانی بیت ژ جۆرێ $f(x)=ab^x$. هەکەر وەسا بیت،ریژەیا نەگۆڕ دیاربکە.

2

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	$-2\frac{5}{7}$	−1	11	95	683

3

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	27	18	12	8	$5\frac{2}{3}$

4

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	5	1	−3	−7	−11

5

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	$2\frac{1}{4}$	3	4	$5\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{9}$

بەرێ خۆ بدە نمونە 2

6 **فیزیا** خشتەیێ ل خوارێ دیاردکەت، کا پلەیا گەرماتیا کووپەکێ چایێ چەند ژ پلەیا گەرماتیا ژۆرێ زێدەترە، دەمێ دتەزیت. نموونەیەکا توانی بینەدەر کو ڤان پێداییان بنوێنیت. نموونەیێ بکاربینە دا بخەملینی کا چەند خولەك دێ بۆرن بەری جوداهیا ل ناڤبەرا گەرماتیا کووپێ چایێ و گەرماتیا ژۆرێ ژ 4 پلەیان کێمتر لێ بیت.

چەوا چا دتەزیت					
دەم ب خولەکان	0	1	2	3	4
پلەیێن گەرماتیێ زێدەتر ژ گەرماتیا ژورێ	55	48	43	38	33

بەرێ خۆ بدە نمونە 3

7 **ئەندامبوون** خشتەیێ ل خوارێ، زێدەبوونا ژمارەیا ئەندامێن یانەیەکا جڤاکی ل مەهان دیار دکەت. نموونەیەکا لۆگاریتمی یا سروشتی بینەدەر کو پێداییێن خشتەی بنوێنیت. نموونەیێ بکاربینە دا بزانی کا چەند مەهـ پێدڤێن هەتا ژمارا ئەندامێن یانەیێ بگەهیتە 8000 ئەندامان.

ئەندامبوون بۆ یانەیێ					
دەم ب مەهان	6	18	42	90	150
ژمارەیا ئەندام	3000	4000	5000	6000	7000

ڕاهێنان وشیکارکرنا پرسیاران

دیاربکە ئەرێ f نەخشەیەکا توانییە ژ جۆرێ $f(x) = ab^x$ ، هەکەر یا وەسا بیت، ڕێژەیا نەگۆڕە دیاربکە.

ڕاهێنانێن ئازاد	
بۆ شیکارکرنا بەرێ خۆ بدە ڕاهێنانان	نموونە
11–8	1
12	2
13	4

8

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	1.25	1	0.75	0.5	0.25

9

x	−5	−3	1	3	5
$f(x)$	20	6	2	12	30

10

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	0.667	1	1.5	2.25	3.375

11

x	−1	0	1	2	3
$f(x)$	−16	−8	−4	−2	−1

12 **زانستێن کۆمەڵایەتی** خشتەیێ بەرامبەر، زێدەبوونا ژمارەیا شۆفێران ل وەلاتەکی دیار دکەت، ژ سالا 1970 هەتا سالا 2000 . نموونەیەکا توانی بۆ نواندنا پێدایێن خشتەی بینەدەر. نموونەیێ بکاربینە دا دیار بکەی، کەنگی ژمارەیا شۆفێران دێ ژ 120 مەلیۆنان بۆریت.

زێدەبوونا ژمارەیا شۆفێران			
سالێن پشتی 1970	10	20	30
ژمارە (ب مەلیۆنان)	14.6	22.5	35.3

13 **گەهاندن** خشتەیێ ل خوارێ، ژمارەیا پشکدارێن ئەنترنێتێ، ل وەلاتەکی، دیار دکەت ژ سالا 1990ێ هەتا سالا 2000 ێ. نموونەیەکا توانێ بۆ نواندنا پێدایێن خشتەی بینەدەر. نموونەیێ بکاربینە دا دیار بکەی، کەنگی ژمارەیا پشکداران دێ ژ 100 مەلیۆنان بۆریت.

ژمارەیا پشکدارێن ئەنترنێتێ											
سالێن پشتی 1990	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ژمارە (ب مەلیۆنان):	4.4	5.5	6.6	7.3	9.1	8.5	8.7	11.1	15.7	19.6	23.6

14 **ژینگەھ** پێزانینێن ل دۆر باڵندەیێ(غەرنۆق)، ئەوێ ل بەر بنبڕبوونێ، دیار دکەن کو ژمارەیێن وان بەرڤ زێدەبوونێیە. خشتەیێ ل خوارێ زێدەبوونا ژمارەیا وان د دەمێ 55 سالاندا دیار دکەت. نموونەیەکا لۆگاریتمی بینەدەر کو زێدەبوونا ژمارەیا ڤان باڵندەیان بنوێنیت کەنگی دێ ژمارەیا وانە گەهیتە 500 ؟

ژمارەیا باڵندەیێ غەرنۆق					
ژمارە	18	40	85	120	185
سالێن پشتی 1940	5	22	40	47	57

دیار بکە ئەرێ پێدایێن خشتەیێ توانییە یان نە. هەکەر وەسا بیت، لێژبوونا توانی بکاربینە بۆ دەرئینانا نموونەیەکێ کو وان بنوێنیت.

15

x	1	2	3	4
$f(x)$	11	95	683	4799

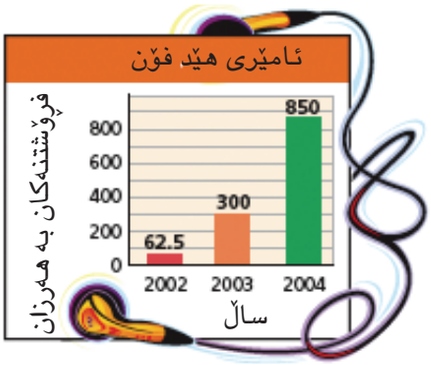
16

x	−1	0	2	3
$f(x)$	4	2	0.5	0.25

17 **هزرکرنا ڕەخنەگر** پێدایێن ل دۆر جۆرەکێ باڵندەیان ل ئەفریقیا دیار دکەن، کو ژمارەیا وان پتر ژ نیڤ مەلیۆنێ ل سالا 1930 کێمبوو و ئەڤرۆ بوونە 15 000 باڵندە. چ پێدایێن زێدە پێدڤینە دا بڕیارێ بدەی کو ئەڤ کێمبوونە یا توانییە.

18 **ژینگەھ** ڤەکۆلینەکێ دیار کر کو تێکرایێ مانا جۆرەکێ چێلان ل ژیانێ، د دەڤەرەکا سەرمایێدا، یا گرێدایە ل گەل ستووراتییا بەفرێ ل وەرزێ بوھارێ. ھەکەر ستوراتییا بەفرێ 5000 mm بیت، تیکرا دێ بیتە نێزیکی 0.9% . و ھەکەر ستووراتی 6700 mm بیت تێکرا دێ بیتە نێزیکی 0.3% ، لێ تێکرا دبیتە 0.17% دەمێ ستووراتی دبیتە 8250 mm ، نەخشەیەکا توانی بینەدەر بۆ نواندنا ڤان پێداییان. نموونەیێ بکاربینە بۆ خەملاندنا تێکرایێ مانا جۆرەکێ چێلان ل ژیانێ، ھەکەر ستووراتیا بەفرێ 4000 mm بیت.

19 **تەکنەلۆژیا** خشتەیێ بەرامبەر، زێدەبوونا فرۆتنا ئامیرێن گوھلێبوونا مۆزیکێ دیار دکەت، ل بێھنڤەدانا ھاڤینێ. وەسا دانە کو فرۆتنا ڤان ئامیران ب ھەمان شێوە زێدە دبیت. نەخشەیەکا توانی بنڤیسە بۆ نواندنا پێداییێن خشتەی. نموونەێ بکاربینە بۆ خەملاندنا فرۆتنان ل ھەرسێ سالێن بھێن.



20 **دەستەواژەیەکێ بنڤیسە** خشتەیەکی بھایان بۆ نەخشەیەکا توانی پێکبینە، بھایێن 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8 بۆ گۆراوێ ئازاد x بکاربینە. وداھیێن ئێکێ و دووێ و سیێ بینەدەر. دەستەواژەیەکێ بنڤیسە ل دۆر جوداھیێن ژ پلەیا n ڕادەیان ، و وەسا دانە کو بوارێ نەخشەی دبیتە کۆمەڵەیا ژمارەیێن سرۆشتی.

21 **بنڤیسە** چەوا دێ زانی کو کۆمەلەیەکا پێداییان، تواییە و نە ھێلییە یان دوجاییە یان سێجاییە؟

22 پێداییێن خشتەیێ ل خوارێ بکاربینە.

x	0	2	3	4	5	6
y	18	32	43	57	76	101

أ کیژ وان پێداییێن خشتەی باشتر دنوێنیت نموونەیەکا توانی یان نموونەیەکا لۆگاریتمی؟ ڕۆنبکە.

ب ھەکەر ڕێزا دووێ ل خشتەیێ پێشتر $\log y$ بخوڤە بگریت ل شوونا y ، کیژ نموونە دێ پێداییێن خشتەیی نوو باشتر نوێنیت.

ئامادەکرن بۆ ئەزموونێ

23 کیژ ڤان حالەتێن ل خوارێ ئەم دشێین ب نەخشەیەکا توانی بنوێنین؟

أ لێچوویا بھایێ وێ 100 000 دینار ھەیڤانە زێدە دبیت.

ب ڕووبەرێ چارگۆشەیەکا درێژیا لایێ وێ دەھ زێدە دبیت.

ج نیڤتیرێ بورغییەکا پانییا وێ ب ڕێژەیا 10% زێدەبیت پشتی ھەر خولەکێ.

د ژمارەیا ئاکنجییان چەند جاران دبن ب چەند جاریبوونا دەمی.

24 کیژ کۆمەڵەیێن ژمارەیێن ل خوارێ توانییە؟

أ $(0,0.1),(1,0.5),(2,2.5),(3,12.5)$

ب $(0,-1),(1,0),(2,7),(3,20)$

ج $(0,-1),(1,0.5),(2,2),(3,3.5)$

د $(0,-1),(1,2),(2,11),(3,26)$

25 **بەرسڤەکا کورت** ژمارەیا نەدیار د خشتەیدا بینەدەر، بۆ زانین پێدایێن وی توانییە.

x	0	1	2	3
y	2	3.5	■	10.71875

بەرهنگاری و بەرفرەهکرن

26 نەخشەیەکا توانی بینەدەر کو هێلکاریێ وێ د هەردوو خالێن : (2,48) و (4,300) ڕا ببۆرت. پێنگاڤێن خو ڕۆنبکە.

27 **ژینگەھ** سەناریا ل تاقیگەهەکا کیمیایێ کار دکەت. هەلمەکا ژەهراوی هەلکێشا ژ ئەنجامێ شکەستنا ئامیرەکی شیکرنا خوینا وێ، پشتی 4 دەمژمێران ژ ڕووداندێ دیاربوو، هەبوونا کەرەستەیێ توکسین Toxine یێ ژەهراوی ب تێکڕایێ $0.01006mg/cm^3$ د خوینا وێ دایە، وشیکرنەکا دی پشتی 2دەمژمێران ژ یا ئێکێ دیار کر، کو ڕێژەیا توکسینێ بوو $0.00881mg/cm^3$. وەسا دانە کو ڕێژەیا توکسینێ دهێتە گوهۆڕین ب شێوەیەکێ توانی پێ دەمی.

أ نەخشەیەکا توانی بینەدەر کو پێداییان بنوێنیت.

ب تۆکسین دبیتە مەترسی ل سەر ژیانا مرۆڤی هەکەر تێکرایێ وێ ژ $0.015mg/cm^3$ بۆری. ئەرێ چەندیا توکسینێ سەنارییێ هەلکێشایی، دبیتە مەترسی ل سەر ژیانا وێ؟

ج سەناریا دشێت بچیتە سەر کارێ خو دەمێ ڕێژەیا توکسینێ د خوینا وێدا کێمتر بیت ژ $0.00010mg/cm^3$. ژمارەیا دەمژمێرێن پێدڤی بهەژمێرە کو سەناریا بشێت بزڤریتە سەر کارێ خو و بۆ نێزیکترین دەمژمێر نێزیکبکە.

پێداچوونا لوولپێچی

شیکاربکە *(وانەیێن پێشتر)*

28 $|-5x| = 45$ **29** $|x+4| = 0$ **30** $|2x-4| = 3$ **31** $2|2x|+1 = 10$

سفرێن هەر نەخشەیەکێ بکارئینانا شیتەلکرنێ بینەدەر. *(وانەیێن پێشتر)*

32 $f(x) = x^2 + 2x - 3$ **33** $f(x) = 3x^2 + 24x$

34 $f(x) = 2x^2 + 10x + 12$ **35** $f(x) = x^2 + 9x - 36$

شیکار بکە و ساخبکە *(وانەیا 4-6)*

36 $\frac{1}{64} = 4^{x+5}$ **37** $81^x = 3^{x+4}$ **38** $8^{\frac{x}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$ **39** $216^x = 6^{2x}$

بەشی 4

ڕێبەرێ خواندنێ: پێداچوون

1 بڕێ جۆرەکێ ڤیتامیناتان د خوینێدا کێم دبیت ب ڕێژا 15% د دەمژمێرەکێدا.

أ ئەرێ نەخشەیا ڤی حالەتی دنوێنیت، نەخشەیا بەرەڤ زێدەبوونەیان نەخشەیا بەرەڤ کێمبوونە؟

ب بڕێ ڤێ جۆرێ ڤیتامیناتان 400 mg بوو. نەخشەیەکێ بنڤیسە کو بڕێ مایی پشتی T دەمژمێران بنوێنیت.

ج هێلکارێ ڤێ نەخشەیێ وێنە بکە و بکاربینە بۆ خەملاندنا بڕێ مایی ژ ڤێ ڤیتامینێ پشتی 7 دەمژمێران.

بێژە هەر نەخشەیەك نەخشەیا گەشەبوونە یان نزمبوونە.

2 $f(x) = 0.5(1.25)^x$

3 $f(x) = 0.5\left(\frac{3}{2}\right)^x$

4 $f(x) = 2.5(0.25)^x$

5 $f(x) = 2(1+0.25)^x$

پێدایێن ل خوارێ بۆ شیکارکرنا راهێنانان ژ 6 هەتا 9 بکاربینە.

ژمارەیا قوتابیان ل قوتابخانەیەکێ، د هەر پێنج ساڵێن دوماهیێدا، سالانە ب ڕێژەیا2% زێدەبوون. ژمارەیا قوتابیان ئەڤ ساڵە گەهشتە 765 قوتابیان.

6 ئەرێ نەخشەیا ڤی حالەتی دنوێنیت، نەخشەیا گەشەبوونە یان نزمبوونە؟

7 هێلکارێ ڤێ نەخشەی وێنە بکە.

8 هێلکارێ نەخشێ بکاربینە دا ژمارەیا قوتابیان پشتی 5 ساڵان بخەملینی.

9 کەنگی ژمارەیا قوتابیان دێ 1000 قوتابیان بۆرت.

10 هێلکارێ نەخشەیا $f(x) = \frac{4}{5} - 3x$ وێنە بکە. نەخشەیا بەرۆڤاژی و هێلکارێ وێ وێنە بکە.

11 نەخشەیا ب خشتەیێ نواندی، ب وێنەیێ ڕۆنکرنێ بنوێنە. پاشی نەخشەیا بەرۆڤاژی ب وێنەیێ ڕۆنکرنێ بنوێنە، و خشتەیێ وێ دنوێنیت بنڤیسە.

x	−1	0	1	2	3
y	1	0.2	0.04	0.008	0.001

پێدایێن ل خوارێ بۆ شیکارکرنا هەردوو ڕاهێنانێن 12 و 13 بکاربینە:

ژمارەیا ئاکنجیێن باژێرەکی 3% ژ ژمارەیا وان ل سالاّ بۆری کێم دبن.

12 بڕەکی بنڤیسە ژمارەیا ئاکنجیان ئەڤ ساڵە P_T دیار بکەت پێ ژمارەیا وان ل سالاّ بۆری P_L .

13 بڕەکی بنڤیسە ژمارەیا ئاکنجیان ل سالاّ بۆری P_L دیار بکەت پێ ژمارەیا وان ل ئەڤ ساڵە P_T .

14 نەخشەیا $M = \frac{5}{8}K$ ڕێ ددەت بۆ گوهۆڕینا دووراتیان ژ کیلۆمەترێ بۆ میلی ب شێوەیەکێ نێزیککری. نەخشەیا بەرۆڤاژی بنڤیسە و بکاربینە بۆ گوهۆڕینا 25 میلان بۆ کیلۆمەتران.

15 یەکسانبوونا $19^{1.5} = 27$ ل سەر شێوەیێ لۆگاریتمی بنڤیسە.

16 بهایێ بڕی چەندە: $\log_4 64$ ؟

17 هێلکارێ نەخشەیا $f(x) = 0.6^x$ و هێلکارێ نەخشەیا بەرۆڤاژی وێنەبکە. بوار و مەودایێ نەخشەیا بەرۆڤاژی دیار بکە.

ژ شێوەیێ توانی بگوهۆڕە بۆ شێوەیێ لۆگاریتمی.

18 $3^5 = 243$ **19** $1 = 9^0$ **20** $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$

ژ شێوەیێ لۆگاریتمی بگوهۆڕە بۆ شێوەیێ توانی.

21 $\log_2 16 = 4$ **22** $\log 10 = 1$

23 $2 = \log_{0.6} 0.36$

بهایێ بڕی ب هزری هەژمار بکە.

24 $\log_7 49$ **25** $\log_{0.5} 0.25$

26 $\log_{12}\left(\frac{1}{12}\right)$ **27** $\log 0.01$ **28** $\log_2 1$

29 خشتەیەکی بۆ بهایێن نەخشەیا $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ پێکبینە. هێلکارێ نەخشەیێ و نەخشەیا بەرۆڤاژی وێنە بکە بکارئینانا خشتەیێ بهایان. بوار و مەودایێ نەخشەیا بەرۆڤاژێ دیار بکە.

بڕێ لۆگاریتمی ب سادەترین شێوە بنڤیسە.

30 $\log 25 + \log 40$

31 $\log_5 25 - \log_5 25$

32 $\log_2 8 + \log_2 16$

33 $\log 100 + \log 1000$

34 $\log_2 128 - \log_2 2$

35 $\log 10 - \log 0.1$

36 $\log 10^5 + \log 10^4$

بهایێ هەربڕەکێ بینەدەر.

37 $\log_3 8^2$

38 $\log_5 25^2$

39 $\log_5 16$

40 ئەڤرۆ ئاستێ توندیا دەنگێ مۆزیکێ ل یانەیا لاوان ب 10 دیسیبل Decibel بلندتر بوو ژ دوهی. ئاستێ توندیا دەنگێ مۆزیکێ L کو $L = 10\log\frac{I}{I_0}$ هێمایێ توندیا دەنگییە پێڤایی I W/m^2 و I_0 هێمایێ توندیا گوهلێبوونێیە. توندیا دەنگێ مۆزیکێ ئەڤرۆ، چەندجارانی توندیا دوهی بوو؟

هاوکێشەیێ شیکار بکە.

41 $5^x = 50$

42 $\log_9 x^2 = 5$

43 $3^{x-1} = \frac{1}{9}$

هەر لاسەنگەیەکێ شیکار بکە.

44 $\left(\frac{1}{2}\right)^x \le 64$

45 $\log x^{\frac{5}{2}} > 2.5$

46 پەیوەندیا $A = P(1+r)^n$ دهێتە بکارئینانا بۆ دیارکرنا بهایێ حسابەکا بانکی کو کوژمەکێ بنەڕەت P تێدا دانایە ب قارانجەکی سالانە تێکڕایێ وی r پشتی n سالان ژ دانانا کوژمێ پارەی. هەکاری 250 000 دینار دانان. کەنگێ دێ بهایێ حسابێ بیتە 500 000 دینار، بۆ زانین تێکڕایێ قازانجی سالانە دبیتە 4% ؟

47 بڕێ: $e^{\ln(2x+1)}$ ب سادەترین شێوە بنڤیسە.

48 سەیرانێ 5 مەلیۆن دینار دانانە د حسابەکێدا، تێکڕایێ قازانجێ وێ یا سالانە 6% بوو، و دڤێت ئەڤ حسابە ب بەردەوامی بهێتە زێدەکرن. بهایێ حسابێ دێ بیتە چەند پشتی 5 سالان؟

49 ژمارەیا جۆرەکێ بالندەیان ل سالا 1940 ببوو 22 بالندە . و ب زێدەبوونەکا توانی گەهشتە 194 بالندەیان ل سالا 2003.

أ نەخشەیا گەشەبوونا توانی $P(t) = P_0 e^{kt}$ کو P_0 ژمارەیا بنەڕەتییە و $P(t)$ ژمارەیا وانە ل دەمێ t، بکاربینە دا تێکرایێ زێدەبوونێ k دیار بکەی.

ب ژمارەیا بالندان ل سالا 2020 ب چەندێ دێ خەملینی، هەکەر زێدەبوون ب هەمان شێوەیی بەردەوام بوو؟

50 خشتەیێ ل خوارێ، زێدەبوونا جۆرەکێ داران ل زەڤییەکانموونەیی دیار دکەت، ل ماوەیێ 6 سالان. بژمێرا رۆنکرنێ بکاربینە بۆ دەرئینانا نموونەیەکا لۆگاریتمی کو پێدایێن خشتەیی بنوێنیت؛ ئەوێ سالێ بخەملینە ئەوا ژمارەیا داران تێدا دگەهیتە 70 داران.

سال	1	2	3	4	5	6
ژمارە	14	30	40	46	53	55

خشتەیێ ل خوارێ، زێدەبوونا ژمارەیا بالندان د ڕەفەکا ژ جۆرێ دەگمەند ل وارەکێ دەستنیشانکری دیار دکەت ل 55 سالێن دوماهیێ.

ژمارا سالان دەستپێکرن ب تۆمارکرنا ژماران	ژمارەیا بالندان
5	18
22	22
40	85
57	185

51 **ExpReg** بکاربینە د بژمێرا ڕۆنکرنێدا، بۆ دەرئینانا نموونەیەکا توانی بۆ پێدایێن خشتەیی.

52 **LnReg** بکاربینە د بژمێرا ڕۆنکرنێدا، بۆ دەرئینانا نموونەیەکا لۆگاریتمی بۆ پێدایێن خشتەیی.

53 هەردوو بهایێن r^2 یێن هەردوو نموونەیان بەراورد بکە، و دەرئەنجام بکە کا کیژ هەردوو نموونەیان هوورتر پێدایێن خشتەی دنوێنیت.

بەشی 4

ئەزموونا بەشی

دیار بکە ئەرێ نەخشە نەخشەیەکا گەشەبوونا توانییە یان نزمبوونا توانییە پاشی هێلکاریّ وێ وێنە بکە.

1 $f(x) = 0.4^x$

2 $f(x) = 1.3\left(\frac{2}{5}\right)^x$

3 $f(x) = \frac{7}{8}(1.1)^x$

4 $f(x) = 50(1 + 0.04)^x$

5 تارایی ترومبێلەك ب 13 500 000 دیناران کڕی. نرخێ وێ سالآنە دهێتە خواری ب ڕێژەیا 15%. نەخشەیەکا توانی بنڤیسە کو نموونەیەکێ پێکبینیت بۆ دیارکرنا بهایێ ترومبێلێ پێ دەمی (ب سالآن). هێلکاریّ ڤێ نەخشەی وێنە بکە. کەنگی بهایێ ترومبێلێ دێ کێمتر بیت ژ 3 000 000 دیناران؟

هێلکاریّ نەخشەیێ وێنە بکە، پاشی نەخشەیا بەرۆڤاژی بنڤیسە، و هێلکاریّ وی وێنە بکە.

6 $f(x) = x - 1.06$

7 $f(x) = \frac{5}{6}x - 1.06$

8 $f(x) = 1.06 - \frac{5}{6}x$

9 $f(x) = \frac{1}{4}\left(1.06 + \frac{5}{6}x\right)$

ل سەر شێوەیێ دی بنڤیسە (توانی یان لۆگاریتمی)

10 $16^{\frac{1}{4}} = 2$

11 $16^{-0.5} = \frac{1}{4}$

12 $\log_{\frac{1}{4}} 64 = -3$

13 $\log_{81} \frac{1}{3} = -\frac{1}{4}$

بهایێ پێدایێ x بکاربینە بۆ وێنەکرنا هێلکاریّ نەخشەیێ، پاشی هێلکاریّ نەخشەیا بەرۆڤاژی بنڤیسە و هێلکاریّ وێ وێنە بکە. بوار و مەودایێ نەخشەیا بەرۆڤاژێ دیار بکە.

14 $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x ; x = -1,0,2,4$

15 $f(x) = 2.5^x ; x = -1,0,1,2,3$

16 $f(x) = 5^{-x} ; x = -1,0,1,2,3$

ب سادەترین شێوە بنڤیسە.

17 $\log_4 128 - \log_4 8$

18 $\log_2 12.8 + \log_2 5$

19 $\log_3 243^2$

20 $5^{\log_5 x}$

شیکار بکە

21 $3^{x-1} = 729^{\frac{x}{2}}$

22 $5^{1.5-x} \le 25$

23 $\log_4 (x + 48) = 3$

24 $\log(6x^2) - \log 2x = 1$

25 ئەم دشێین نەخشەیا $y = D(0.95)^x$ بکاربینین وەك نموونە بۆ هەژمارتنا بڕێ دمینیت د لەشێ مرۆڤەکێ ئاساییدا، پشتی ڤەخوارنا ڤیتامینەکا ڕۆهن. D دبیتە هێمایێ بڕێ ڤیتامینا هاتیە ڤەخوارن ب ملیلیتری، و y هێمایێ بڕێ ڤیتامینا مایی پشتی x خولەکان. کەسەکی 5ml ژ ڤیتامینا ڕۆهن ڤەخوارن. چەند دەم دێ بۆریت هەتا بڕێ ڤیتامینا د لەشێ ویدا کێمتر بیت ژ 5ml.

26 ژیێ نیڤێ یێ بلۆتۆنیۆم 239 دبیتە 24 000 سالّ پەیوەندیا $e^{-kt} = \frac{1}{2}$ ، ژیێ نیڤێ t یێ ڤی کەرەستەی ل گەل نەگۆڕێ ڤەگەڕانێ k گرێددەت. چەند ژ 100g ژ ڤی کەرەستەی دێ مینیت پشتی 5 سالآن ؟

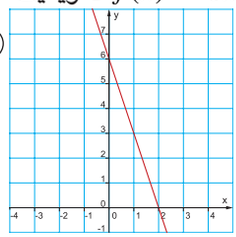
27 لێژبوونا لۆگاریتمی بکاربینە بۆ دەرئینانا نموونەیەکێ بۆ خواندنا ژمارەیا تیمساحان د کۆمەلّەکێدا، پێ پێدایێن خشتەیێ ل خوارێ، کو y هێمایێ ژمارەیا تیمساحان و هێمایێ x بۆ دەمی ب سالآنە.

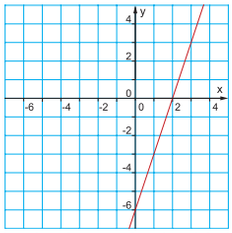
ژمارە	50	62	78
سالّ	1	2	3

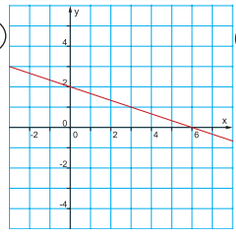
بەشی 4

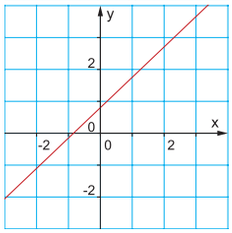
ئەزموونا کەلۆکی

1 کیژ هێلکار نەخشەیا بەرۆڤاژی بۆ نەخشەیا : $f(x) = -3x + 6$ دنوێنیت؟

أ) 

ب) 

ج) 

د) 

2 سادەترین شێوە بۆ بڕێ $\log_5 4 - \log_5 12$ چییە؟

أ) $\log_5 48$ ب) $\log_5 8$ ج) $\log_5 16$ د) $\log_5 3$

3 بهایێ x د هاوکێشەیا $\log_4 (x-1)^3 = 9$ چەندە؟

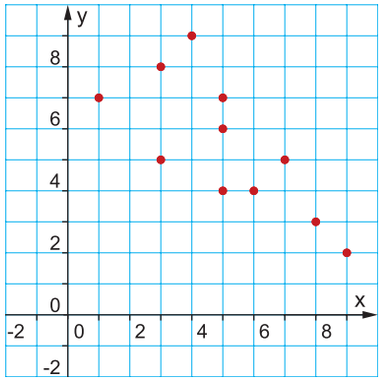
أ) 27 ب) 64 ج) 65 د) 81

4 نەخشەیا دیار دبیت ژ ئەنجامێ رواکێشانا نەخشەیا $f(x) = \ln x$ ، 2 یەکان بۆ ڕاستێ 7 یەکان بۆ چەپێ پاشی فرەهکرنەکا ئاسۆیی هاوکۆلکێ وێ 6 یەکە چییە؟

أ) $g(x) = 6\ln x$ ج) $g(x) = 6\ln(x+2) + 7$

ب) $g(x) = \ln\left(\frac{x}{6} - 2\right) - 7$ د) $g(x) = 6\ln\left(\frac{x}{6} + 2\right) + 7$

5 کیژ ژ ئەڤێن ل خوارێ دبیتە هاوکێشا راستەهێلێ باشترین نواندن بۆ وان خالان.



أ) $y = -\frac{10}{11}x + 10$ ج) $y = -\frac{11}{10}x + 1$

ب) $y = \frac{10}{11}x + 10$ د) $y = \frac{11}{10}x + 1$

6 کیژ ئەڤێن ل خوارێ دبیتە هاوکۆلکە بۆ: $P(x) = 8x^3 + 16x^2 + x + 2$؟

أ) $4x - 1$ ب) $2x + 3$ ج) $x + 2$ د) $3x - 3$

7 کیژ نەخشە ژ ئەڤێن ل خوارێ، هەردوو سفرێن وێ دبنە 1- و 0؟

أ) $f(x) = x^2 + x - 1$ ج) $f(x) = x^2 + x$

ب) $f(x) = x^2 - x$ د) $f(x) = -x^2 + x$

8 هاوکۆلکێ پێکڤەگرێدانێ بۆ دوو کۆمەلّەیێن پێداییان دبیتە -0.24 ، لێ ڕاستەهێلێ باشترین نواندن تەوەرێ دووێ ل $y = 10$ خالاّ دبڕیت. کیژ ژ ئەڤێن ل خوارێ مەرج نینە یا دروست بیت؟

أ) هەرگاڤا بهایێن کۆمەلەیەکێ زێدەببن، بهایێ کۆمەلّەیا دی کێم بن.

ب) د هاوکێشەیا راستەهێلێ باشترین نواندن دا، بهایێن y ئەوێن بەرامبەر بهایێن x یێن موجەب، ژ 10ێ کێمترن.

ج) ڕاستەهێلێ باشترین نواندن، دبیتە نموونەیەکا باش بۆ پێداییان.

د) لارێ ڕاستەهێلێ باشترین نواندن یێ سالبە.

9 کیژ ئەڤان برگەیێن هاوتا، سەرێ وی $(-3, -2)$ یە؟

أ) $y = x^2 + 4x + 1$ ج) $y = x^2 - 4x + 1$

ب) $y = x^2 + 4x - 1$ د) $y = x^2 - 4x - 1$

10 کیژ ئەڤێن ل خوارێ یەکسانە: $3(x+y)^4$

أ) $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

ب) $3x^4 + 12x^3y + 18x^2y^2 + 12xy^3 + 3y^4$

ج) $81x^4 + y^4$

د) $3x^4 + 3y^4$

11 لارێ ڕاستەهێلێ $y = mx + b$ موجەبە و ئێکودووبڕینا وی یا ستوونی دبیتە 5 . لارێ راستەهێلی دەست ب کێمبوونێ کر. کیژ ڤان نەیا دروستە.

أ) ئێکودووبڕینا ئاسۆیی یا ڕاستەهێلێ نوو کێمترە ژ ئێکدووبڕینا ئاسۆیی یا ڕاستەهێلێ بنەڕەتی.

ب) ڕاستەهێلێ نوو دێ ڕاستەهێلێ بنەڕەتی ل خالا $(0, 5)$ ب تنێ بڕیت.

ج) لارێ ڕاستەهێلێ نوو مەزنترە ژ 0 ێ.

د) ڕاستەهێلێ نوو تەریبە بۆ ڕاستەهێلێ بنەڕەتی.

ڕێزکرێ $N=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 4 & -3\end{bmatrix}$ بکاربینە بۆ شیکارکرنا هەردوو ڕاهێنانێن 12 ، 13 .

12 دانەیێ n_{21} چەندە؟

أ) 2 ب) −3 ج) 4 د) −6

13 کێژ ئەڤێن ل خوارێ دبیتە هەلگەراوێ ڕێزکرێ N ؟

أ) $\begin{bmatrix}2 & -1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix}2 & -1\\ \frac{3}{2} & -2\end{bmatrix}$

بەرسڤەکا کورت

14 دانەیێ نەدیار کێژ وانە؟

$$\begin{pmatrix}5 & 8\\ 4 & 3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\square & 2\\ -6 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-28 & 10\\ -2 & 8\end{pmatrix}$$

15 بهایێ $\log_{6.25} 2.5$ چەندە؟

16 یاسایا هاوکێشا دوجایی بکاربینە دا رەگێ مووجەب یێ نەخشەیا: $f(x)=x^2+2.6x-7.31$ بینیەدەر.

17 دوبارەبوونا ڕەگێ 2 د هاوکێشەیا: $x^3-8x^2+20x-16=0$ چەندە؟

18 نەخشەیا $f(x)=x^2$ هاتیە گوهۆڕین بۆ نەخشەیا $g(x)=\frac{1}{2}(5x)^2-4$ هاوکۆلکێ (تێکچوونێ) بۆ وێ چەندی بوو؟

19 کێژ هێز ژ هێژێن ژمارە 2 یەکسانە 268435456 ؟

بەرسڤەکا کورت

20 قوتابخانەیەك هندەك کۆمپیوتەر و ئامیرێن کەڤن یێن چاپکرنێ دانانە بەر فرۆتنێ ب کوژمەکێ نە کێمتر ژ 5 200 000 دیناران. قوتابخانێ نرخێ بژمێری ب 500 000 دیناران دانا و بهایێ ئامیرێ چاپکرنێ 00 500 دینار. قوتابخانە ب هیڤیە ب کێماسی 5 کۆمپیوتەران بفرۆشت بۆ هەردوو ئامیرێن چاپکرنێ.

أ) سیستەمەکێ لاسەنگیێن هێلی بنڤیسە پرسیارێ بنوێنیت کو x ژمارەیا کۆمپیوتەران بیت و y ژمارەیا ئامیرێن چاپکرنێ بیت.

ب) سیستەمێ لاسەنگیێن تە نڤیسین ب وێنەیێ ڕۆنکرنێ بنوێنە.

21 ڕادیۆم - 226 (Radium - 226)، د چارەسەرکرنێن نۆژداریدا دهێتە بکارئینان ژییێ نیڤێ یێ قی کەرەستەی دبیتە 1620 ساڵ.

أ) بهایێ k یێ رادیۆم 226 − بهەژمێرە.

ب) چەند ژ 100 g ل ڕادیۆم 226 − دێ مینیت پشتی 3240 ساڵان؟ بەرسڤێ بۆ نێزیکترین گرام نێزیکبکە.

22 زریانی 26 شتلێن کاژێ هەنە، دڤێت بچینیت ب دوورییێن یەکسان، ل دۆر باغچەیەکێ چارگۆشەیی، درێژیا لایەکێ وی 21 مێترە. ل هەر کوژیەکی دێ شتلەکێ چینیت.

أ) مەزنترین ژمارەیا شتلێن بشێت بچینیت چەندە؟

ب) دووراتیێ ل ناڤبەرا هەردوو شتلێن نێزیکی ئێك دێ چەند بیت؟

23 ئەنجامێ دابەشکرنێ بینەدەر:
$2x^5+6x^4-10x^3-2x^2+54x+14$ ب سەر $x-4$ ؟

بەرسڤەکا کورت

24 خشتەیێ ل خوارێ، دەمژمێرێن قوتابی ب شیکارکرنا ئەرکێ مالێڤە دبۆرینیت، ل هەر ئێقارەکێ، ل ژمارەیەکا پۆلان دیار دکەت.

پۆل (x)	4	6	8	10	12
ژمارەیا دەمژمێران (y)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3

أ) دیار بکە ئەرێ ئەڤ پێدایییە توانییە یان لۆگاریتمییە.

ب) پێدایێن خشتەیی ب وێنەیێ ڕۆنکرنێ بنوێنە.

ج) ساخبکە کو ئەڤ نەخشەیە $f(x)=\frac{1}{16}(\sqrt{2})^x$ پێدایێن خەشتەیی دنوێنیت.

د) قوتابیێ پۆلا سێیێ چەند دەمی ب خواندنێڤە دبۆرینیت هەر ئیڤارەکێ؟

بەشێ

5

سیفەتێن نەخشەیان

Properties of Functions

بەشێ پێنجێ

وانە

5–1 نەخشەیا ڕێسا پلەدار

لاپەڕێ تەکنۆلۆژیا

5–2 جهگوهۆڕکێن نەخشەیێ

ئەزموونا نیڤا بەشی

5–3 کردار لسەر نەخشەیان

5–4 نموونەیێن (سامپلێن) بیرکاری

بەرماێێن بۆشایی

گەشتێن بۆشاییا ئاسمانی زێدەتر ژ 28 000 پارچەیێن بەرماییان پشت خۆڤە هێلان و ئەو دبۆشاییدا مەلەڤانیان دکەن. تو دشێی ئەوی ئاراستەیێ بەرەڤ زێدەبوونا ژمارا وان پارچەیان بخۆڤە دگریت شلۆڤە بکەی بکارئینانا نەخشەیان و وێنەیێن ڕوونکرنا وان.

ئەرێ تو یێ ئامادەی؟

زاراف

هەر زاراڤەکێ دگەل پێناسا وێ ل ڕەخێ چەپێ هاتی گرێدە.

1. ڕاکێشان
2. لاری
3. لێژبوون
4. (پێگڤە گرێدان))ن

أ لێکۆلینەیەکا ئاماژەییە لسەر پەیوەندیا ل ناڤبەرا دوو گۆڕاوان.

ب تێکڕایێ نەگۆڕە بۆ گوهۆڕینا نەخشەیا هێلی.

ج ڕێژەیا ل ناڤبەرا دوو کۆمەلّێن پێڤانان.

د جهگوهۆڕکەکا ئەندازەییە، هەر خالەك ژ خالێن شێوەیێن ئەندازەی بۆ وێنەیێ ڕوونکرنا وی ب هەمان دووراتیێ و ئاراستەی ڤەدگوهێزیت.

هـ پێڤانا هێزا پەیوەندییا هێلییە ل ناڤبەرا دوو گۆڕاوان و ئاراستەیێ وان.

گرێدان دناڤبەرا دەق و جەبریدا

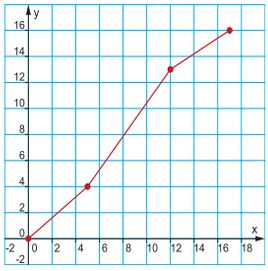
هاوکێشەیەکێ بنڤیسە کو هەر بارەکێ ل خوارێ بنوێنیت.

5. لێچو بۆ کرێکرنا ستودیویا تۆمارکرنێ 30 000 دینارە بۆ دەمژمێرا ئێکێ و 20 000 دینارە بۆ هەر دەمژمێرەکا سەربار.
6. تانکەکی 30 گالۆنێن ئاڤێ تێدا هەنە، ترومبێلەك 8 گالۆنێن ئاڤێ لسەر زێدە دکەت بۆ هەر خولەکەکێ.

هێلێن (وێنەیێن) ڕوونکرنێ

وێنەیێ ڕوونکرنا بەرامبەر بکاربینە بۆ دیارکرنا بهایێ داخوازکری.

7. $f(6)$
8. $f(15)$
9. بهایێ x دەمێ $f(x)=2$



10. بهایێ x دەمێ $f(x)=9$
11. لارێ پارچە ڕاستەهێلێ ل ناڤبەرا $x=6$ و $x=14$
12. لارێ پارچە ڕاستەهێلێ ل ناڤبەرا $x=14$ و $x=18$

لێکدانا دوو ڕادەداران

لێکبدە، پاشی ب سادەترین شێوەی بنڤیسە:

13. $(x-6)(x+4)$
14. $(6-x)(4-x)$
15. $(5x+8)(2x-7)$
16. $(x^2-7)(4x+5)$
17. $(3x^2+8)(7x^2+8)$
18. $(x-8)(x+8)$

نڤیسینا بڕێن ڕادەداران ب سادەترین شێوە

ئەڤان ب سادەترین شێوەی بنڤیسە:

19. $8(3x^5)-(2x)^3(5x^2)$
20. $5(x+3)^2-6(x+3)$
21. $3x(4-x^3)-6x^2(x+4)$
22. $3x^3(x^2+4)^2-x(x^4-5)$

بەشێ 5

ڕێبەرێ خواندنێ: لێنێرینەك بۆ بەشی

ل دەمێ بۆری

ئەڤە خواند بوون

- نەخشێن جودا و وێنەیێن ڕوونکرنێ و هاوکێشەیێن وان.
- گەلەك جهگوهۆڕك بۆ نەخشەیان.
- بجهئینانا کرداریێن جودا جودا لسەر برێن جیاواز.
- بکارئینانا نەخشەیێن هێلی و دووجایی و توانی بۆ دروستکرنا نموونەیێن (سامپلێن) بیرکاری کو باریێن ژیانا ڕۆژانە بنوێنن.

د ئەڤی بەشیدا

دێ فێری ئەڤان بی:

- خواندنێن جیاواز بۆ نەخشەیان.
- جهگوهۆڕکا نەخشەیێن ڕێسا پلەدار.
- ئەنجامدانا کرداران لسەر نەخشەیان.
- دروستکرنا نموونەیێن بیرکاریێ بکارئینانا نەخشەیێن جیاواز.

د ئایندەیدا

تو دشێی شارەزاییێن ئەڤی بەشی بکاربینی

- د قۆناغێن داهاتی دا، کو جیاکاری و تەواوکاری و ئاماریێ دخوینن.
- بۆ خواندنا بابەتێن دی: وەکی تەندروست و فیزیا و کیمیا و ئابووریێ.
- ژ دەرڤەی قوتابخانێ: بۆ دروستکرنا سامپلێن پێداییان و بجهئینانا پێشبینیان، ل باریێن جۆراوجۆر وەکی وەرزشێ و گەشتێ و پارە هەلگرتنێ.

زاراف — Vocabulary

ئاوێتەکرنا نەخشەیان	Composition of functions
نەخشەیا ئێك بۆ ئێك	One-to-one function
نەخشەیا ڕێسا پەلدار	Piecewise function
نەخشەیا پلەدار	Step function

دەروازەیەك لسەر زاراڤان

ژ بۆ ڕاهاتنا چەند زاراڤێن هاتین د ڤی بەشیدا، ئەڤان پێنگاڤان پەیڕەو بکە:

1. ژ ڕامانێن پەیڤا **ئاوێتە** کۆمەلەکا تشتان پێکڤە دانە. چەوا پەیڤا ئاوێتە ب ئەڤێ ڕامانێ بۆ تێگەهشتنا **ئاوێتەکرنا نەخشان** د بیرکاریێدا بکاردهێت؟
2. هەکەر تو بەرێ خۆ بدەیە پایێن پایسکەکێ ژ تەنشتێ ڤە، ئەرێ ئەوا تو دبینی دبیتە ڕوونکرنا نەخشەیێ؟ هەتا چ ڕادە ل ڕوونکرنا **نەخشەیا ڕێسا پلەدار** دچیت؟
3. پێناسا نەخشەیێ ل بیرا تەبیت. تو چ دبێژی بۆ **نەخشەیا ئێك بۆ ئێك** ؟ نموونەیەکێ ژ بیرکاری ونموونەیەکێ ژ ژیانا ڕۆژانە بۆ نەخشەیا ئێك بۆ ئێك بینە. و نموونەیەکا دی بۆ نەخشەیەکا نە ئێك بۆ ئێك بیت بینە.
4. پایێن پەیسکێ نە د تەریب بن، و پێکڤە نە دگرێدایە، تو چ تێدگەهی دەربارەی نەخشەیا پلەدار.

بەشی 5

بیرکاری ب خواندن و نڤیسین

ستراتیژیا خواندنێ: پرسیاران بخوینە دا تێبگەهی

پرسیارێ چەند جاران بخوینە دا باش د چەمکێ پرسیارێ بگەهی، پاشی پرسیارێ لسەر خۆ و ب هویری بخوینە بۆ دیارکرنا داخوازیێ. ل دەمێ خواندنا، پرسیارێ پارچەراستەهێلان ل ژێر زانیارییان – کلیلان بکێشە، هەکەر دەقێ پرسیارێ پێنگاڤێن جۆرا و جۆر بن وان بکە چەند بەشەك، پاشی پلانێ بۆ شیکارکرنا وێ دابرێژە.

دیتنا بۆشایێ نەخشەیا $f(x)=\frac{7}{2}\sqrt{x}$ رێڕسایەکا بۆ خەملاندنا دوورایيا ئاسۆیی ب کیلومێتران، دەمێ چاڤێن بینەری ب بلندایا x متربیت لسەر رووێ ئەردی، تو دشێی وێنەیێ روونکرنا ئەوێ نەخشەیێ بکێشی بۆ بەرامبەرکرنێ لسەر مەڕیخێ ب راکێشانەکا ئاسۆیی هاوکۆلکەیێ وێ $\frac{9}{5}$ بیت. نەخشەیا دوورایيا ئاسۆیی لسەر مەڕیخێ بنڤیسە و بکاربینە بۆ هەژمارکرنا دوورایيا ئاسویی یا گەشتێ یا بۆ شایێ لسەر مەڕیخێ هەکەر بلندایا چاڤێ بینەری لسەر ڕووێ وێ هەسارێ 6 مەتر بیت.

پێنگاڤ	پرسیار	بەرسڤ
1	چەمکێ پرسیارێ چییە؟	جهگۆهۆرکیا نەخشەیا ڕەگێ دووجای ب گۆهۆرینا هاوکولکەیێن وێ.
2	پرسیار داخوازیا چ بەرسڤێ دکەت؟	• دووبارە نڤیسینا نەخشەیێ بۆ تێ ئێخستنا هاوکولکەیی نوی. • هەژمارکرنا بهایێ نەخشەیا نوی دەمێ x بهایەکێ دیارکری وەردگریت.
3	ئەو زانیارێ – کلیلێن پێدڤی بو شیکارکرنا پرسیارێ چنە؟	• نەخشەیا $f(x)=\frac{7}{2}\sqrt{x}$ دووراییێ لسەر ئەردی دنوێنیت. • نەخشەیا لسەر مەریخێ دبیتە ڕاکێشانا نەخشەیا لسەر ئەردی ب هاوکۆلکەیێ $\frac{9}{5}$. • گەشتیوانیا بۆشایێ لسەر رووێ مەڕیخێ، 6 میتەران چاڤێ بینەری بلندتر دبیت.
4	پلانا من چییە بۆ شیکارکرنا ئەوێ پرسیارا گەلەك پێنگاڤ؟	• نڤیسینا نەخشەیا دوورایيا ئاسۆیی لسەر مەڕیخێ. • هەژمارکرنا بهایێ وی دەمێ $x=6$.

هەوڵبدە

بۆ هەر پرسیارەکێ نەخشەیەکێ بۆ پێنگاڤێن خو دروستبکە (هەر وەکی لسەری دیارکری)

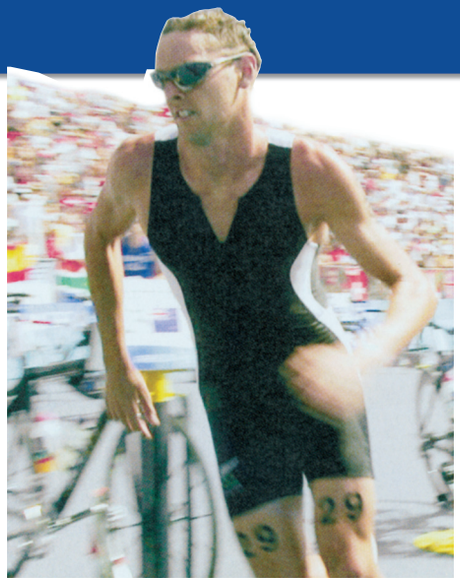
1. درێژیا لاکێشەیەکێ $x+5$ مترە، و پانیا وێ $x+4$ مترە.
نەخشەیەکا رێژەیی کۆ ببیتە رێژەیا روویەرێ لاکێشێ بو چێوەیێ وێ بنڤیسە. بوار و مەودایێ گونجای بۆ ئەڤێ نەخشەیێ دیاربکە.

2. نەخشەیا $d=\frac{\sqrt{15\,w}}{2.54\pi}$ دبیتە نموونەیەك بۆ هەژمارکرنا تیرەیێ وەریسی (ب سەنتیمەتران)، یێ پێدڤی بو بلندکرنا w تەنان. وەریسەکێ تیرەیێ وی 3.5 cm بیت بارستەیا چەند تەنێن زێدەتر دشێت بلند بکەت ژ وەریسەکی کۆ تیرەیێ وێ 5.1 cm بیت؟

1-5

نەخشەیێن ڕێسا پلەدار

Piecewise Functions



ئارمانج

- نەخشەیا ڕێسا پلەدار دنڤیسن و وێنەیی روونکرنێ بۆ وێ دکێشن.
- نەخشەیێن ڕێسا پلەدار بۆ وەسفکرنا بارێن ژیانا ڕۆژانە بکاردئینن.

بۆچی ئەم فێری ئەڤێ دبین؟

دشێن نەخشەیا ڕێسا پلەدار بکاربینن بۆ نواندنا شیانێن پێشبڕکیان ل بەریکانا سێیانی. (نموونە 4) .

زاراڤ
Vocabulary

نەخشەیا ڕێسا پلەدار
Piecewise function

نەخشەیا پلەدار
Step function

نەخشەیا ڕێسا پلەدار **Piecewise Function** نەخشەیەکە زێدەتر ژ **لقەکی** هەیە. ڕێسایا وێ نەخشەی دهێتە گۆهۆڕین ژ بەشەکی بۆ بەشەکێ دی یێ بواری وێ. بۆ نموونە، بهایێ پلێتا چوونا ژۆرێ بۆ مۆزەخانا نیشتمانی ل دووڤ جیاوازیا ژیێ مرۆڤان دهێتە گۆهۆڕین، ب جۆرەکی کو بۆ هەر چەشنەکا ژیێ بهایەك دهێتە دانان. ب ئەڤی شێوەی، بهایێ ئەڤێ نەخشەیێ بهایێ پلێتا چوونا ژۆرێ بۆ مۆزەخانێ ل دووڤ ژی دنوێنیت، و ئەوێ نەگۆڕە دبواریّ هەر چەشنەکێدا کو بواریّ وێ چەشنێ ژیێ دنوێنت. ئەو بهایە د جیاوازن ل دووڤ جیاوازیا بەشان. (بهایێن پلێتان ل دووڤ ژیێ مرۆڤان دێ دجیاوازبن).

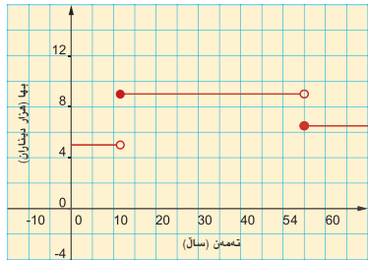
نموونـــــە 1 بجهئینان لسەر بواریّ خوّشیێ

خشتەیەکی بۆ نواندنا وێنەیێ روونکرنێ یێ بەرامبەر دروستبکە، پاشی وەسفبکە ب پەیڤان.

پێنگاڤا (1)ێ: خشتەیەکی دروستبکە.

چونکی سەرێن پارچەراست هێلین دناڤ وێنەیێ ڕوونکرنێ دا بواریّ وێ دکەنە سێ بەش، ڤێجا خالێن سەرێ وان و خالێن نێزیکی سەرێن وان بۆ دیارکرنا وان بەشان بکاربینە.

پلێتێن چوونا ژۆرێ



بهایێ پلێتا چوونا ژۆرێ	
ژی	نرخ
ژ 5 بۆ 12	5000
ژ 13 بۆ 54	9000
ژ مەزنتر ژ 54	6500

بواریّ نەخشەی دهێتە دابەشکرن بۆ سێ بەشان

ژیێن کێمتر ژ 12 سال ← $[5, 13)$

ژیێن کێمتر نەبن ژ 13 و کێمتر ژ 55 ← $[13, 55)$

ژیێن کێمتر نەبن ژ 55 ← $[55, \infty)$

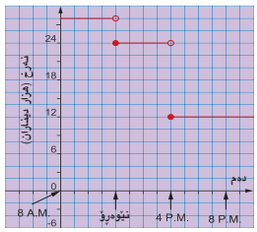
پێنگاڤا (2)ێ: بەحسێ وێ بکە ب پەیڤان.

بەشێن بواری و بهایان ل دووڤ خشتەیی بکاربینە.

ئەو زارۆکێ ژیێ وی (12) سال بیت و بەرەڤ خواریّ دێ 5000 دیناران بۆ بهایێ پلێتێ دەت. لێ ئەوێ ژیێ وی کێمتر نەبیت ژ 13 سالان و زێدەتر نەبیت ژ (54 سالان) دێ 9000 دیناران بۆ بهایێ پلێتێ دەت. ئەوێ نەکێمتر بیت ژ 55 سالان دێ 6500 دیناران بۆ بهایێ پلێتێ دەت.

خالا چاڤدێریێ **1.** خشتەیەکێ دروستبکە بۆ نواندنا وێنەیێ رووبکرنێ یێ بەرامبەر، پاشی وەسفێ وێ ب پەیڤان بنڤیسە.

بهایێ پلێتا چوونا ژۆرێ

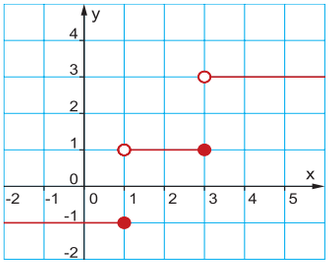


تو دشێی نەخشەیا ریّسا پلەدار ب نڤیسنا نەخشەیێ دەربڕی وەکی نەخشەیا نموونە 1، و ب ئەڤی شێوەی دهێتە نڤیسین.

$$f(x)=\begin{cases}5000 & 0<x<13\\ 9000 & 13\le x<55\\ 6500 & x\ge 55\end{cases}$$ لق

ب ئەڤێ شێوەی دهێتە خواندن، $f(x)$ یەکسانە 5000 دەمێ x مەزنتر بیت ژ 0 و بچووکتر بیت ژ 13.
و یەکسانە 9000 دەمێ x کێمتر نەبیت ژ 13 و کێمتر بیت ژ 55، و یەکسانە 6500 دەمێ x کێمتر نەبیت ژ 55.

بۆ دیارکرنا بهایێ نەخشەیەکا ریّسا پلەدار بۆ بهایەکی ددەت، لقێ وێ دیاربکە، پاشی ریّسایا نەخشەیا ئەوی بەشی بکاربینە.



جۆرەکی ژ نەخشەیێن ریّسا پلەدار سیفەتەکا گرنگی هەیە، کو هەر بەشەکی ژ بەشێن وێ بهایەکی نەگۆر هەیە.
دبێژنە ئەڤێ نەخشەیێ **نەخشەیا پلەدار Step Function** نموونە لسەر نەخشەیا پلەدار:

$$f(x)=\begin{cases}-1 & x\le 1\\ 1 & 1<x\le 3\\ 3 & x>3\end{cases}$$

بۆ تێگەهشتنا هۆکارێن ناڤکرنا ئەڤی نەخشەی ب نەخشەیا پلەدار، ب هووری بەرێ خو بدە وێنەیێ رووبکرنێ یێ نەخشەیێ.

نموونە 2 هەژمارتنا بهایێن نەخشەیا ریّسا پلەدار

بۆ هەر نەخشەیەکا ریّسا پلەدار بهایێ بەرامبەری $x=-2$ و بهایێ بەرامبەر $x=5$ بهەژمێرە.

أ
$$f(x)=\begin{cases}-5 & x\le 0\\ 4 & 0<x\le 3\\ 12 & x>3\end{cases}$$

$f(-2)=-5$ چونکی $-2<0$، ئەوی لقێ بەرامبەر $x\le 0$ بکاربینە

$f(5)=12$ چونکی $5>3$، ئەوی لقێ بەرامبەر $x>3$ بکاربینە

ب
$$f(x)=\begin{cases}3x+4 & x<5\\ x^2-3 & x\ge 5\end{cases}$$

$f(-2)=3(-2)+4=-2$ چونکی $-2<5$، ئەوی لقێ بەرامبەر $x<5$ بکاربینە

$f(5)=5^2-3=22$ چونکی $5\le 5$، ئەوی لقێ بەرامبەر $x\ge 5$ بکاربینە

خالا چاڤدێریێ **2.** **بۆ هەر نەخشەیەکا ریّسا پلەدار بهایێ بەرامبەری $x=-1$ و بهایێ بەرامبەر $x=3$ بهەژمێرە.**

أ
$$f(x)=\begin{cases}12 & x<-3\\ 15 & -3\le x<6\\ 20 & x\ge 6\end{cases}$$

ب
$$f(x)=\begin{cases}3x^2+1 & x<0\\ 5x-2 & x\ge 0\end{cases}$$

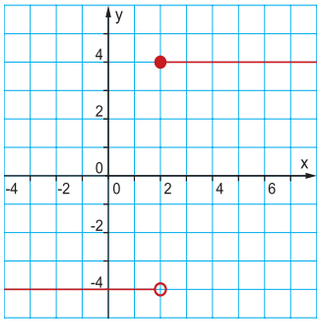
نموونـــــه 3 وێنەکرنا وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ نەخشەیا ڕێسا پلەدار

وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ هەر نەخشەیەکێ بکێشە.

أ

$$f(x)=\begin{cases}-4 & x<2\\ 4 & x\geq 2\end{cases}$$

وێنەیێ ڕوونکرنا نەخشەیێ ژ دو پارچان پێکدهێت، هەر پارچەك نیڤ ڕاستەهێلە، چونکی ڕاستەهێلێ $x=2$ بواری نەخشەیێ دکەتە دوو بەش، بهایێن نەخشەیێ د هەردوو بەشاندا بهەژمێرە بکارئینانا هەردوو لقێن ڕێسایا وێ. چونکی $f(x)=-4$ دەمێ $x<2$ ، ڤێجا خالا $(2,-4)$ وەك بازنەکا بچووکا ڤالا بکێشە، پاشی دەستپێکرن ژ ڤێ خالێ نیڤ ڕاستەهێلەکی ئاسوویی بۆ ڕەخێ چەپێ بکێشە. و چونکی $f(x)=4$ دەمێ $x\geq 2$ ، ڤێجا خالا $(2,4)$ وەك بازنەکا بچووکا تژی بکێشە، پاشی دەستپێکرن ژڤێ خالێ نیڤ ڕاستەهێلەکێ ئاسوویی بۆ ڕەخێ ڕاستێ بکێشە.



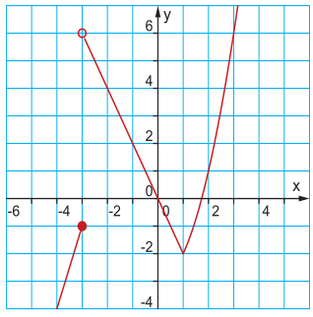
ب

$$g(x)=\begin{cases}3x+8 & x\leq -3\\ -2x & -3<x<1\\ x^2-3 & x\geq 1\end{cases}$$

x	$3x+8$	$-2x$	x^2-3
-4	-4		
-3	-1	6	
-2		4	
-1		2	
0		0	
1		-2	-2
2			1
3			6

ئەڤ نەخشەیە ژ دوو بەشان پێکدئێت، بەشەکی هێلی و بەشەکێ دووجایی. بواریّ نەخشەیێ ل $x=-3$ و $x=1$ دابەش دبیت. خشتەیێ بهاییان بۆ کێشانا وێنەیێ ڕوونکرنێ یێ هەر لقەکی بکاربینە.

بازنەکا تژی ل $(-1,-3)$ و بازنەکا ڤالا ل $(6,-3)$ دیاربکە ب شێوەیەکی کۆ بهایێ نەخشێ ل $x=-3$ ب ڕۆنێ یا دیاربیت لسەر وێنەیێ ڕوونکرنێ. دانانا بازنەکێ لسەر خالا $(-2,1)$ نەیا پێدڤییە چونکی وێنەیێن ڕوونکرنێ یێن هەردوو لقان ل ڤێ خالێ دگەهنە ئێکودوو.



خالا چاڤدێریێ

3. وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ نەخشەیێ بکێشە.

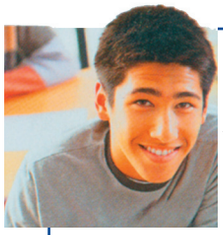
أ

$$f(x)=\begin{cases}4 & x\leq -1\\ -2 & x>-1\end{cases}$$

ب

$$f(x)=\begin{cases}-3x & x<2\\ x+3 & x\geq 2\end{cases}$$

یا دیارە کۆ نەمەرجە نەخشەیا ڕێسا پەلدار نەخشەیەکا بەردەوام بیت، ئانکو دبیت خالێن لێکبرین تێدا هەبن. ژ بۆ نڤیسینا ڕێسایا نەخشەیەکا ریسا پلەدار، جارا ئێکێ دیاربکە کۆ ل کوێدەر بواریّ نەخشەیێ دهێتە دابەشکرن، پاشی بۆ هەر بەشەکی ڕێسایەکێ بنڤیسە. پاشی ئەڤان ڕێسایان کومبکە بۆ نڤیسینا نەخشەیێ.

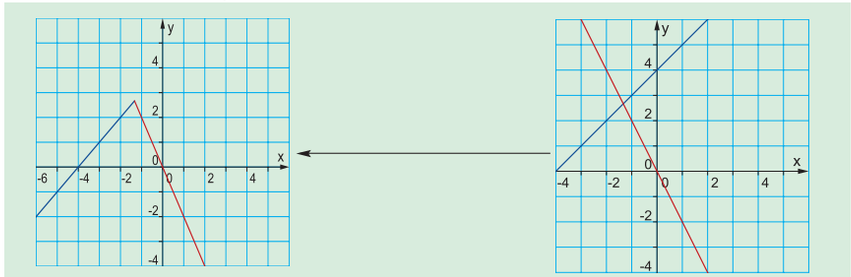


ڕ قوتابیەکی بۆ قوتابیەکی وێنەیێن ڕوونکرنێ یێن نەخشەیێن ڕێسا پلەدار.

دەمێ وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ نەخشەیەکا ڕێسا پلەدار دکێشم، وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ هەر لقەکێ دێ کێشم هەر وەکی نەخشەیەکا سەربەخۆ. پاشی ئەوی پارچەیێ وێنەیێ ڕوونکرنێ کو بهایێن x دکەڤنە ڕ دەرڤەی بەشی دێ ژێبەم.

نموونە

$$f(x)=\begin{cases} x+4 & x<-2 \\ -2x & x\geq -2 \end{cases}$$



نموونـــــە 4 بجهئینان لسەر وەرزشێ

ئالانی پشکداری دپێشبرکەیەکا سیانیدا کر بدرێژایی 153 km . د دەمژمێرەکێدا 3 km مەلەڤانی کرن و د 4 دەمژمێراندا 120 km سیارێ پایسکلێ بوو، و د 3 دەمژمێراندا 30 km غاردان کر. وێنەیەکی ڕوونکرنێ بکێشە کو دووریا ئالانی بڕی پێ دەمی دیاربکەت. پاشی نەخشەیەکا ڕێسا پەلدار بۆ ڤێ ڕوونکرنێ بنڤیسە.

پێنگاڤا (1)ێ: خشتەیەکێ دروستبکە کۆ پێدایان کورتبکەت. پەیوەندیا ل ناڤبەرا لەزێ و دەمی و دووریێ بکاربینە بۆ دیارکرنا تێکرایێ لەزا ئالانی د هەر قوناغەکێدا ژ پێشبرکیێ.

نواندنا ئالانی د پێشبرکەیا سیانی			
قۆناغ	دەم	دویری	لەزاتی
مەلەڤانی	1	3	3
سیارێ پایسکلێ	4	120	30
غاردان	3	30	10

پێنگاڤا (2)ێ: چونکی دەم گۆراوەکی ئازادە، دیاربکە ل کوێدەر بواریێ نەخشەیێ بەش دبیت بکارئینانا پێدایێن دەمی.

مەلەڤانیێ $0\leq t\leq 1$ دەمژمێرەکێ مەلەڤانی کر

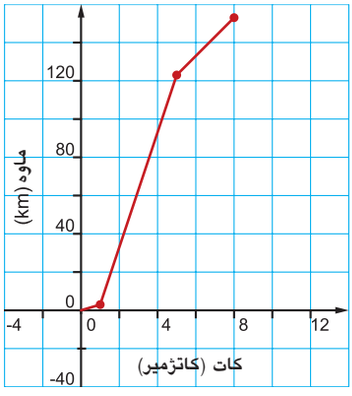
سیاریا پایسکلێ $1<t\leq 5$ 4 دەمژمێران سیارێ پایسکلێ بوو

غاردان $5<t\leq 8$ 3 دەمژمێران غاردان کر.

پێنگاڤا (3)ێ: وێنەیەکی ڕوونکرنێ دروستبکە.

پشتی دەمژمێرەکێ ئالانی $3\ km$ بڕین. هەتا دوومایا قوناغا دووێ (ئانکو 5 دەمژمێران).

ئەوی $123\ km$ بڕین، ل دوومایێکێ ئەوی $153\ km$ تەمامکرن پشتی 8 دەمژمێران.



ئاگەهداریە!

دشیاندایە پەیوەندیا $d=vt$ بنڤیسیت، بشێوەیێ $v=\frac{d}{t}$ بۆ ڤەدیتنا تیکرایێ لەزێ.

پێنگاڤا (4)یێ: نەخشەیا هێلی بۆ هەر لقەکی بنڤیسە.

شێوەیێ لاری – خالەك بکاربینە

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مەلەڤانی $d=3t$ $m=3$ و خالا $(0, 0)$ بکاربینە

ب پایسکل $d = 30t - 27$ $m=30$ و خالا $(5, 123)$ بکاربینە

غاردان $d = 10t + 73$ $m=10$ و خالا $(8, 153)$ بکاربینە

نڤیسینا نەخشەیی بۆ ئەڤێ نەخشێ دبیتە:

$$d(t) = \begin{cases} 3t & 0 \le t \le 1 \\ 30t - 27 & 1 < t \le 5 \\ 10t + 73 & 5 < t \le 8 \end{cases}$$

4. رێباز لە خوارنگەهەکا پایتەختێ کاردکەت. بۆ هەر دەمژمێرەکا کاری ئەو 8000 دیناران وەردگریت هەکەر دەمژمێرین کارێ وی زێدەتر نەبیت ژ 40 دەمژمێران د حەفتیەکێدا، و ئەو 12 000 دیناران وەردگریت. بۆ هەر دەمژمێرەکا کارێ زێدە ژ 40 دەمژمێران، وێنەیێ روونکرنێ بکێشە کو دستکەفتیێ ریباز پێ ژمارا دەمژمێرین کارکرنێ دحەفتیەکێ دا بنوێنیت، هەکەر بزانی ئەو نەشێت زێدەتر ژ (60) دەمژمێران د حەفتیەکێدا کاربکەت. نەخشەیەکا رێسا پلەدار بۆ ئەوێ روونکرنێ بنڤیسە.

هزربکە و گەنگەشێ بکە

1. ڕوونبکە هەکەر یا دشیاندا بیت نەخشەیەکا رێسا پلەدار بدەست خوبینی کو بهایێ وێ یی نەگۆڕ بیت، ل هەر لقەکی وێنەیێ روونکرنا وێ نەیی بڕیبت [بەردەوام بیت].

2. ڕێکخەربە ئەڤی خشتەیی ل خوارێ دووبارە بنڤیسە و تمامبکە، بۆ هەر چوارچووڤەیەکی وەسفێ بوار و مەودایێ نەخشەیێ بنڤیسە و نموونەیەکێ بۆ وێ بینە.

نەخشە	بوار	مەودا	نموونە
رێسا پلەدار			
پلەدار			

1-5 ڕاهێنان

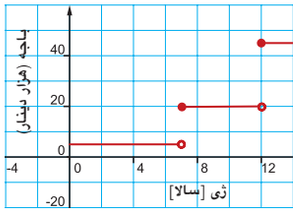
ڕاهێنانێن ئاراستەکری

1 پەیوەندییا ل ناڤبەرا نەخشەیا پلەدار و نەخشەیا ڕێسا پلەدار ڕوونبکە.

بەرێ خوێندەڤانی نمونە 1 خشتەیەکی بۆ هەر وێنەیەکی ڕوونکرنێ دروستبکە و ب پەیڤان وەسف بکە.

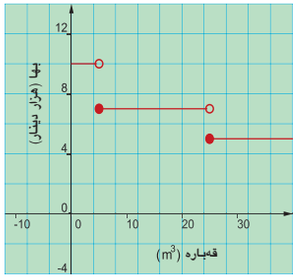
2

باجا چوونا ژووری



3

بهایێ زەڤیا کشتوکالێ



بەرێ خوێندەڤانی نمونە 2 بهایێ هەر نەخشەیەکێ هەژماربکە هەکەر $x=-6$ و $x=3$.

4

$$f(x)=\begin{cases}-8 & x\le -5\\ 0 & -5<x<6\\ 5 & x\ge 5\end{cases}$$

5

$$g(x)=\begin{cases}5x-9 & x<2\\ 4-x^2 & x\ge 2\end{cases}$$

بەرێ خوێندەڤانی نمونە 3 وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ هەر نەخشەیەکێ بکێشە.

6

$$f(x)=\begin{cases}7 & x<-2\\ -2 & x\ge -2\end{cases}$$

7

$$g(x)=\begin{cases}-2x+8 & x\le 4\\ \frac{1}{2}x & x>4\end{cases}$$

بەرێ خوێندەڤانی نمونە 4

8 لێچوویا بکرێ گرتنا گەشتییەکا بچووك 20 000 دینارن د دەمژمێرەکێ دا بۆ 4 دەمژمێرێن ئێکێ، و 3 000 دینارن بۆ هەر دەمژمێرەکا زێدە، وێنەیێ ڕوونکرنێ بکێشە بۆ نواندنا لێچوویا بکرێ گرتنا وێ گەشتێ پێ ژمارا دەمژمێران کو ژ 8 دەمژمێران زێدەتر نەبیت.

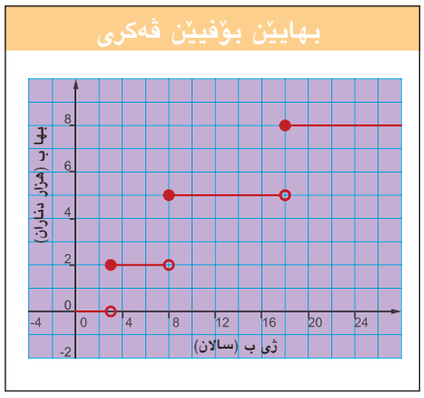
ڕاهێنان و شیکارکرنا پرسیاران

ڕاهێنانێن ئازاد

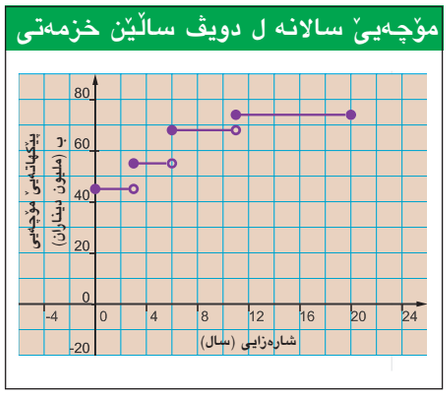
ڕاهێنانان	بۆ شیکارکرنا بەرێ خۆ بدە نموونە
10-9	1
12-11	2
14-13	3
15	4

خشتەیەکی بۆ هەر وێنەیەکی ڕوونکرنێ دروستبکە، پاشی ب پەیڤان وەسفبکە.

9



10



بهایێ هەر نەخشەیەکێ هەژماربکە هەکەر $x=-2$ و $x=2$ و $x=6$.

11

$$f(x)=\begin{cases}9x-2 & x<-3\\ x^2-3 & -3\le x<1\\ 5 & x\ge 1\end{cases}$$

12

$$f(x)=\begin{cases}12-9x & x\le 0\\ x^2+3x & 0<x<3\\ 4^x & x\ge 3\end{cases}$$

وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ هەر نەخشەیەکێ بکێشە.

13

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{4}x+1 & x<4\\ \frac{3}{4}x-2 & x\ge 4\end{cases}$$

14

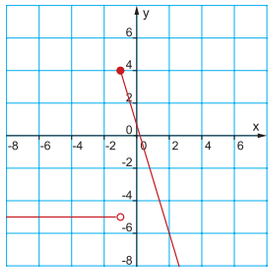
$$g(x)=\begin{cases}-2x-5 & x<-2\\ x^2-3 & x\ge -2\end{cases}$$

15 کرییا بڕینا هریا پەزی دهێتە گۆهۆڕین ل دویڤ گوهۆڕینا بارستایێ وێ. ئەڤ خشتەیێ بەرامبەر بهایێن بڕینا مەهەکێیە کو هوشیار وەردگرت، وێنەیێ ڕوونکرنێ بکێشە کو بهایێ بڕینا پەزی بنوێنت. بارستایێ وان زێدەتر نەبیت ژ 60 kg . نەخشەیەکا ڕێسا پلەدار بنقیسە بۆ نواندنا قی خشتەیی.

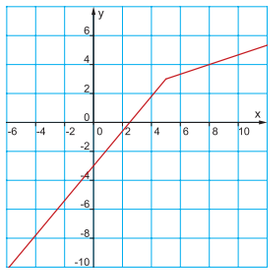
بهایێ بڕینا بەزی	
بارستە (kg)	بها (دینار)
15 یان کێمتر	30 000
ناڤبەرا 15 و 50	50 000
50 یان زێدەتر	75 000

بۆ هەر وێنەکی ڕوونکرنێ نەخشەیەکا ڕێسا پلەدار بنقیسە.

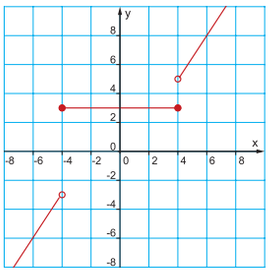
16



17



18



19 **گەراج:** گەراجێ ترومبێلان ل پایتەختی 3000 دیناران وەردگرت بۆ هەر ڕاوەستیانەکێ ل ماوێ چار دەمژمێرێن ئێکێ. و بۆ هەر دەمژمێرەکا زێدە 2000 دیناران وەردگرت. نەخشەیەکا ڕێسا پلەدار بۆ هەژمارتنا کرێیا ڕاوەستیانا ترومبێلێ پێ ژمارا دەمژمێران بنقیسە.

20 **گەشت:** هەڵو و توانا ب ترومبێلێ ژ سلێمانیێ بۆ دهۆك چۆوون. ئەف وێنەیێ بەرامبەر ناڤەندێ لەزا ترومبێلێ ل دووف قوناغێن وان دنوێنیت، ل دەمێ 30 خۆلەکان دناڤ باژێریدا ب ناڤەندێ لەزا 45 km / h بڕێڤەچوو، پاشی ل دەمێ 3 دەمژمێران لسەر ڕێیا بلەز ب ناڤەندێ لەزا 90 km / h بڕێڤەچوو، 30 خولەکان ب ناڤەندێ لەزا 60 km / h ل ناڤ چیای بڕێڤەچوو.

أ نەخشەیەکا ڕێسا پلەدار بنڤیسە کو ئەوێ دووریا ترومبێلێ بڕی پێ دەمی بنوێنیت.

ب وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ وێ نەخشەیێ بکێشە.

ج **دێ چ بیت هەکەر ...** ؟ دەمێ وێ گەشتێ دێ چەند ڤەکێشت هەکەر ناڤەندێ لەزا ترومبێلی ل قوناغا دووێ 75 km / h بیت ل جهێ 90 km / h .

نەخشەیا ڕووتی لسەر شێوەیێ نەخشەیا ڕێسا پلەدار بنڤیسە:

21 $f(x)=|x|$ **22** $g(x)=|x-4|$ **23** $h(x)=2|x|-4$

24 **خزمەت گوزاری:** دەزگەهێ هێوا بۆ گەهاندنا پۆستەیان 11 000 دیناران وەردگرت بۆ هەر پۆستەیەکێ کو گرانییا وێ 2kg ژێدەتر نەبیت، 3000 دیناران وەردگرت بۆ هەر کیلۆ گەرامەکا زێدە، وێنەیەکی ڕوونکرنێ بۆ بهایێ گەهاندنا نامەیەکێ کێشەیا وێ ژ 8 kg زێدەتر نەبیت. نەخشەیەکا ڕێسا پلەدار بۆ ئەڤێ بنڤیسە.

وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ هەر نەخشەیەکێ بکێشە.

25
$$h(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2 & x\le 0\\ 2^x-4 & 0<x\le 3\\ 2x-2 & x>3\end{cases}$$

26
$$g(x)=\begin{cases}-3 & x\le 0\\ 3^x-4 & x>0\end{cases}$$

بوار و مەودایێن هەر نەخشەیەکێ دیاربکە.

27
$$g(x)=\begin{cases}-\frac{5}{2}x-2 & x\le -2\\ -x-5 & x>-2\end{cases}$$

28
$$h(x)=\begin{cases}x^2-2x-3 & x<4\\ 3x-7 & x\ge 4\end{cases}$$

29 **هزرکرنەکا ڕەخنەگر** بۆچی نواندنا نەخشەیا ریّسا پلەدار باشترین نواندنە بۆ بلنداهیا سەر ئێخەکا کاربایێ (مصعد کهربائي) ژ ئەردی پشتی t چرکە ژ بلندبوونێ؟ ئەرێ دشیاندایە ببیتە نەخشەیەکا پلەدار؟

30 **بنڤیسە** ئەگەر چییە کۆ بکارئینانا نەخشەیێن ریّسا پەلدار ببیتە باشترین نواندن بۆ بارێن ژیانا ڕۆژانە؟ ب کێماسی دوو نموونەیان بۆ بەرسڤا خۆ بینە.

ئامادەکرن بۆ ئەزموونێ

31 ئێك ژ بریکارێن کرێکرنا ترومبێلان 15 000 دیناران روژانە وەردگریت هەکەر ژمارەیا کیلومەترێن ترومبێلێ بڕین ژ 200 km نەبۆریت، هەکەر ترومبێلێ زێدەتر ژ 200 km بڕێن دێ کرێگرتیێ ترومبێلێ 50 دیناران بۆ هەر کیلومترەکا زێدە دەت، کیژ ئاڤان نەخشەیێن ل خوارێ دبیتە لێچۆیا کرێکرنا ترومبێلێ پێ هەژمارا کیلومترێن بڕین د ڕۆژێدا؟

أ) $f(x)=\begin{cases}15\ 000 & 0\le x\le 200\\ 50x & x>200\end{cases}$

ب) $f(x)=\begin{cases}15\ 000x & 0\le x\le 200\\ 15\ 000x & x>200\end{cases}$

ج) $f(x)=\begin{cases}15\ 000 & 0\le x\le 200\\ 15\ 000+50(x-200) & x>200\end{cases}$

د) $f(x)=\begin{cases}15\ 000 & 0\le x\le 200\\ 15\ 000+50x & x>200\end{cases}$

32 کیژ ئەڤان نەخشەیێن ل خوارێ نەخشەیەکا بەردەوامە؟

أ) $f(x)=\begin{cases}3x-4 & x<0\\ -1 & x\ge 0\end{cases}$

ب) $g(x)=\begin{cases}5x-4 & x<3\\ 2x+5 & x\ge 3\end{cases}$

ج) $h(x)=\begin{cases}x^2 & x<-2\\ 2x & x\ge -2\end{cases}$

د) $(x)=\begin{cases}3x+4 & x\le -1\\ 3^x+4 & x>-1\end{cases}$

33 $f(-2)$ بهەژمێرە هەکەر $f(x)=\begin{cases}1-5x & x<-5\\ 3-x^3 & -5\le x<-2\\ 5-x^2 & x\ge -2\end{cases}$

أ) 5− ب) 1 ج) 9 د) 11

بەرهنگاری و بەرفرەهکرن

نەخشەیا مەزنترین تەواو ئەڤ نەخشەیە $f(x)=[x]$ دەمێ $[x]$هێمایێ مەزنترین ژمارەیا تەواو ژ x زێدەتر نەبیت. بژمێرا ڕوونکرنێ هێمایێ $\mathbf{Int}(x)$ بۆ نواندنا ئەڤێ نەخشێ بکاردئینت. هەکەر بهایێ قۆتیەکا شەربەتێ 750 دینار بیت. نەخشەیا $f(x)=\mathbf{Int}\left[\frac{x}{750}\right]$ ژمارەیا وان پاکیتێن شەربەتێ دیار دکەت، کو یا دشیاندابیت ب x دیناران بکرن.

34 نەخشەیەکێ بنڤیسە بۆ هەژمارتنا ژمارا وان پاکێتێن پتاتێ یێن سورکری. کو تو بشێی بکری ب x دیناران. هەکەر بزانی بهایێ پاکێتەکێ 650 دیناره. ئەڤێ نەخشەیێ بکاربینە بۆ دیارکرنا ژمارا پاکێتێن پتاتێن سۆرکری کو تو بشێی ب دەھ هزار دیناران بکری.

تێبینی: نەخشەیا بچووکترین تەواو ئەف نەخشەیە $f(x) = [x]$ دەمێ $[x]$هێمایی کێمترین ژمارەیا تەواوا ژ x کێمتر نەبیت وەکی $f(2.9) = \lfloor 2.9 \rfloor = 3$.

35 گەراجێ ترومبێلان 4000 دیناران وەردگرت بەرامبەر راوەستیانا ترومبێلەکی بۆ دەمێ ژ ئێك دەمژمێرێ دەربازنەبیت. هەکەر دەمێ راوەستیانا ترومبێلێ زێدەتر بوو ژ ئێك دەمژمێرێ گەراج 1500 دیناران وەردگرت بۆ هەر دەمژمێرەکا زێدە، یان کەرتەك ژ دەمژمێرەکا زێدە. نەخشەیەکێ بنڤیسە کرێیا راوەستیانا ترومبێلێ پێ دەمی t بنوێنت. ئەڤێ نەخشەیێ بکاربینە بۆ هەژمارتنا کرێیا راوەستیانا ترومبێلەکێ بۆ دەمێ 5 دمژمێر و 23 خولەکان.

پێداچوونا لوولپێچی

36 **ئەندازە:** پەیوەندییەك هەیە ژمارا لایێن چەند لایەکی ڕێك و سەرجەمێ پیڤانێن گۆشەیێن ژناڤدا پێکڤە گرێددەت، وەکی ل ئەڤی خشتەیێ ل خوارێ دیاردبیت. نەخشەیەکێ بۆ دەربڕینا ئەڤێ پەیوەندیێ بنڤیسە. (وانەیا 1 – 2)

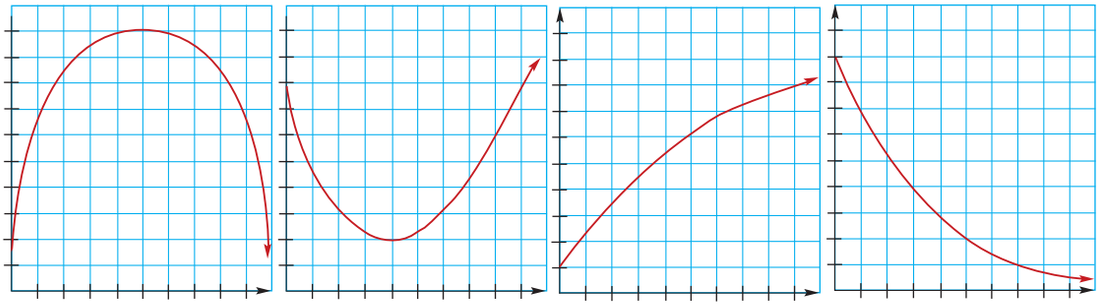
ژمارا لایان	3	4	5	6	8
سەرجەمێ پیڤانێن گۆشەیێن ژناڤدا ب پلە	180	360	540	720	1080

دەرکنارێن هەر نەخشەیەکێ و بوار و مەودایێ وێ دیاربکە. (پوللێن پێشتر)

37 $f(x)=\frac{4}{x-1}-3$ **38** $f(x)=\frac{3}{x+2}+1$ **39** $f(x)=\frac{5}{x-3}+1$

هەر وێنەیەکێ ڕوونکرنێ، بارەکی ژ پرسیارێن ل خوارێ (40 – 43) دنوێنیت دیاربکە.
(وانەیا 5 – 1)

أ ب ج د



40 کۆمپانیەکێ ئێك ژ بەرهەمێن خو بره بازاری. بێی ڕێکلامێ بۆ بکەت مفایێ وی هاتە خوارێ، لێ پشتی ڕیکلام بۆ کری مفایێ وی زێدەبوو.

41 نزمبوونا بهایێ بژمێرێ پێ دەمی.

42 نزمبوونا مفایێ دوکانا ئایس گرێمی ل زفستانێ، لێ ل بهار و پاییزێ بلندبیت و ل هاڤینێ گەلەك بلندبیت.

43 پلەیا گەرماتیێ بلند دبیت ل ناڤبەرا دەمژمێر12:00 پشتی نیڤرۆ هەتا 5 پشتی نیڤرۆ.

بەرپەرێ تەکنولوژیا

هەژمارتنا جیاوازییا و ڕێژەیان

ل بیرا تەبیت، هەمی گاڤا نەگۆهۆرینا جیاوازیان یان ڕێژەیان هاریکاریا تە دکەن بۆ دیارکرنا جورێ وێ نەخشەیا تۆ بکاردئینی بۆ نواندنا کومەلا پێدایان. تۆ دشێی بەرنامێ EXCEL ێ کۆمپیوتەری بکاربینی بۆ هەژمارکرنا جیاوازیان و ڕێژەیان ب شێوەیەکی بلەز.

پێدایێن خشتەیێ بەرامبەر بکاربینە. بەرنامێEXCEL بکاربینە بۆ هەژمارکرنا جیاوازییێن ئێکێ و جیاوازییێن دووێ و ڕێژەیان، نەگورێ دیاربکە هەکەر هەبیت.

x	5	6	7	8	9	10	11
y	1	3.4	6.6	10.6	15.4	21	27.4

ل دەستپێکێ وان ڕێزان بکە دناڤ بژمێرێ دا وەکی یا دیار، ل بێرا تە نەچیت کۆ جیاوازییێن ل ناڤبەرا بهایێن x دڤێت د یەکسان بن.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	5	6	7	8	9	10	11
2	y	1	3.4	6.6	10.6	15.4	21	27.4
3	جیاوازییێن ئێکێ		2.4	3.2	4	4.8	5.6	6.4
4	جیاوازییێن دووێ							
5	ڕێژە							

1 **هەژمارا جیاوازان بکە.** ڕێسایا C3 د خانەیا =C2 – B2 تۆماربکە بۆ هەژمارکرنا جیاوازیان ل ناڤبەرا هەردوو بهایێن y یێن ئێکێ. ئەوێن د ناڤ C3 ێدا کوپی بکە بۆ خانەیان ژ D3 بۆ H3 .

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	5	6	7	8	9	10	11
2	y	1	3.4	6.6	10.6	15.4	21	27.4
3	جیاوازییێن ئێکێ		2.4	3.2	4	4.8	5.6	6.4
4	جیاوازییێن دووێ			0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
5	ڕێژە							

2 **هەژمارا جیاوازییێن دووی بکە.** ڕێسایا D3 – C3 = د خانەیا D4 تۆماربکە بۆ هەژمارکرنا جیاوازییێن دووێ. ئەوێن د ناڤ D4 ێدا کوپی بکە بۆ خانەیان ژ E4 بۆ H4 .

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	5	6	7	8	9	10	11
2	y	1	3.4	6.6	10.6	15.4	21	27.4
3	جیاوازییێن ئێکێ		2.4	3.2	4	4.8	5.6	6.4
4	جیاوازییێن دووێ			0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
5	ڕێژە		3.40	1.94	1.61	1.45	1.36	1.30

3 **ڕێژەیان هەژماربکە.** ڕێسایا C5 د خانەیا =C2 / B2 تۆماربکە بۆ هەژمارکرنا ڕێژەیا هەردوو بهایێن ئێکێ ژ بهایێن y . ئەوێن د ناڤ C5 کوپی بکە بۆ خانەیان ژ D5 بۆ H5.

هەر وەکی دیار د ئەوا بۆریدا کۆ جیاوازییێن دووێ د نەگۆڕن.

هەوڵبدە

بۆ هەر ئێك ژ ئەڤان پێدایان بەرنامێ EXCEL بکاربینە بۆ هەژمارکرنا جیاوازییێن ئێکێ و جیاوازییێن دووێ و ڕێژەیان. نەگۆڕێ تێدا دیاربکە هەکەر هەبیت.

1

x	2	4	6	8	10
y	–20	124	364	700	1132

2

x	4	7	10	13	16	19
y	1.31	2.48	3.65	4.82	5.99	7.16

3

x	3	4	5	6	7
y	8.96	35.84	143.36	573.44	2293.8

4

x	1.5	3	4.5	6	7.5
y	–9	15	57	117	195

5 **هزرکرنا ڕەخنەگر** کیژ جۆر ژ نەخشەیان گونجایترە بۆ نواندنا پێدایان د ڕاهێنانا 4دا؟ بەلگەیەکێ بۆ بەرسڤا خۆ بینە.

2-5

جهگوهوڕکیا نەخشەیان

Transforming Functions

هەکەر ل دانا قستی گیرۆیی دێ ل ناڤ هەڤالان بەلاڤکەین.

داخوازا لێبورینێ دکەم بۆ گێرۆبوونا دانا قستی، نەز چاڤەریێ جهگوهوڕکێ مە.

ئارمانج

- نەخشە دێ هێنە جهگوهوڕین.
- جهگوهوڕکیا نەخشەیێ دێ نیاسین.

بۆچی ئەم فێری ئەڤێ دبین؟

تو دشێی جهگوهوڕکین نەخشەیێ بکاربینی بۆ وەسفکرنا ئەوان گۆهوڕینێن لسەر باجا تۆمارکرنا ناڤی ل زانکۆیێ روودەن (نموونە 4)

دوانە و پۆلێن بۆری دا تو فێربوویی کا چەوا جهگوهوڕکیا نەخشەیێن جیاواز بکەی. تو دشێی جهگوهوڕکیا نەخشەیا ڕێسا پلەدار بکەی ب جهگوهوڕکیا هەر لقەکی ژ لقێن وێ نەخشەیێ. ئەڤ خشتەیێ ل خوارێ ڕێسایێن جهگوهوڕکیا نەخشەیان کورت دکەت.

فێربە و بێ بەربکە

جهگوهوڕکیا نەخشەیا $f(x)$	
ڕاکێشانا ئاسوویی	ڕاکێشانا ستوونی
$f(x)\to f(x-h)$ بۆ لایێ ڕاستێ هەکەر $h>0$ بۆ لایێ چەپێ هەکەر $h<0$	$f(x)\to f(x)+k$ بۆ لایێ سەری هەکەر $k>0$ بۆلایێ خوارێ هەکەر $k<0$
وێنەدانەوە ل دۆر تەوەرێ ئیکی x - axis	وێنەدانەوە ل دۆر تەوەرێ دووی y - axis
$f(x)\to f(-x)$	$f(x)=-f(x)$
فرەهبوون یان تێکچوونا ئاسۆیی	فرەهبوون یان تێکچوونا ستوونی
$f(x)\to f\left(\frac{1}{b}x\right)$ فرەهبوونە هەکەر $b>1$ ، تێکچوونە هەکەر $0<b<1$	$f(x)\to af(x)$ فرەهبوونە هەکەر $a>1$ ، تێکچوونە هەکەر $0<a<1$

نموونە 1

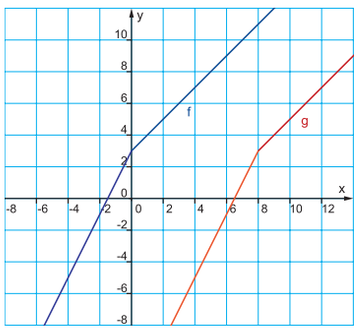
جهگوهوڕکیا نەخشەیێن ڕێسا پلەدار:

نەخشەیا $g(x)$ ئەوا پەیدابووی ژ جهگوهوڕکیانەخشەیا $f(x)=\begin{cases}x+3 & x>0\\ 2x+3 & x\le 0\end{cases}$ بنڤیسە ب ڕاکێشانەکێ 4 یەکەیان بۆ لایێ ڕاستێ.

دڤێت هەر لقەك ژ لقێن نەخشەیێ 4 یەکە بۆ لایێ ڕاستێ بێتە ڕاکێشان. $x-4$ ل جهێ x ل ڕێسایا نەخشەیا $f(x)$ دانە، پاشی ڕێسایی ب سادەترین شێوە بنڤیسە.

$$g(x)=f(x-4)=\begin{cases}(x-4)+3 & x-4>0\\ 2(x-4)+3 & x-4\le 0\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}x-1 & x>4\\ 2x-5 & x\le 4\end{cases}$$



ساخبکە وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ هەردوو نەخشەیان د ڕووتەختێ پوتانیدا بکێشە بۆ پالّپشتیا بەرسڤا خۆ.

ئاگەهداری!

ڕاکێشانا ئاسۆیی ڕێسایێن نەخشەیا. ڕێسا پلەدار و ماوەیێ بواری دگوهوڕێت. لێ ڕاکێشانا ستوونی بتنێ ڕێسایان دگوهوڕێت.

1. نەخشەیا $g(x)$ و ئەوا پەیدابووی ژ جهگۆهورکیا نەخشەیا $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\le 0\\ x-3 & x>0\end{cases}$ بنڤیسە ب فرەهکرنەکا ئاسۆیی هاوکۆلکێ وێ (2) بیت.

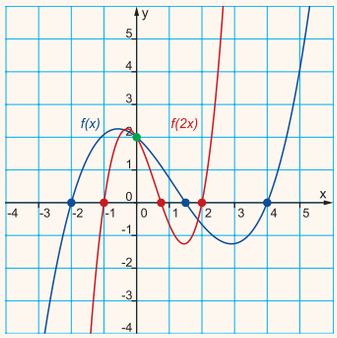
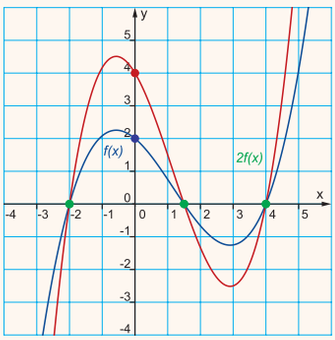
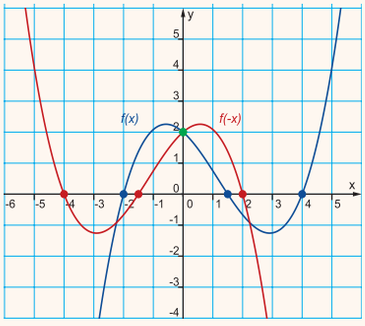
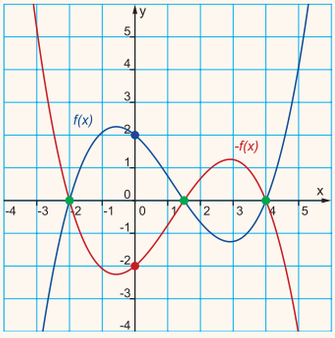
خالا چاڤدێریێ

ل دەمێ جهگوهۆرکیا نەخشەیەکی چێدبیت ئێکودووبڕینا وان ل گەل تەوەرێن پۆتانی بینە گوهۆڕین و چێدبیت نەهێنە گوهۆڕین.

دەمێ جهگۆهۆرکەك بهێتە پێناسەکرن، تۆ دشێی ئێکودووبڕینێن نەخشەیێ – وێنەیی دیاربکەی، کو دبنە هاریکار بۆ وێنەکرنێ.

فێربە و بڕێبکە

کارتێکرنا جهگوهۆڕکان لسەر ئێکودووبڕینێن ئاسویی و ستوونی بۆ نەخشەیا $f(x)$

فرەهبوون یان تێکچوونا ئاسوویی دەمێ هاوکولکە a بیت	فرەهبوون یان تێکچوونا ستوونی دەمێ هاوکولکە b بیت
	
ئێکودووبڕینێن ئاسوویێ ب b لێکبدە ئیکودووبڕینێن ستوون ناهێنە گوهۆڕین	ئێکدووبڕینێن ئاسویێ ناهێنە گۆهۆڕین ئێکودووبڕینێن ستوونی ب a لێکبدە
وێنەدانەوە ل دۆر تەوەرێ ئێکێ	**وێنەدانە ل دۆر تەوەرێ دووێ**
	
ئێکودووبڕینێن ئاسویێ ناهێنە گۆهۆڕین ئێکودووبڕینێن ستوونی دئێنە گوهۆڕین ب دژەیێ وێ	ئێکودوو بڕینێن ئاسۆیی دئێنە گوهۆڕین ب دژەیێ وێ ئێکودوبڕینێن ستوونی ناهێنە گوهۆڕین

نموونـــــە 2 دیارکرنا ئێکودووبڕینان دگەل هەردوو تەوەران

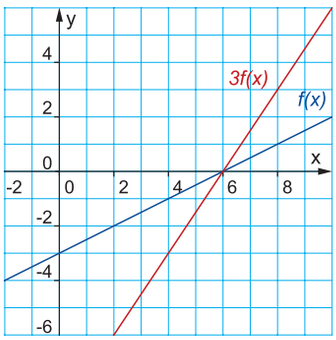
ئێکودووبڕینێن نەخشەیا $f(x)$ دیاربکە، پاشی ئێکودووبڕینین نەخشەیا $g(x)$ دیاربکە، بێی وێنەکێشانا وێنەیێ روونکرنێ.

أ $f(x)=\frac{1}{2}x-3$ ؛ $g(x)=3f(x)$.

ئێکودووبڕینێن نەخشەیا بنەڕەت دیاربکە.

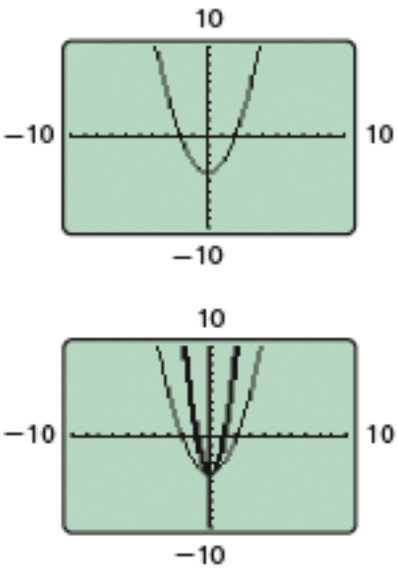
$0=\frac{1}{2}x-3$ $\qquad$ $f(0)=\frac{1}{2}(0)-3=-3$

$x=6$ $\qquad$ $f(0)=-3$



ئێکودووبڕینا ستوونی (-3) و ئێکودووبڕینا ئاسۆیی (6) ، چونکی $g(x)$ فرەهبوونا ستوونێیە بۆ نەخشەیا $f(x)$ ب هاوکولکەیێ 3. ڤێجا ئێکودووبڕینا ئاسۆیی نائێتە گوهۆڕین، لێ ئێکودووبڕینا ستوونی دگەل هاوکولکەیێ فرەهبوونێ لێکددەن کو ئەو (3)یە. ئێکودووبڕینا نەخشە $g(x)$دبیتە 3(-3)=-9 .

ب $f(x)=x^2-4$ ؛ $g(x)=f(2x)$.



ب بژمێرا ڕوونکرنێ دیاردبیت کو ئێکودووبڕینا ستوونی بۆ وێ نەخشەیێ دبیتە (-4)، و دوو ئێکۆدووبڕینێن ئاسۆیی هەنە 2 - و 2 بۆ نەخشەیا $f(x)$. بەرێ خو بدە نەخشەیا $g(x)$ ئەو یا پەیدابوویی ژ ئەنجامێ تێکچوونا ئاسۆیی یا نەخشەیا $f(x)$ ب هاوکۆلکەیێ $\frac{1}{2}$. ژ ئەقێ دیار دبیت کو ئێکودوو برینا ستوونی نائێتە گۆهۆڕین، و هەر ئێکودووبڕینەکا ئاسۆیی ل گەل $\frac{1}{2}$ دهێتە لێکدان. ئێکودووبڕینێن ئاسۆیی بۆ نەخشەیا $g(x)$ دبنە 1- و 1.

ساخبکە: لسەر ئەوێ شاشیێ وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ نەخشەیا $g(x)$ بکێشە بۆ پالپشتیا بەرسڤا خۆ.

خالا چاڤدێریێ

2. ئێکودووبڕینێن نەخشەیا $f(x)$ دیاربکە، پاشی ئێکودووبڕینێن نەخشەیا $g(x)$ بێی وێنەکرنا وێنەیێ ڕوونکرنێ دیاربکە.

أ $f(x)=\frac{2}{3}x+4$ $g(x)=-f(x)$ ب $f(x)=x^2-9$ $g(x)=\frac{1}{3}f(x)$

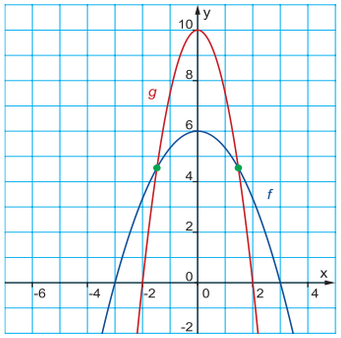
نموونـــــە 3 ئاوێتەکرنا جهگوهۆڕکان

وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ نەخشەیا $g(x)=f\left(\frac{3}{2}x\right)+4$ بکێشە هەکەر $f(x)=-\frac{2}{3}x^2+6$

پێنگاڤا (1)ێ: وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ نەخشەیا $f(x)$ بکێشە، وێنەیێ ڕوونکرنێ یێ $f(x)$ تەوەرێ دووێ ل (0,6) و تەوەرێ ئێکێ ل (−3,0) و (3,0) دبڕیت.

پێنگاڤا (2)ێ: هەر جهگوهۆڕکەکێ جودا جودا تاقیبکە.

جهگوهۆڕکیا ئێکێ دبیتە تێکچوونا ئاسۆیی ب هاوکولکێ $\frac{2}{3}$، پاشی ئەڤ جهگۆهۆڕکییە ئێکودوو برینا ستوونی ناگۆهۆڕیت وەکی خو دمینت، لێ ئێکودووبڕینێن ئاسۆیی دبنە 2- و 2 . جگۆهورکیا دووێ دبیتە راکێشانەك بەرەڤ سەری ب 4 یەکەیان. ئەڤی خشتەی بۆ ڕوونکرنا ڕاکێشانا هەرسێ خالان بکاربینە:



خالێن ئێکودووبڕینان	(−2, 0)	(2, 0)	(0, 6)
وێنەیێ راکێشانا وان	(−2, 4)	(2, 4)	(0, 10)

ساخبکە وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ هەردوو نەخشەیان $f(x)$ و $g(x)$ دئێك ڕووتەختێ پۆتانی دا بکێشە.

خالا چاڤدێریێ

3. وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ نەخشەیا $g(x)=-\frac{1}{2}f(x)$ بکێشە هەکەر $f(x)=2^x-4$.

نموونـــــه 4 بـجهئینان لسەر شیکارکرنا پرسیاران

کارگێریا زانکویەکێ نەخشەیا ریّسا پەلدار بکاردئینیت بۆ دیارکرنا باجا تۆمارکرنا قوتابیان پێ ژمارا دەمژمێرێن وانەیان تێدا تۆمار دکەن.

نەخشە ئەڤەیە $f(x)=\begin{cases}110\ 000x & 0<x<12\\ 1\ 320\ 000 & 12\le x\le 18\\ 150\ 000(x-18)+1\ 320\ 000 & x>18\end{cases}$

سەروکاتیا زانکۆیێ بڕیاردا باجێ بۆ وەرزێ پایزێ ب ڕێژەیا 10% زێدەبکەت. هەروەسا بڕیاردا 750 000 دیناران وەك باج بئێختە سەر هەر کەسەکی ناڤێ خۆ تۆماربکەت. نەخشەیەکێ بنڤیسە کۆ ڕێکێ بدەت بۆ هەژمارکرنا باجا تۆمارکرنێ د وەرزێ پاییزێدا پێ x بیت.

1 د پرسیارێ بگەهە

نەخشەیا نوو دهێتە دیارکرن ب جهگوهۆڕکیا نەخشەیا بنەڕەت ب دوو جهگوهۆڕکان: زێدەکرنا باجا تومارکرنێ 10%، پاشی زێدەکرنا باجا کارگێریێ ب بڕێ 75 000 دیناران. دشێین باجا 10% بلند بکەین ب لێکدانا هەر لقەکێ ژ لقێن نەخشەیێ ب 110%یان 1.1 ئەڤە وێ چەندێ دگەهینیت کۆ نەخشە بکەڤیتە ژێر فرەهبوونا ستوونی هاوکۆلکەیێ وێ 1.1 بیت، لێ زێدەکرنا باجا کارگێریێ دبیتە ڕاکێشانا نەخشەیێ بەرەڤ سەری ب بڕێ 75 000 یەکەیان.

2 پلانێ دانە

جهگۆهورکیا ئێکێ ب جهبینە، پاشی جهگوهۆڕکیا دووێ، نەخشەیا پەیدا دبیت بنڤیسە.

3 شیکاربکە

دەستپێبکە ب دیارکرنا نموونەیا باجان پشتی 10% هاتیە زێدەکرن.

هەر لقەکێ دگەل 1.1 لێکبدە

$$g(x)=(1.1)f(x)=\begin{cases}(1.1)110\ 000x & 0<x<12\\ (1.1)1\ 320\ 000 & 12\le x\le 18\\ (1.1)\left[150\ 000(x-18)+1\ 320\ 000\right] & x>18\end{cases}$$

$$=\begin{cases}121\ 000x & 0<x<12\\ 1\ 452\ 000 & 12\le x\le 18\\ 165\ 000(x-18)+1\ 452\ 000 & x>18\end{cases}$$

نوکە نموونەیا باجان پشتی زێدەکرنا باجا کارگێریێ ب بڕێ 75 000 دینار دیاربکە.

$$h(x)=g(x)+75\ 000=\begin{cases}121\ 000x+75\ 000 & 0<x<12\\ 1\ 452\ 000+75\ 000 & 12\le x\le 18\\ 165\ 000(x-18)+1\ 452\ 000+75\ 000 & x>18\end{cases}$$

$$=\begin{cases}121\ 000x+75\ 000 & 0<x<12\\ 1\ 527\ 000 & 12\le x\le 18\\ 165\ 000(x-18)+1\ 527\ 000 & x>18\end{cases}$$

4 ساخبکە

بەرسڤا خۆ ساخبکە بکارئینانا چەند بهایان. هەکەر باجا سەرەکی بۆ 20 دەمژمێران 1 620 000 دیناربن. ب زێدەکرنا ئەڤان باجان 10% و زێدەکرنا 75 000 دیناران ئەڤ پاچە دێ بیتە 1 857 000 دینار. بهایێ نەخشەیا نوو دەمێ $x=20$ بهەژمێرە.

$h(20)=165\ 000(20-18)+1\ 527\ 000=330\ 000+1\ 527\ 000=1\ 857\ 000$ ✓

4. مۆزەخانا زانستان 5 000 دیناران باجا چوونا ژۆرێ وەردگریت بۆ هەر زارۆکەکی ژێرێ وی ژ 12 سالان کێمتر بیت، و 7500 دیناران وەردگرت بۆ هەر کەسەکی ژێرێ وی ژ 12 سالان کێمتر نەبیت (12 سال و بەرەڤ سەری).
کارگیریا مۆزەخانێ بڕیاردا بهایێن چوونا ژۆرێ ب ڕێژەیا20% زێدەبکەت.
هەر پلێتەکێ 500 دیناران بئێختە سەر بۆ ساناهیکرنا کاری ب هۆیێ کامیری.
نەخشەیەکێ بنقیسە بهایێ نوو یێ چوونا ژۆرێ پێ ژێرێ بکڕی بنوێنت.

خالا چاڤدێریێ

هزربکە و گەنگەشێ بکە

1. کیژ جهگوهۆڕك ئێکودووبڕینێن ستوونی ناگوهۆڕیت؟
2. روونبکە بۆچی خالا $(0,0)$ ناهێتە گۆهۆڕین ل ژێر کارتێکرنا هەر فرەهبوونەکێ و هەر تێکچوونەکێ.
3. ڕێکخەرە، ئەڤی خشتەیێ ل خوارێ دووبارە بنقیسە و پاشی تەمامبکە. بەحسێ کارتێکرنا هەر جهگوهۆڕکەکێ لسەر ئێکودووبڕینێن وان وەسفبکە.

فێربە و بڕەبکە

جهگوهۆڕکی	ئێکودووبڕینا ئاسۆیی	ئێکووبڕینا ستوونی
فرەهبوون یان تێکچوونا ئاسویی ب هاوکۆلکەیێ b		
فرەهبوون یان تێکچوونا ستوونی ب هاوکولکەیێ a		
وێنەدانەوە ل دۆر تەوەرێ x		
وێنەدانەوە ل دۆر تەوەرێ y		

2-5 ڕاهێنان

ڕاهێنانێن ئاراستەکری

بەرێ خۆبدە نموونە 1

ڕێسایا نەخشەیا $g(x)$ ئەوا پەیدابووی ژ ئەنجامێ جهگوهۆڕکیا $f(x)=\begin{cases}x-3 & x\le 0\\ 4x & x>0\end{cases}$ بنقیسە.

1 ڕاکێشان ب 6 یەکەیان بەرەڤ لایێ چەپێ

2 تێکچوونا ئاسۆیی ب هاوکۆلکەیێ $\frac{1}{4}$.

بەرێ خۆبدە نموونە 2

ئێکودووبڕینێن نەخشەیا $f(x)$ پاشی نەخشەیا $g(x)$ دیاربکە بێی وێنەکرنا وێنەیێ ڕوونکرنێ:

3 $f(x)=4x+12$ ؛ $g(x)=\frac{1}{6}f(x)$

4 $f(x)=-x^2+16$ ؛ $g(x)=f(4x)$

بەرێ خۆبدە نموونە 3

وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ نەخشەیا $f(x)$ بکێشە، پاشی جهگوهۆڕکێ بکاربینە بۆ وێنەکێشانا وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ $g(x)$.

5 $f(x)=-x^2+1$ ؛ $g(x)=f(2x)-1$

6 $f(x)=|x-1|-2$ ؛ $g(x)=-2f(x)$

بەرێ خۆبدە نموونە 4

7 **باج:** حکومەتەك پشت بەست دبیت ب نەخشەیا $T(x)=\begin{cases}0.02x & 0<x\le 10\ 000\ 000\\ 0.05x & x>10\ 000\ 000\end{cases}$

بۆ دیارکرنا باجا دەرامەتی پێ داهاتێ بتنێ x، حکوومەتێ بڕیاردا بۆ زێدەکرنا باجێ ب ڕێژەیا 20% و باجەکا بڕی 100 000 دینار سەپاند بۆ هەر کەسەکی باجە لسەر هەبیت. نەخشەیەکا نوو بۆ دیارکرنا بهایێ باجێ پێ داهاتی بنقیسە.

راهێنان و شیکارکرنا پرسیاران

راهێنانێن ئازاد	
بۆشیکارکرنا پرسیاران	بەرێ خۆ بدە نموونە
10-8	1
16-11	2
18-17	3
19	4

رێسایا نەخشەیا $g(x)$ و ئەوا پەیدابووی ژ ئەنجامێ جهگۆهۆرکا نەخشەیا $f(x)=\begin{cases}x^2 & x<1\\ 4x & x\geq 1\end{cases}$ بنڤیسە ل دووڤ جهگوهۆرکیا دیارکری.

8 تێکچوونا ستوونی ب هاوکولکەیێ $\frac{1}{4}$

9 فرەهبوونا ئاسوویی ب هاوکولکەیێ 2

10 راکێشان بەرەڤ خوارێ ب 3 یەکەیان.

ئێکودووبرینێن نەخشەیا $f(x)$ دگەل هەردوو تەوەرێن پۆتانی دیاربکە، پاشی ئێکودووبرینێن نەخشەیا $g(x)$ دیاربکە بێی وێنەکرنا وێنەیێ پرووکرنێ.

11 $f(x)=-\frac{3}{2}x+9$ ؛ $g(x)=\frac{2}{3}f(x)$

12 $f(x)=x^2-25$ ؛ $g(x)=f\left(\frac{5}{3}x\right)$

13 $f(x)=-\frac{2}{5}x+2$ ؛ $g(x)=f(2x)$

14 $f(x)=x^2-3x-4$ ؛ $g(x)=-f\left(\frac{1}{3}x\right)$

15 $f(x)=3^x-1$ ؛ $g(x)=2f(x)-4$

16 $f(x)=x^3+8$ ؛ $g(x)=f\left(-\frac{1}{2}x\right)$

وێنەیێ پرووکرنی بۆ نەخشەیا $f(x)$ بکێشە، پاشی جهگوهۆڕکەکێ بکاربینە بۆ وێنەکرنا وێنەیێ پرووکرنا نەخشەیا $g(x)$.

17 $f(x)=\frac{1}{2}x+4$ ؛ $g(x)=3f(-x)$

18 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-2$ ؛ $g(x)=-f(2x)$

19 **کار** بۆ هەژمارکرنا لێچوێیێ پێدڤییێن ئاهەنگێن قوتابخانان، کومپانیەك پشت بەست دبیت ب ئەڤێ نەخشەیێ. $c(n)=\begin{cases}18\,000n & n\leq 50\\ 400\,000+10\,000n & n>50\end{cases}$ کو n ژمارا کەسانە.

أ ڕێڤەبەریا کومپانیێ بڕیاردا ل وەرزێ زڤستانێ بهایان ب ڕێژەیا 10% کێم بکەت. نەخشەیا نوو بۆ هەژمارکرنا لێچوێیان بنڤیسە.

ب ڕێڤەبەریا کومپانیێ بڕیارەکا دی دا کو بڕێ 2000 دیناران بۆ هەر کەسەکی دابشکێنیت. نەخشەیا نوو بۆ هەژمارکرنا لێچوێیان بنڤیسە.

20 **ئارامیا هاتن و چوونێ** باژێرڤانیا پایتەختی ئەو ترومبێلێن سەرپێچێ لسەر لەزا دیارکری دکەن سزاددەت ل دویڤ خشتەیێ بەرامبەر.

سزادانا دەربازبوونا لەزا دیارکری	
دەربازبوون ژ لەزێ (km / h)	سزا (دینار)
10–1	30 000
15–11	50 000
20–16	100 000
25–21	150 000
←26	200 000

أ نەخشەیەکێ بۆ هەژمارکرنا بهایێ سزادانێ ل دووڤ دەمێ دەربازبوونێ ژ لەزێ.

ب باژێرڤانیێ سزایەکی سەربار دچەسپینیت ب بڕێ 50 000 دیناران هەکەر سەرپێچیا لەزێ ل دەڤەرێن قوتابخانان ڕووبدەن. نەخشەیەکێ بنڤیسە کو نرخێ سزای ل جهێن قوتابخانە تێدا دیاربکەت.

ج **دێ چ بیت هەکەر ...؟** باژێرڤانیێ بریاردا بزێدەکرنا سزایی لسەر سەرپێچێن لەزێ 15% نەخشەیەکا نوو بۆ دیارکرنا سزایان بنڤیسە.

21 **هزرکرنا ڕەخنەگر** وەسا دانە کو نەخشەیا $f(x)$ تەوەرێ ئێکی n جاران دبڕیت.

أ چەند جاران ڕوونکرنا نەخشەیان $bf(ax)$ تەوەرێ ئێکێ دبڕیت؟ ڤێ چەندێ ڕوونبکە.

ب ڕوونبکە بۆچی نەشێن ژمارا وان خالان دیاربکەن کو وێنەیێ ڕوونکرنا نەخشەیا $f(x-h)+k$ تەوەرێ ئێکێ دبڕیت.

22 **پارە** بانقەك ڕێکێ ددەتە هەلگرین پلێتێن هاتینە دەرئێخستن ژ بانقێ ژ بۆ دەرئێخستنا پارەی وەك قەرز ژ ئامیرێن کێشانا بانقێ ب کۆژمێ 6000 دیناران وەربگریت هەکەر پارەیێ هاتیە ڕاکێشان ژ 200 000 دیناران دەربازنەبیت و 3% ژ پارەیێ هاتیە ڕاکێشان هەکەر ژ 200 000 دیناران دەرباز بیت.

أ نەخشەیەکێ بنڤیسە، ئەوێ بڕی پارێ بانقی پێ گۆژمێ پارێ ڕاکێشای وەردگریت بنوێنت.

ب وەسا دانە بانقێ بڕیاردا ئەوێ وەردگریت 15% زێدەبکەت نەخشەیەکێ بۆ ئەڤێ بنڤیسە.

پولیسێن هاتن و چوونێ کامێرێن وێنەگرتنێ ل هندەك باژێران د دانن بۆ دیارکرنا وان ترومبێلێن سەر پێچی دکەن ووان سزا ددەن.

23 قوتابیان ل ئاهەنگا ژ دایکبوونا هەڤالەکێ وان ب ڕێزەکا درێژ ڕاوەستیان. قوتابیێ خودانێ ئاهەنگێ رستەیەك دگوهێ قوتابیێ ئێکێ دا گۆت، و داخواز ژ وێ کر ئەوژی دگوهێ قوتابیێ ل دویڤ خۆدا بێژیت... و هەروەسا... هەتا بگەهیتە قوتابیێ دوماهیێ، ئەوی بدەنگەکێ بلند ل بەرامبەری هەموو هەڤالان گۆت. ئەڤ نەخشەیە $T(n)=\begin{cases}3.5n & n\le 8\\ 5.4n-8 & n>8\end{cases}$ دبیتە نموونەیەك بۆ هەژمارتنا دەمێ دهێتە بۆرین ب چرکەیان بۆ ڤەگوهاستنا ڕستەیێ ژ قوتابیێ ئێکێ هەتا قوتابیێ هەلگرێ ژمارە n.

أ ئەڤ یاریە هاتە دوبارەکرن، و قوتابی ب ڕێژەیا 20% ژ جارا ئێکێ ب لەزتربوون نەخشەیا نوو بۆ هەژمارکرنا دەمێ هاتیە بورین بۆ ڤەگوهاستنا رستەیێ بنڤیسە.

ب کارتێکرنا باشبوونا شیانا قوتابیان لسەر وێنەیێ ڕوونکرنا $T(n)$ وەسفبکە.

24 **تەکنۆلۆژیا** مورفینگ Morphing تەکنولوژیەکا بژمێرێیە، ئەو ڕێکێ ددەت بۆ گوهۆڕینا وێنەیەکی بۆ وێنەیەکی دی وەکی ل زنجیرا وێنەیێ لسەری دیارکری. ئەڤ تەکنولۆژیا ب چەند خالان ژ وێنەیەکی بۆ وێنەیەکی دی دهێتە گۆهۆڕین.

أ وێنەیێن ڕوونکرنێ بۆ نەخشەیێن $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+4 & \text{دەمێ } 1\le x\le 2\\ -x^2+6x-7 & \text{دەمێ } 2\le x\le 4\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x+7 & \text{دەمێ } 2\le x\le 4\\ \text{لسەر ئێك ڕووتەختی پۆتانێ بکێشە.} & \text{دەمێ } 4\le x\le 5\end{cases}$ $h(x)$

ب وێنەیێن ڕوونکرنێ بۆ نەخشەیێن $f_1(x)=-f(x)+8$ و $g_1(x)=-5g(x)+3$ و $h_1(x)=-h(x)+8$ بکێشە.

بۆ هەر نەخشەیەکێ نەخشەیەکا پەیدابووی ژ گوهۆڕینا وێ ب جهگوهۆڕکا دیارکری بنڤیسە.

25 $f(x)=\begin{cases}2^x-1 & x\le -3\\ -5x+3 & x>-3\end{cases}$ ، راکێشان 7 یەکان بۆ خوارێ.

26 $f(x)=\begin{cases}3x^2 & x<1\\ -2x+4 & x\ge 1\end{cases}$ ، فرەهبوونا ستوونی ب هاوکولکەیێ 5.

27 **بەرهەم** جوتیارەکی متایێ خۆ ب بهایەکی قایلکەر پیشاندا.

أ وێنەیەکێ ڕوونکرنێ بکێشە کو لێچوێیێ کرینا هندەك متایان لناڤبەرا 0 kg و 10 kg بنوێنیت.

ب نەخشەیەکا ریسا پلەدار بنڤیسە کو ئەو بشێت بۆ هەژمارتنا x kg متایی بکاربینیت.

ج **دێ چ بیت هەکەر...؟** ل دووماهیا ڕۆژێ، جوتیاری پیشاندانەکا دی ئێخستە روو بۆ بکڕی. کو بەرامبەر هەر کیلۆگەرامەکا بکڕ بکڕیت جوتیار ب خۆرایی ئێك کیلۆگەرام بدەتێ. وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ نەخشەیا نوو بکێشە ئەو جهگوهۆڕکیا نەخشەیا بنەڕەت پەیدا دکەت وەسفبکە.

28 **کار:** کۆمپانیەك بۆ فرۆتنا دەمژمێران ب ئەڤێ نەخشەیێ $P(n)=-0.002n^2+19n-9000$ پشت بەست دبیت بۆ دیارکرنا قازانجێ فرۆتنا دەمژمێران. ئەو کۆمپانیە بۆ سالاّ داهاتی ب نەخشەیا $R(n)=P(0.8n)$ پشت بەست دبیت.

أ کارتێکرنا ئەڤان گۆڕانکاریان لسەر ژمارا وان دەمژمێرین دڤێت کومپانی بفرۆشیت چییە دا پترترین قازانج بدەست بکەڤت؟

ب ژمارا وان دەمژمێرین دڤێت بفرۆشیت بهەژمێرە بۆ دەستکەفتنا بلندترین رادێ قازانجی.

29 **هزرکرنا ڕەخنەگر:** نەخشەیەکا هێلی ئێکودووبڕینا وێ یا ئاسۆیی یەکسانە 2 و ئێکودووبڕینا ستوونی یەکسانە 3 . هەکەر ئەو نەخشە بهێتە فرەهکرن ب شێوەیەکێ ئاسۆیی ب هاوکۆلکەیێ (2). ئێکودووبڕینێن نەخشەیا نوو پشتی جهگۆرکیێ چەندە؟

30 **هزرکرنا ڕەخنەگر:** بۆچی ل راکێشانا ستوونی بواریّ نەخشەیێ ناهێتە گۆهۆڕین، لێ ل راکێشانا ئاسۆیی بواریّ نەخشەیێ دهێتە گوهۆڕین؟ ئەڤێ روونبکە.

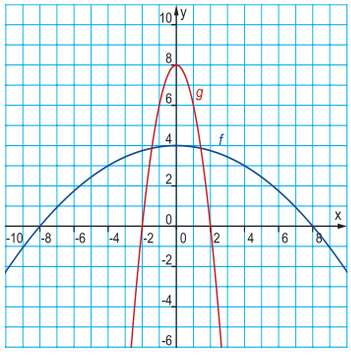
31 **بنڤیسە:** ئەرێ تو دشێی وێنەیەکی روونکرنێ یێ خال لکری بگۆهۆری بۆ وێنەیەکی روونکرنێ یێ بەردەوام، بتنێ فرەهبوون و تێکچوونێ بکاربهێت؟

ئامادەکرن بۆ ئەزموونێ

32 کیژ ئەڤانێن ل خوارێ دبیتە نەخشەیا $g(x)$ دوێنەیێ روونکرنێ بەرامبەردا؟

أ $g(x)=2f\left(\frac{1}{4}x\right)$ ج $g(x)=2f(4x)$

ب $g(x)=\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{4}x\right)$ د $g(x)=\frac{1}{2}f(4x)$



33 کیژ ئەڤانێن ل خوارێ دبیتە نەخشەیا $g(x)=f(4x)$

هەکەر $f(x)=\begin{cases}2x & x>8\\ x^2 & x\le 8\end{cases}$

أ $g(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & x>2\\ \frac{x^2}{16} & x\le 2\end{cases}$ ج $g(x)=\begin{cases}8x & x>32\\ 4x^2 & x\le 32\end{cases}$

ب $g(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & x>8\\ \frac{x^2}{16} & x\le 8\end{cases}$ د $g(x)=\begin{cases}8x & x>2\\ 16x^2 & x\le 2\end{cases}$

34 ئێکودووبڕینا ستوونی یا نەخشەیا $g(x)=\frac{3}{5}f(5x)$ دبیتە 15، ئێکودووبڕینا ستوونی بۆ نەخشەیا $f(x)$ چەندە؟

أ 3 ب 9 ج 25 د 75

بەرهنگاری و بەرفرەهکرن

35 **ئەندازە** نەخشەیا $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x+4 & x<0\\ -\frac{1}{2}x+4 & x\ge 0\end{cases}$ بکاربینە.

أ وێنەیێ روونکرنێ بۆ نەخشەیا $f(x)$ بکێشە و ئێکودووبڕینان دیاربکە، پاشی رووبەرێ ئەوێ دەڤەرا سنووردای ب چەماوەیێ نەخشێ و تەوەرێ ئێکێ هەژماربکە.

ب وێنەیێ روونکرنێ بۆ نەخشەیا $g(x)=4f(2x)$ بکێشە، پاشی رووبەرێ ئەوێ دەڤەرا سنووردای ب چەماوەیێ نەخشەیێ و تەوەرێ ئێکێ بهەژمێرە.

36 نەخشەیا $f(x)=2x^3-3x^2-11x+6$ بکاربینە:

أ ئێکودووبڕینا نەخشەیا $g(x)=3f\left(\frac{1}{2}x\right)$ دیاربکە. ب ئێکودووبڕینا نەخشەیا $h(x)=-g\left(\frac{1}{2}x\right)$ دیاربکە.

پێداچوونا لوولپێچی

37 **زەقی ناسی:** دناڤبەرا سالا 1999 و 2002 دا 973 پیڤەلەرزان ل وەلاتێن ئێکگرتیا ئەمریکی دا. 43% ژ وان پیڤەلەرزان ل کالیفورنیا دا بوون، ب نێزیکی چەند پیڤەلرزان د ئەوی ماوەی دا ل کارلیفورنیا دابوو؟ (پولێن پێشتر)

مەزنترین و بچووکترین بها بۆ هەر نەخشەیەکێ بەهەژمێرە، پاشی بوار و مەودایێ نەخشێ دیاربکە. (پوٚلێن پێشتر)

38 $f(x)=4x^2-2x+8$

39 $g(x)=-3x^2+6x-9$

بهایێ هەر نەخشەیەکا ریّسا پلەدار ل خوارێ بهەژمێرە، دەمێ $x=-4$ و $x=0$ و $x=5$. (وانەیا 5– 2)

40 $f(x)=\begin{cases}3 & x<1\\ x^2-4 & x\geq 1\end{cases}$

41 $g(x)=\begin{cases}5-2x & x<-3\\ 4+x & x\geq -3\end{cases}$

بەشی 5

ئەزموونا نیڤا بەشی

1-5 نەخشەیێن ڕێسا پلەدار

ویَنەیێ ڕوونکرنێ بۆ نەخشەیێ بکێشە:

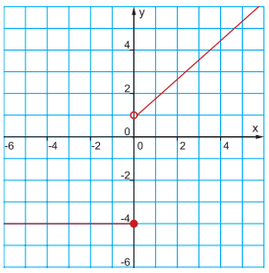
1 $f(x)=\begin{cases}3 & x<0\\ 2x+3 & x\geq 0\end{cases}$

2 $h(x)=\begin{cases}-x+1 & x<-3\\ -x & -3\leq x<1\\ -x-1 & x\geq 1\end{cases}$

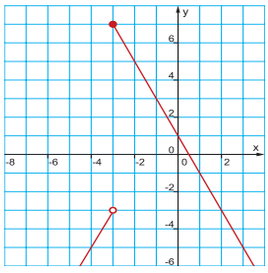
3 بکرێکرنا پایسکلی بۆ ڤەگوهاستنا ل ناڤ چیایی بۆ سێ دەمژمێرێن ئێکێ 25 000 دینار تێدچێت، و 5000 دینار بۆ هەر دەمژمێرەکا زێدە. ویَنەیێ ڕوونکرنێ بکێشە بۆ بکرێکرنا پایسکلی بۆ دەمێ دیارکری ژ 0 هەتا 8 دەمژمێران.

نەخشەیەکا ڕێسا پلەدار بۆ هەر ویَنەیەکی ڕوونکرنێ ل خوارێ بنڤیسە.

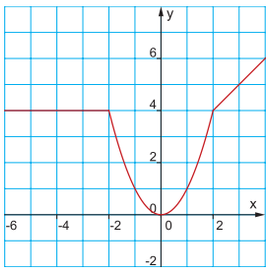
4



5



6



2-5 جهگوهۆڕکێن نەخشەیان

ئێکودووبڕینێن ئاسۆیی و ستوونی بۆ نەخشەیا $f(x)$ دیاربکە و دەرئەنجامێن ئێکودووبڕینێن ئاسۆیی و ستوونی بۆ نەخشەیا $g(x)$ دیاربکە بێی ویَنەکێشانا ویَنەیێ ڕوونکرنێ.

7 $f(x)=2x-2$ ، $g(x)=-f\left(\frac{1}{2}x\right)$

8 $f(x)=x^2-4$ ، $g(x)=2f(x)$

ویَنەیێ ڕوونکرنێ بۆ $g(x)$ بکێشە ب زانینا $f(x)$.

9 $f(x)=|x|-3$ ، $g(x)=2f(x)+3$

10 $f(x)=x^2+1$ ، $g(x)=-3f(x)$

3-5 کردار لسەر نەخشەیان

Operations with Functions

ئارمانج

- کۆمکرن و لێدەرکرنا نەخشەیان و لێکدان و دابەشکرنا وان ئەنجام ددەن.
- ئاوێتەکرنا نەخشەیان و هەژمارتنا بهایێ نەخشەیا ئاوێتە.

کی ئەڤێ بکاردئینیت؟

ئەوێن متایان دکڕن دشێن کرداران لسەر نەخشەیێ بکاربینن بۆ دیارکرنا لێچوویا ئەوێن ب دراڤێ بیانی کرین (نموونە 5)

تۆ دشێی کرداران لسەر نەخشەیان ئەنجام بدەی هەر وەکی تە ئەنجامداین لسەر ژمارەیان و پەڕان. دشێی نەخشەیان کومبکەی و لێك دەربکەی و ئەوان لێکبدەی و دابەشبکەی، ئەو ژی ب ئەنجامدانا ئەڤان کرداران لسەر بڕێن دبنە ڕێسایێن وان.

کردار لسەر نەخشەیان	
کردار	نڤیسین
کومکرن	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
لێدەرکرن	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
لێکدان	$(fg)(x)=f(x)\times g(x)$
دابەشکرن	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ دەمێ $g(x)\neq 0$

نموونە 1 کومکرن و لێدەرکرنا نەخشەیان

$f(x)=2x^2+4x-6$ ؛ $g(x)=2x-2$ هەر نەخشەیەکێ بهەژمێرە.

أ $(f+g)(x)$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$=(2x^2+4x-6)+(2x-2)$$
$$=2x^2+6x-8$$

لجهێ هەر نەخشەیەکی ڕێسایا وێ دانە سادەبکە

ب $(f-g)(x)$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$
$$=(2x^2+4x-6)-(2x-2)$$
$$=2x^2+4x-6-2x+2$$
$$=2x^2+2x-4$$

لجهێ هەر نەخشەیەکی ڕێسایا وێ دانە سیفەتێ بەلاڤکرنێ بکاربینە سادەبکە

1. **$f(x)=5x-6$ ؛ $g(x)=x^2-5x+6$ هەر نەخشەیەکێ بهەژمێرە.**

أ $(f+g)(x)$ ب $(f-g)(x)$

دەمێ نەخشەیەکێ دابەش دکەی لسەر نەخشەیەکا دی، پشتڕاستبە ژ هەر بوارەکی ل ئەنجامێ دابەشکرنێ پەیدا دبیت.

نموونـــــه 2 لێکدان و دابەشکرنا نەخشەیان

$f(x)=2x^2+4x-6$ ؛ $g(x)=2x-2$، هەر نەخشەیەکێ بهەژمێرە.

أ $(gf)(x)$

$(gf)(x)=g(x)\times f(x)$

لجهێ هەر نەخشەیەکێ ڕێسایا وێ دانە $=(2x-2)(2x^2+4x-6)$

سیفەتێ بەلاڤکرنێ بکاربینە $=2x(2x^2+4x-6)-2(2x^2+4x-6)$

لێکبدە $=4x^3+8x^2-12x-4x^2-8x+12$

سادەبکە $=4x^3+4x^2-20x+12$

ب $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

ئەنجامێ دابەشکرنێ لسەر شێوەیی بڕکی ڕێژەیی بنڤیسە. $=\frac{2x^2+4x-6}{2x-2}$

ب تەمامی شیکاربکە. ئەڤێ لبەرچاڤبکە $x\neq 1$. $=\frac{2(x-1)(x+3)}{2(x-1)}$

کورتبکە $=\frac{\cancel{2}\,\cancel{(x-1)}(x+3)}{\cancel{2}\,\cancel{(x-1)}}$

سادەبکە $=x+3 \quad (x\neq 1)$

خالا چاڤدێرێێ

2. $f(x)=x+2$ ؛ $g(x)=x^2-4$، هەر نەخشەیەکێ بهەژمێرە.

أ $(fg)(x)$ ب $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

فێربە و شرۆڤەبکە

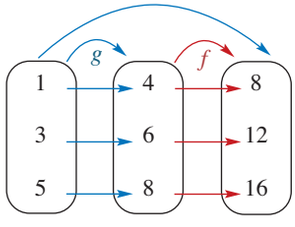
ئاوێتەکرنا نەخشەیان

ئاوێتەکرنا نەخشەیا f دگەل نەخشەیا g ، نەخشەیەکە لسەر ئەڤی شێوەیی

$(fog)(x)=f\left(g(x)\right)$

بواری نەخشەیا ئاوێتە $(fog)(x)$ دبیتە کومەلا بهایێن x دبواری g دا ئەوا $g(x)$ دکەتە دانەیەک سەر بواری f بیت.

f o g



بۆ هەژمارکرنا $(fog)(1)$، دڤێت بشێی $g(1)$ بژمێری

$g(1)=4$

پاشی $f(4)$ بژمێرە

$f(4)=8$

ڤێجا $(f$ o $g)\,(1)=f\,(g\,(1))=f\,(4)=8$

خواندنا بیرکاری

ئاوێتەکرنا $(f\,o\,g)x$ یان f of g of x ب $(g$ of $)\,x$ یان g of f of x دهێتە خواندن.

ڕێسایێن ڕێزبەندیا کرداران لسەر نەخشەیان دبنە هەمان ڕێسایێن ڕێزبەندیا کرداران لسەر ژمارە و بڕان. بۆ هەژمارکرنا $(fog)(3)$ دڤێت بێشیێ $g\,(3)$ بژمێری، پاشی بهایێ f بژمێرە دەمێ بهایێ $g\,(3)$ هەبیت.

نموونـــــه 3 بەهایێن نەخشەیێن ئاوێتە بژمێرە

$f(x)=3x+1$ و $g(x)=x^3$ هەر بەهایەکی بەهەژمێرە.

أ $f(g(2))$

پێنگاڤا (1)یێ: $g(2)$ بژمێرە

$g(2)=2^3=8$ $g(x)=x^3$

پێنگاڤا (2)یێ: $f(8)$ بژمێرە

$f(8)=3\times 8+1=25$ $f(x)=3x+1$

ڤێجا $f(g(2))=25$

ب $g(f(2))$

پێنگاڤا (1)یێ: $f(2)$ بهەژمێرە

$f(2)=3\times 2+1=7$ $f(x)=3x+1$

پێنگاڤا (2)یێ: $g(7)$ بهەژمێرە.

$g(7)=7^3=343$ $g(x)=x^3$

ڤێجا $g(f(2))=343$

هشیاریە!

ئەڤان هەردوو $(\circ)$. $(\bullet)$ هێمایان تێکەل نەکەن.

$(fg)\ x \neq f(g(x))$

خالا چاڤدێریێ

3. $f(x)=2x-3$ و $g(x)=x^2$ هەر بەهایەکی بەهەژمێرە.

أ $f(g(3))$ ب $g(f(3))$

دشێی بڕێن جەبری وەك بهایێ دناڤ نەخشەییدا بکاربینی، هەر وەکی بۆ ژمارەیان دهێتە بکارئینان. بۆ دەرئینانا ڕێسایا نەخشەیا ئاوێتە $f(g(x))$، د نەخشەیا $f(x)$دا بڕێ $g(x)$ل جهێ xدانە، پاشی بڕێ دەرکەفتی ب سادەترین شێوە بنڤیسە.

نموونـــــه 4 نڤیسینا نەخشەیا ئاوێتە

$f(x)=5x+2$ و $g(x)=\frac{2}{x-1}$ هەر نەخشەیەکا ئاوێتە بنڤیسە و بواریێ وێ دیاربکە.

أ $f(g(x))$

$f(g(x))=f\left(\frac{2}{x-1}\right)$ ل جهێ x ڕێسایا نەخشەیا g دانە

$=5\left(\frac{2}{x-1}\right)+2$ ڕێسایا f بکاربینە. ئەڤێ لبەرچاڤبکە کو $x\neq 1$

$=\frac{10}{x-1}+2 \quad ; x\neq 1$ سادەبکە

بواریێ نەخشەیا $f(g(x))$ دبێتە کومەلا ژمارەیێن ڕاستی ژبلی 1 ، یان $\{x|x\neq 1\}$ چونکی $g(1)$ نەیا پێناسەکریە.

ب $g(f(x))$

$g(f(x))=g(5x+2)$ لجهێ x ڕێسایا نەخشەیا f دانە

$=\frac{2}{(5x+2)-1}$ ڕێسایا g بکاربینە. ئەڤێ لبەرچاڤبکە کو $x\neq 1$

$=\frac{2}{5x+1} \quad , \quad x\neq -\frac{1}{5}$ سادەبکە

بواریێ نەخشەیا $g(f(x))$ دبێتە کومەلا ژمارەیێن راستی ژبلی $-\frac{1}{5}$ ، یان $\left\{x|x\neq -\frac{1}{5}\right\}$ چونکی $f\left(-\frac{1}{5}\right)=1$ و $g(1)$ نەیا پێناسەکریە.

خالا چاڤدێریێ

4. $f(x)=3x-4$ و $g(x)=\sqrt{x}+2$ هەر نەخشەیەکا ئاوێتە بنڤیسە و بواریێ وێ دیاربکە.

أ $f(g(x))$ ب $g(f(x))$

ئەم دشێین ئاوێتەکرنا نەخشەیان بکاربینین بۆ کورتکرنا زنجیرەکێ ژ نەخشەیان.

نموونـــــه 5 بـجهێنان لسەر کارگێڕیێ

دلسوزی ماتۆرسکلێن هاتینە بهاکرن ب یۆرویێ ژ ئیتالیا ئینان. لێچوویێ گشتی یا هەر ماتۆرسکلەکێ 10% باجا گومرکێیە و 75 یورو بۆ بارکرنێیە.

نرخێ دراڤان
بۆ هەر 1000 دینارا عیراقی
0.84 دۆلاری ئەمریکی
3.09 ڕیالی سعودی
1260 لیرەی لوبنانی
0.52 یۆرۆی ئەورۆپی

أ **نەخشەیەکا ئاوێتە بنڤیسە کۆ ببتە نموونەیەك بۆ هەژمارکرنا لێچوویێ هەر ماتۆرسگلەکێ ب دیناری پێ بهایێ وێ ب یۆرویی (c).**

پێنگاڤا (1)ێ: نەخشەیەکێ بۆ هەژمارکرنا لێچوویێ ماتۆرسکلەکێ ب یۆرویی بنڤیسە

$$E(c)=c+0.1c+75$$
$$=1.1c+75$$

پێنگاڤا (2)ێ: نەخشەیەکێ بۆ هەژمارکرنا لێچوویێ ماتۆرسگلەکێ ب دیناری پێ لێچوویێ یۆروی بنڤیسە $R(c)=1920c$

1 یۆرو = 1920 دینار بکاربینە

پێنگاڤا (3)ێ: نەخشەیا ئاوێتە $R\big(E(c)\big)$ بهەژمێرە.

$$R(E(c))=1920E(c)=1920(1.1c+75)=2112c+144\ 000$$ لجهێ دانە

ب **لێچوویێ ماتۆرسگلەکێ ب دیناری بهەژمێرە کۆ بهایێ وێ 1200 یورویە**

بهایێ نەخشەیا ئاوێتە $R\big(E(c)\big)$ دەمێ $c = 1200$ بهەژمێرە.

$$R\big(E(1200)\big)=2112\times1200+144\ 000=2\ 678\ 000$$

لێچوویێ گشتی یا ڤێ ماتۆرسگلێ دبیتە 2 678 000 دینار.

خالا چاڤدێرییێ

5. دوکانەکا ئامیرێن موزیکێ ئاشکەراکر کۆ داشکاندن ب ڕێژەیا 20% بۆ ئامێرێن عودێ دانایە. دوکانێ داشکاندنەکا دی یا سەربار ب ڕێژەیا 15% بۆ باشترین بکرێن عودێ ئاشکەراکر.

أ نەخشەیەکا ئاوێتە بنڤیسە بۆ هەژمارکرنا بهایێ دوماهیکێ یێ ئامیری عودێ ل دەمێ فرۆتنا وێ کو (x) بهایە ب دیناران.

ب ئالانی کۆ ئێکە ژ باشترین بکڕان، عودەك بهایێ وێ 248 000 دینارن کڕی، ئالانی چەند پارە دانە دوکانێ؟

هزریکە و گەنگەشێ بکە

1. **ڕوونبکە** ئەگەرێ کو $(f+g)(x)=(g+f)(x)$.
2. هەردوو نەخشەیان $f(x)$ و $g(x)$ دەربینە کو $f(g(x))=g(f(x)$ ساخدکەن.
3. ڕێکخەرە ئەڤێ خشتەیێ کۆپی بکە پاش تەمامبکە. هەر کردارەکی لسەر هەردوو نەخشەیان ب ڕێیەکا دروست بنڤیسە.

فێربە و هزربکە

کردار	نڤیسین
کومکرنا دوو نەخشەیان	
لێك دەرکرنا دوو نەخشەیان	
لێکدانا دوو نەخشەیان	
دابەشکرنا نەخشەیەکێ لسەر ئێکا دی	
ئاوێتەکرنا دوو نەخشەیان	

3-5 ڕاهێنان

ڕاهێنانێن ئاراستەکری

1 **زاراف** ئاوێتەکرنا نەخشەیان ب چ جیاوازی هەیە ژ کردارین دی؟

بەرێ خۆبدە نموونە 1 $f(x)=8x+13$ ؛ $g(x)=x^2-5x$ هەر نەخشەیەکێ بهەژمێرە.

2 $(f+g)(x)$ **3** $(f-g)(x)$ **4** $(g-f)(x)$

بەرێ خۆبدە نموونە 2 $f(x)=2x^2+2x$ ؛ $g(x)=x+1$ هەر نەخشەیەکێ بهەژمێرە.

5 $(fg)(x)$ **6** $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ **7** $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$

بەرێ خۆبدە نموونە 3 $f(x)=3x^2$ ؛ $g(x)=7-x$ هەر نەخشەیەکێ بهەژمێرە.

8 $f(g(5))$ **9** $g(f(5))$ **10** $f(g(-2))$

بەرێ خۆبدە نموونە 4 $f(x)=x^2$ ؛ $g(x)=2x-3$ ؛ $h(x)=\sqrt{x+1}$ هەر نەخشەیەکێ بهەژمێرە و بواری وێ دیاربکە.

11 $f(g(x))$ **12** $g(f(x))$ **13** $f(h(x))$

بەرێ خۆبدە نموونە 5

14 **ئابووریا بکاربەری** کریکارەکی دقێت ل زانکویێ بخوینیت. کریکار هەیقانە10% ژ داهاتیێ خۆ و سەرباری 50 000 دیناران هەلدگرت (پاشدئێخت)، پۆختەیێ هەیقانە ئەوێ کریکار وەردگریت پشتی داشکاندنا باجێ لسەر وی دبیتە80% ژ مۆچەیی بنەڕەت.

أ نەخشەیەکا ئاوێتە بنقیسە بۆ هەژمارتنا ئەوی پارێ کریکار هەیقانە هەلدگریت پێ مۆچەیێ بنەڕەت g .

ب ئەو پارێ کریکار هەلدگریت [پاشدئێخیت] بهەژمێرە، هەکەر بزانی کو موچەیێ بنەڕەت یێ هەیقانە 2 400 000 دینارن.

ڕاهێنان و شیکارکرنا پرسیاران

ڕاهێنانێن نازاد

بۆ شیکارکرنا بەرێ خۆ بدە	
ڕاهێنانان	نموونە
18-15	1
23-19	2
29-24	3
32-30	4
33	5

$f(x)=2x^2-8$ ؛ $g(x)=x^2+5x+6$ ؛ $h(x)=2x+4$ هەر نەخشەیەکێ بهەژمێرە.

15 $(f+g)(x)$ **16** $(f-g)(x)$ **17** $(f+h)(x)$ **18** $(g-h)(x)$

19 $(fg)(x)$ **20** $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ **21** $\left(\frac{h}{f}\right)(x)$ **22** $(gh)(x)$ **23** $\left(\frac{g}{h}\right)(x)$

$f(x)=2\sqrt{x+3}$ ؛ $g(x)=-3x+1$ هەر نەخشەیەکێ بهەژمێرە.

24 $f(g(1))$ **25** $g(f(1))$ **26** $f(g(4))$

27 $g(f(6))$ **28** $f\left(g\left(\frac{4}{3}\right)\right)$ **29** $g(f(97))$

$f(x)=4x+3$ ؛ $g(x)=\frac{x}{x+3}$ ؛ $h(x)=x^2-2$ هەر نەخشەیەکێ بهەژمێرە و بواری وێ دیاربکە.

30 $f(g(x))$ **31** $g(f(x))$ **32** $f(h(x))$

33 **کار** بڕێ لێچوویێ کاشیکرنا ژۆرەکێ 100 000 دینارن، سەرباری 4000 دینار بۆ هەر یاردەکا دووجا. بزانە کو یاردە یەکەیەکا ئینگلیزییە بۆ پێڤانا درێژاهیێ، و هەر یاردەك دبیتە 3 پێ (پێڤانەکا دی یا ئینگلیزییە و دبیتە 30.48 cm .

أ نەخشەیەکا ئاوێتە بنقیسە بۆ هەژمارکرنا لێچوویێ کاشیکرنا ژۆرەکا ڕووبەرێ وێ x پێیێن دووجا بیت.

ب ڕووبەرێ ژورەکێ ب پێیێن دووجا بژمێرە، بۆ زانین لێچوویێ کاشیکرنا وێ ژورێ گەهشتە 380 000 دیناران.

34 ل دەمێ گەرمکرنا هەوای دناڤ پالۆنەکێدا هەتا 38^{o} ، بو هەر مترەکا سێجای ژ هەوایێ پالۆنێ شیانا هەلگرتنا $50\ ^{o}g$ هەیە.

أ نەخشەیەکێ بۆ بالۆنەکێ بنقیسە، ژمارا وان گرامێن بالۆن دشێت هەلگریت بنوێنت هەکەر xm^{3} هەوایێ گەرم تێدا بیت.

ب چەند مترێن سێجایێن هەوایێ گەرم پێدڤێن بۆ هەلگرتنا مرۆڤەکی بارستەیا وی 75kg بیت؟

ج نەخشەیا $g(x)=\frac{x}{453.6}$ ڕێسایەکە بۆ گوهۆڕینا گرامان بۆ [پاوند کو ئەو یەکەیەکا ئینگلیزییە بۆ پیڤانا بارستەیێ]. نەخشەیەکێ بنقیسە ژمارا وان پاوەندێن بالۆن بشێت هەلگریت بنوێنیت، هەکەر x ژمارا پێێن سێجایێن هەوایێ گەرم دبالۆنێدا بیت:

د ژمارا پێێن سێجایێن هەوایێ گەرم بۆ بلندکرنا 1000 پاوەندان بخەملینە.

35 **ئابووریا بکاربەری:** کۆژینێ دوو پلیتێن کڕینێ هەنە، ئەو دشێت وان پلیتان بکاربینیت بۆ کڕینا پێلاڤان ژ دوکانێن فرۆتنا پێلاڤان. پلیتا ئێکێ داشکاندنا 10 000 دیناران بۆ دابین دکەت، و پلیتا دووێ داشکاندنەکا ب ڕێژەیا 15% دابین دەکەت.

أ نەخشەیا $f(p)$ بنقیسە بۆ دەربرینا وی پارێ کوژین ددەت بۆ کڕینا پێلاڤەکێ بهایێ وێ (p) بیت، هەکەر پلیتا ئێکێ بکاربینت.

ب نەخشەیا $g(p)$ بنقیسە بۆ دەربڕینا وی پارەیێ کوژین ددەت بۆ کرینا پێلاڤەکێ بهایێ وێ (p) بیت، هەکەر پلیتا دووێ بکاربینت.

ج $f(g(p))$ و $g(f(p))$ بهەژمێرە.

د تو ئامۆژگاریا کۆژینێ دکەی، کو کیژ پلیتێ ل جارا ئێکێ بکاربینیت؟ ئەڤێ ڕوونبکە.

هـ کێمترین پارێ کۆژین ددەت بۆ کرینا جوتەکی پێلاڤێن بهایێ وان 49 000 دینار بهەژمێرە.

36 **بیڤەلەرز:** ئەو پێلا [شەپۆل] بیڤەلەرزێ دروستدکەت ب لەزا 9km/s بەلاڤ دبیت. زیانێن گەلەك گەلەك مەزن پەیدادبن ل دەڤەرێن دۆر و بەرێن جهێن بیڤەلەرز لێ ڕوودەدەت:

أ نەخشەیەکێ بنقیسە بۆ هەژمارتنا ڕووبەرێ ئەوێ دەڤەرا بیڤەلەرز کارتێکرنێ لسەر دکەت ب km^{2} پشتی t چرکەیان.

ب زەڤی ناسان خەملاندن کو کارتێکرنا بیڤەلەرزێ دێ بدوومایێك هێت، پشتی ڕووبەرێ دەڤەرا کارتێکرن لسەر هاتیە کرن بگەهتە $35\,000\ km^{2}$. دەمێ ڤەدکێشت چەندە هەتا بیڤەلەرز بدوومایەك بێت.

37 **ئاکنجیبوون:** نەخشەیا $p(t)=160\ 000\times 1.05^{t}$ ڕێسایەکە بۆ دیارکرنا ژمارا ئاکنجییان ل باژێرەکی کو (t) ژمارا سالانە، ل سالا 1980 هاتە ئەنجامدان، و نەخشەیا $d(p)=0.0044\,p$ ژمارا نۆژدارێن ئەڤی باژێری بیت پێ ژمارا ئاکنجییان، و p ژمارا ئاکنجییێن ئەڤی باژێری بیت.

أ نەخشەیەکێ بنقیسە بۆ هەژمارتنا ژمارا نۆژدارین ئەڤی باژێری پێ ژمارا سالان. ژ سالا 1980 .

ب **خەملاندن:** ژمارا نۆژدارین ئەڤی باژێری ل سالا 2010 بخەملینە.

ج کەنگی ژمارا نۆژدارێن ئەڤی باژێری دی ژ 5000 نۆژداران زێدەتر بیت.

38 **هزرکرنەکا ڕەخنەگر:** هەکەر $f(x)=x$ ئەرێ هەموو دەمان نەخشەیا $f(g(x))$ یەکسانە نەخشەیا $g(f(x))$ ؟ ڕوونبکە.

ئەڤان هەردوو نەخشەیێن بەرامبەر بکاربینە بۆ هەژمارتنا هەر بەهایەکی.

x	2	3	4	5
$f(x)$	0	1	2	3

x	1	2	3	4
$g(x)$	1	2	4	8

39 $g(f(5))$ **40** $f(g(3))$ **41** $g(f(4))$ **42** $f(g(2))$

43 **هزرکرنەکا ڕەخنەگر:** ئەرێ تو دشێی ئەڤان هەردوو نەخشەیان بکاربینی بۆ هەژمارتنا $f(g(4))$ ؟ بەرسڤا خۆ ڕوونبکە.

44 **بنقیسە:** ئەرێ سەرجەمێ دوو نەخشەیێن هێلی دبیتە نەخشەیەکا هێلی؟ ئەرێ ئەنجامێ لێکدانا دوو نەخشەیێ هێلی دبیتە نەخشەیەکا هێلی؟ ئەڤێ ڕوونبکە.

دەروازەیەك

لسەر بیڤەلەرزان

بیڤەلەرز پەیدا دبیت ژ ئەنجامێ لڤینا تەخێن ئەردی ل نێزیکی وان جهێن قەلشین تێدا هەبن. و ئەو قەلشین شکاندنێن تیڤلکێ ئەردینە و دکەڤنە د سنووری تەخێن تەکتونیدا.

45 کیژ ئەڤان هەردوو نەخشەیان، $f(x)$ و $g(x)$ ئەڤێ $(f \circ g)(x)=(3x+4)^2$ ساخدکەت.

أ) $f(x)=3x+4$ ؛ $g(x)=x^2$

ب) $f(x)=x^2$ ؛ $g(x)=3x+4$

ج) $f(x)=(3x)^2$ ؛ $g(x)=4^2$

د) $f(x)=3x+4$ ؛ $g(x)=\sqrt{x}$

46 هەکەر $f(x)=2x+1$ و $g(x)=5x-2$، ئەرێ بهایێ $(fg)(5)$ کیژ وانە؟

أ) 253 ب) 53 ج) 47 د) 13

47 کیژ ڤان دبیتە نەخشەیا $(f \circ g)(x)$، هەکەر $f(x)=4-x^2$، $g(x)=\frac{1}{2}x-2$؟

أ) $(f \circ g)(x)=-\frac{1}{2}x^2$

ب) $(f \circ g)(x)=-\frac{1}{4}x^2+2x$

ج) $(f \circ g)(x)=-\frac{1}{2}x^3+2x^2+2x-8$

د) $(f \circ g)(x)=-x^2+\frac{1}{2}x+2$

48 **بتنێ بەرسڤ** $(f+g)(2)$ بهەژمێرە، دەمێ $f(x)=(x+1)^2$ و $g(x)=3x$

بەرهنگاری و بەرفرەهکرن

49 $g(x)$ بهەژمێرە، هەکەر بزانی کو $f(x)=2x-6$ و $f\big(g(x)\big)=3x^2+4$

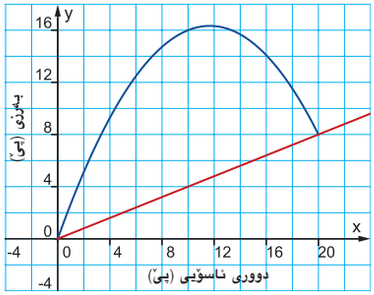
50 $g\big(f(x)\big)$ بهەژمێرە، دەمێ $f(x)=3x+8$ و $g(x)=\begin{cases}x^2 & x<0\\ 5x+2 & x\geq 0\end{cases}$

51 **فیزیا** ئەڤ نەخشەیا $y=-0.12x^2+2.8x$ دبیتە ریّسایەك بۆ هەژمارتنا بلندا هیا تەپا پێ (y) ئەوا هاتیە لێدان بۆ ئاراستەیا گری، ل دووڤ دووریا وی یا ئاسوویێ x ژ خالا لێدانێ. هەروەسا نەخشەیا $y=\frac{2}{5}x$ دبیتە ریّسایەك بۆ هەژمارتنا بلندا هیا خالەکێ لسەر گری پێ دووراتیا وێ ژ خالا لێدانا تەپێ.

أ بلندا هی ژ ئاستێ خالا لێدانێ بۆ بلندترین خالا تەپە بگەهیتێ بهەژمێرە.

ب بلندا هی ژ ئاستێ خالا لێدانێ بۆ خالا کەفتنا تەپێ لسەر ئەردێ گری بهەژمێرە.

بەرزی لە زەویەوە



پێداچوونا لولپێچی

52 **کار** بهایێ بژمێرەکێ کو بهایێ وی 2 500 000 دینار ب ریژەیا 20% سالانە کێم دبیت. (وانەیا 4-1)

أ نەخشەیەکێ بۆ هەژمارتنا بهایێ بژمێرێ پشتی t سالّ بنڤیسە.

ب پشتی 10 سالان بهایێ بژمێرێ دێ بیتە چەند؟

ریّسایەکێ بۆ هەر نەخشەیەکێ بنڤیسە، هەکەر بزانی $f(x)=\begin{cases}8x & x\geq 0\\ x-9 & x<0\end{cases}$ (وانەیا 5-2)

53 $g(x)$ ئەو نەخشەیە ئەوا پەیدابووی ژ جهگوهۆڕکا نەخشەیا $f(x)$ ب راکێشانا 5 یەکان بۆ لایێ چەپێ.

54 $h(x)$ ئەو نەخشەیە ئەوا پەیدابووی ژ جهگوهۆڕکا نەخشەیا $f(x)$ ب فرەهبوونا ستوونی ب هاوکولکەیێ 3 .

4–5 نموونەیێن بیرکاری

Mathematical Models

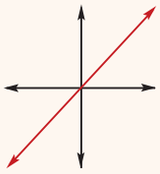
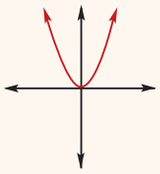
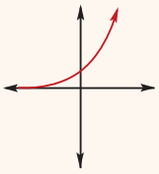
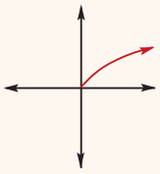
ئارمانج

نموونەیێن بیرکاری بۆ نواندنا ژیانا رۆژانە وەك نەخشە بکاردئینن. نموونەیێن بیرکاری بۆ بجهئینانا پێشبینیان بکاردئینن.

کی ئەقێ بکاردئینیت؟

تو دشێی نموونەیێن بیرکاری بۆ شلۆڤەکرن و پێشبینیکرنا ژمارا وان ئامیرێن پارەی پێ ددەن کو کار پێ دهێتە کرن بکاربینی. (نموونە 3)

گەلەك ژ ئەوان پێدایێن لسەر بارێن ژیانا رۆژانە دهێنە خرۆڤەکرن، شێوەیەکی پێکدئینن تو دکاری بکارئینانا نەخشەیەکێ ژ وان نەخشەیێن تە خواندێ بنوێنی، و ل وی دەمی تو دشێی ئەڤان نەخشەیان بۆ شلۆڤەکرن و دارشتنا پێشبینیان بکاربینی. هندەك ژ وان نەخشەیان یێن بنەڕەتینە تە یێن خواندین و ل بیرا خو بینە.

نەخشەیێن بنەڕەت				
جۆر	هێلی	دووجای	توانی	ڕەگی
هاوکێشە	$f(x)=x$	$f(x)=x^2$	$f(x)=b^x, b>0$	$f(x)=\sqrt{x}$
وێنەیێ رووونکرنێ				
نەگۆرێ جیاوازییان یان ڕێژەیان	نەگۆرێ جیاوازیێن ئێکێ بۆ بهایێن y کو دگرێداینە دگەل بهایێن x ل ئێك دووریێ د یەکسانن	نەگۆرێ جیاوازیێن دووێ بۆ بهایێن y کو دگەل بهایێن x دگرێداینە ل ئێك دووریێ دیەکسانن	نەگۆرێ ڕێژەیا بهایێن y کو دگەل بهایێن x دگرێداینە ل ئێك دووریێ د یەکسانن	نەگۆرێ جیاوازیێن دووی بۆ بهایێن x کو دگەل بهایێن y دگریداینە ل ئێك دووریێ د یەکسانن

فێربە و شرۆڤەبکە

هاریکاری

چونکی نەخشەیا ڕەگێ دووجای نەخشەیەکا هەلگەراوە بۆ نەخشەیا دووجای لەورا بەهایێ x و بهایێ y ئالوگۆڕ دبن.

نموونـــــە 1 دیارکرنا نموونەیان بکارئینان نەگۆڕێ جیاوازییان یان ڕێژەیان

نەگۆرێ جیاوازییان یان یێ ڕێژەیان بکاربینە بۆ دیارکرنا نەخشەیا بنەڕەت یا گونجای بۆ نواندنا ئەڤێ کۆمەلا پێداییان.

أ دریژیا سپرینگی یا پشت بستە ب بارستەیا وی تەنێ پێڤە گرێدای.

بارستا (kg)	4	5	6	7	8	9	10
دریژی (cm)	30.6	32	33.4	34.8	36.2	37.6	39

بەرێ خو بدێ کو جیاوازی ل ناڤبەرا بهایێن هەردوو بارستەیێن هاوسێ یا نەگۆرە.

ساخبکە ئەرێ جیاوازی ل ناڤبەرا هەردوو بهایێن هاوسێ بۆ دریژیێ یا نەگۆرە.

دریژی (cm)	30.6	32	33.4	34.8	36.2	37.6	39
جیاوازیێن ئێکێ	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	

چونکی جیاوازیێن ئێکێ یا نەگۆرە، لەورا نەخشەیا هێلی کونجایترە بۆ نواندنا پێدایێن خشتەیی.

ب ژیێ داریێ ب تیرەیێ وێ دیاردبیت.

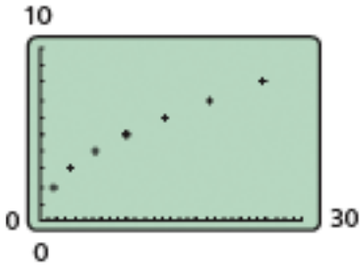
تیرە (cm)	1.6	3.6	6.4	10.0	14.4	19.6	25.6
ژی (سال)	2	3	4	5	6	7	8

بەرێ خو بدە جیاوازیێ لناڤبەرا هەردوو بهایێن هاوسێ د خشتەی دا بۆ ژی یانەگۆرە.
ساخبکە ئەرێ جیاوازی لناڤبەرا هەردوو بهایێن هاوسێ بۆ تیرەی یا نەگۆرە؟

تیرە (cm)	1.6	3.6	6.4	10.0	14.4	19.6	25.6

جیاوازیێن ئێکێ 2.0 2.8 3.6 4.4 5.2 6.0

جیاوازیێن دووێ 0.8 0.8 0.8 0.8 0.8



چونکی جیاوازیێن دووێ بۆ گۆڕاوێ ئازاد x د نەگۆڕن بۆ وان بهایێن دگەل y گرێداین ل ئێك دووریێ.

لەورا نەخشەیا رەگی دووجای گونجاترین نموونەیە بۆ نواندنا ڤان پێدایییان، ساخکرنا خالێن خشتەیێ ئەوێ دیاردکەت کو گونجایترین نەخشە $f(x)=\sqrt{x}$.

ج قەبارەیێ بڕیێ ئاڤا مایی پشتی هەلمبوونا وێ دیاردکەت.

دەم (دەمژمێر)	1	2	3	4	5	6
قەبارە (mL)	512	384	288	216	162	121.5

چونکی جیاوازی لناڤبەرا هەردوو بهایێن هاوسێ بۆدەمی دخشتەی دا یانەگۆرە، تو ئەوێ ساخبکە کو جیاوازی لناڤبەرا هەردوو بهایێن هاوسێ بۆ قەبارەی یا نەگۆرە.

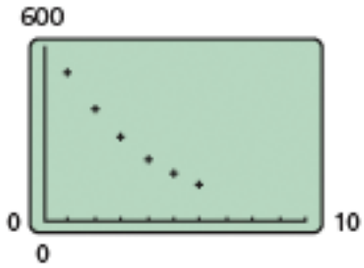
قەبارە (mL)	512	384	288	216	162	121.5

جیاوازیێن ئێکێ −128 −96 −72 −54 −40.5

جیاوازیێن دووێ 32 24 18 13.5

جیاوازیێن ئێکێ نەیین نەگۆرن، هەروەسا جیاوازیێن دووی.
ساخبکە ئەرێ هەر بهایەکی قەبارەی بۆ بهایێ پێش خو یی نەگۆرە یان نە.

$\frac{384}{512}=0.75$ $\frac{288}{384}=0.75$ $\frac{216}{288}=0.75$ $\frac{162}{216}=0.75$ $\frac{121.5}{162}=0.75$



چونکی رێژەیا هەر بهایەکی قەبارەی بۆ بهایێ لپێش وی یا نەگۆرە، لەورا نەخشەیا توانی گونجایترین نموونەیە بۆ نواندنا پێدایێن خشتەی.

ساخبکە: ژ ئەڤان خالێن ڕوونکرنێ ئەوێن پێدایێن خشتەی دنوێنن یا دیارە کو نەخشەیا توانی یا نزمبوونا توانی گونجایترین نواندنە بۆ ڤان پێدایییان.

خالا چاڤدێریێ

1. نەگۆری جیاوازییان یان ڕێژەیان بکاربینە بۆ دیارکرنا نەخشەیا بنەڕەت یا گونجای بۆ نواندنا پێدایێن کۆمەڵێ.

أ

x	12	48	108	192	300
y	10	20	30	40	50

ب

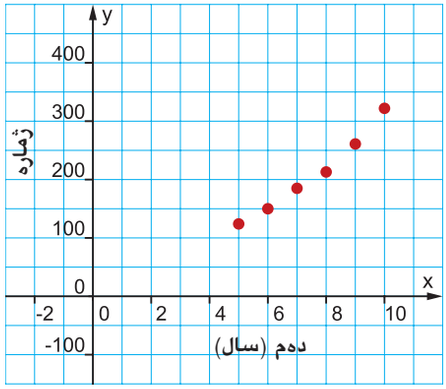
x	21	22	23	24
y	243	324	432	576

گەلەك یا كێمە كو جیاوازی لناڤبەرا پێدایێن ڕاستی یان ڕێژە ل ناڤبەرا وان یا نەگۆڕبیت ب زمانی بیركاریێ. لێ تو دشێی وان جیاوازییان یان ڕێژەیان شلۆڤەبكەی دا بزانی ئەرێ ئەڤ جیاوازییە یان ڕێژەیە یا نێزیكە ببیتە نەگۆڕ. هەروەسا تو دشێی وان پێدایێن راستی ب خالێن روونكرنێ بنوێنی، و جۆرێ نەخشەیا گونجای بۆ نواندنا وان بنیاسی، پاشی فەرمانا لێڕبوونێ Regression ل بژمێرا روونكرنێ بكاربینە بۆ هەژمارتنا ئەوێ نەخشەیا پێدایيان ب باشترین شێوە دنوێنت.

نموونـــــه 2 بجهێنان لسەر پاراستنا ڕەگەزی:

ئێك ژ زانایێن بواری ئاژەلی، پێدایی لسەر پەرەپێدانا ژمارەیەكا گامێشێن بۆ خالو كۆمكرن ل گەل گامێشەكێ د كیلەگەیەكێ سروشتی دا بەرەلاكربوون. نەخشەیەكێ بنڤیسە ئەڤێ كۆمەلا پێدایيان بنوێنت.

دەم (سال)	5	6	7	8	9	10
ژمارە	124	150	185	213	261	322



پێنگاڤا (1)ێ: خالێن روونكرنێ بۆ پێدایێن خشتەی بنوێنە. خالێن روونكرنێ دیاردكەن كو شێوەیەكی دووجای یان شێوەیەكی توانی هەیە.

پێنگاڤا (2)ێ: جیاوازیان دیاربكە.

ژمارە	322	261	213	185	150	124
جیاوازیێن ئێكێ	61	48	28	35	26	
جیاوازیێن دووێ	13	20	−7	9		

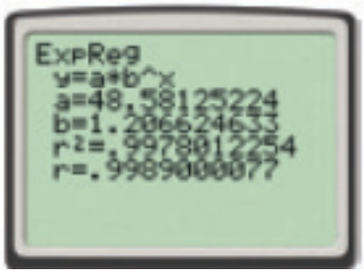
وەسا یا دیارە نە جیاوازیێن ئێكێ و نە جیاوازیێن دووی یا نەگۆڕە.

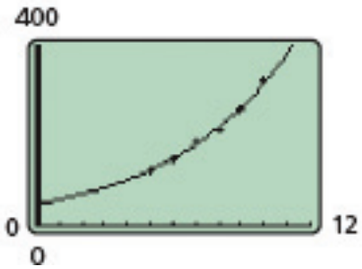
پێنگاڤا (3)ێ: ڕێژەیان دیاربكە.

$$\frac{322}{261}=1.234 \qquad \frac{261}{213}=1.225 \qquad \frac{213}{185}=1.151 \qquad \frac{185}{150}=1.233 \qquad \frac{150}{124}=1.210$$

هەر ڕێژەیەك یا نێزیكە بۆ 1.2 . ئەڤە مەهاندەت ل نموونەیەكا توانی بگەریێن.

پێنگاڤا (4)ێ: بژمێرا روونكرنێ بكاربینە بۆ دیاركرنا نموونەیا توانی.





نەخشەیا توانی $f(x)=48.581(1.207^x)$ ڕێسایەكا بۆ پێدایێن خشتەی.

2. نەخشەیەكێ بنڤیسە بۆ نواندنا پێدایێن خشتەیێ ل خوارێ.

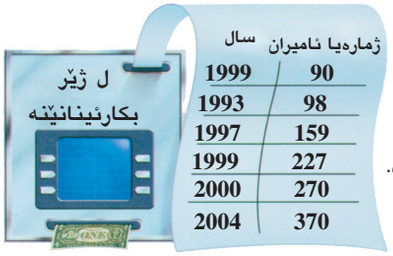
x	12	14	16	18	20	22	24
y	110	141	176	215	258	305	356

هاریكاری

بۆ دیاركرنا هاوكولكەیێ پەیوەست لسەر شاشێ دوگمەیا CATALOG 2nd كلیك بكە پاشی پاشی 0 هەلبژێرە Diagnostic On.

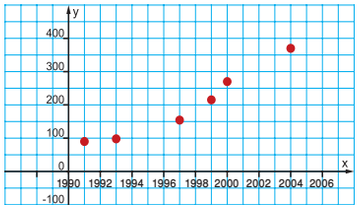
دەمێ پێدای نە درێزکری بن یان جیاوازی ل ناڤبەرا وان نەیا نەگۆڕبیت، دڤێت چەند نموونەیەکان تاقیبکەی بۆ دیارکرنا ئەوا باشتر بۆ نواندنا پێداییان. ل بژمێرا روونکرنێ بهایەك دیاردبیت دبێژنێ هاوکۆلکەیێ دیارکرنێ (معامل التحديد) ب r^2 یان R^2 دهێتە هێماکرن، هەر چەند ئەو هاوکۆلکە بۆ (1) نێزیك بیت، دێ نموونە بیتە باشترین نواندن بۆ کۆمەلا پێداییان.

نموونـــــە 3 بجهێنان لسەر کردارێن بانکێ

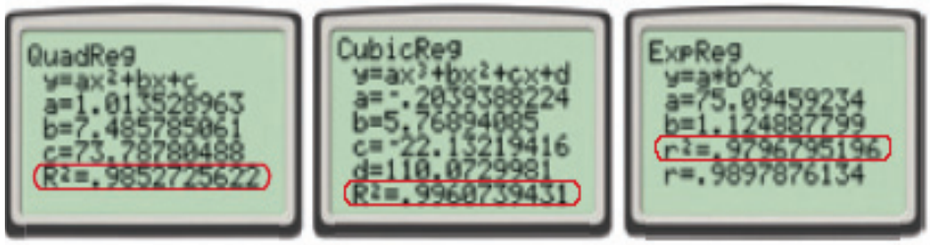


سال	ژمارەیا ئامیران
1999	90
1993	98
1997	159
1999	227
2000	270
2004	370

ل پێداییان بەرامبەر ژمارەیێن ئامیرێن پارە پێدانێ (صراف الالی) ل وەلاتەکی سال ل دووڤ سالێ دیاردکەت. نەخشەیەکێ بنڤیسە بۆ نواندنا پێداییێن کۆمەلّێ و سالا 1999 سالا سفرێ بیت.



چونکی جیاوازیێن لناڤبەرا بهایێن گۆڕاوێ ئازاد نەیا نەگۆرە، و هەروەسا جیاوازیێن بهایێن گۆراوێ پەیوەست نەیا نەگۆرە، ڤێجا تو نەشێی لێکۆلینێ لسەر جیاوازیان بکەی. خالێن روونکرنێ بۆ نواندنا پێداییان دروستبکە پشت بەستن ب سالا سفرێ 1990 . ژ خالێن روونکرنێ دیاردبیت کو ئەو شێوەیەکی دووجاییە یان سێجاییە یان توانییە، بژمێرا ڕوونکرنێ بکاربینە بۆ لدووڤ گەریانا هەر جۆرەکی.



بەراوردیێ بکە لناڤبەرا بهایێن r^2. یا دیارە کو نموونەیا سێجای باشترین نواندنا. تو دشێی ڤێ نەخشەیێ بکاربینی. $f(x)=0.2x^3+5.44x^2-22.13x+110.07$

ئەڤە نموونەیەکە بۆ دیارکرنا ژمارەیا ئامیران پێ سالان پشتی سالا 1990.

خالا چاڤدێریێ

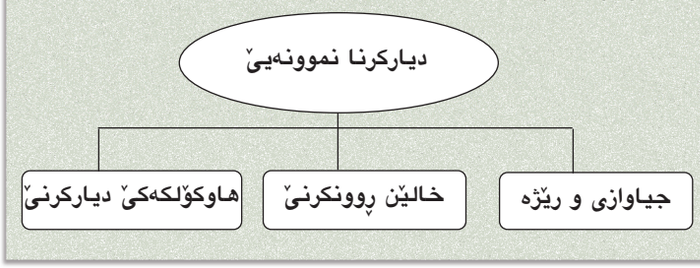
3. ئەوێ نەخشەیا پێداییێن ل خوارێ دنوێنیت بنڤیسە.

x	11	14	25	31	40	50
y	245	302	480	557	645	705

هزربکە و گەنگەشێ بکە

1. بۆچی بکارئینانا جیاوازییان و ڕێژەیان ل دەمێ بکارکرنا پێداییێن راستی دڤێت یا سنووردار بیت.
2. ڕێکخەربە ئەڤێ خشتەیێ ل خوارێ دووبارە بنڤیسە و تەمامبکە. ڕوونبکە چەوا هەر ڕێیەك هاریکاریێ دکەت بۆ دیارکرنا نموونەیا گونجای بۆ نواندنا پێداییان.

فێربە و بجەربکە



4–5 ڕاهێنان

ڕاهێنانێن ئاراستەکری

بەرێ خۆبدە نموونە 1

جیاوازیان و ڕێژەیان بکاربینە بۆ دیارکرنا ئەوێ نەخشەیا بنەڕەت کۆ ببیتە باشترین نموونە بۆ نواندنا پێدایی.

1

x	y
6	69.6
13	51.4
20	33.2
27	15
34	−3.2
41	−21.4

2

x	y
11	2
47	6
99	10
167	14
251	18
351	22

3

x	y
0	125
1	150
2	180
3	216
4	259.2
5	311.04

بەرێ خۆبدە نموونە 2

4 خشتەیێ ل خوارێ بڕێ مایی ژ ماددەیا ئایۆدین – 131 ب گرامان پشتی t ڕۆژان ژ دەستپێکا تاقیکرنێ دیاردکەت.

دەم t ب ڕۆژان	0	1	2	3	4	5	6
بڕ m ب گرامان	1000	917.40	841.62	772.10	708.33	649.82	596.14

أ نەخشەیەکێ بنقیسە کۆ پێدایێن خشتەی بنوێنیت.

ب نەخشەیێ بکاربینە بۆ دیارکرنا ئەوان ڕۆژین مایین دا بڕی ئایۆدین – 131 ئەوێ مای ببیتە کێمتر ژ 50 g.

بەرێ خۆبدە نموونە 3

5 خشتەیێ ل خوارێ ژمارا پایسکلان ل جهێ فرۆتنا پایسکلان ل بیست و چار مەهێن بۆری دیاردکەت.

دەم t ب مەهان	0	4	9	12	15	20	24
ژمارە	62	54	45	48	55	53	60

أ نەخشەیەکێ بنقیسە کۆ پێدایێن نەخشەیێ بنوێنت.

ب نەخشێ بکاربینە بۆ دیارکرنا هەژمارا پایسکلان د هەیڤا شەشێدا.

ج ئەرێ دێ ئاموژگاریا ڕێڤەبەرێ دوکانێ کەی کۆ پشت بەست بیت ب ئەڤێ نەخشەیێ بۆ پیشبینیکرنا ژمارا پایسکلان دناڤ دوکانا وی دا پشتی سالەکێ ژ نوکە و ویڤە؟ روون بکە.

ڕاهێنان و شیکارکرنا پرسیاران

جیاوازیان یان ڕێژەیان بکاربینە بۆ دەرئینانا نەخشەیا بنەڕەت کۆ ببیتە باشترین نموونە بۆ نواندنا پێدایی.

ڕاهێنانێن ئازاد

بۆ شیکارکرنا بەرێ خۆ بدە ڕاهێنانان نموونە

1	8-6
2	9
3	10

6

x	y
1	380
3	343
5	310
7	279
9	252
11	228

7

x	y
2	97
8	202
14	253
20	250
26	193
32	82

8

x	y
4	4
9	6
16	8
25	10
36	12

9 **کشتوکاڵ** جوتیارەکی تاقیکرنەك ئەنجام دا لسەر بڕێ ئەوێ پەینا پێدڤی بۆ هەر دونەمەکا زەڤیێ، بۆ دەستڤەئینانا باشترین بەرهەم. بۆ ڤێ مەبەستێ چەند پارچەیێن زەڤیێ بکارئینان. و ئەنجامێن تاقیکرنێ ل خشتەیێ ل خوارێ تومارکرن. نەخشەیەکێ بنڤیسە بۆ نواندنا پێدایێن خشتەیێ.

بڕێ پەینێ بۆ ئێك دونەمێ (kg)	45	70	90	115	125	135	150
بڕێ بەرهەمی یێ ئێك دۆنەمێ	29	60	70	88	84	86	76

10 **زیندەزانی** ئەڤ خشتەیێ لخوارێ ژمارەیا خەملاندی بۆ جۆرەکی بەکتریا (إبریشیا کولی) د ئامانەکا تاقیکرنێ دا دیاردکەت پشتی t خولەکان ژ دەستپێکا تاقیکرنێ.

دەم t ب خولەکان	0	10	20	30	40	50	60
ژمارەیا بەکتریان	300	423	596	842	1188	1686	2354

أ رێسایەکێ بنڤیسە کو ژمارا بەکتریان ل دویڤ دەمی بنوێنت، و باشترین نواندن بیت.

ب ئەوێ رێسایێ بکاربینە بۆ دەرئینانا ژمارەیا بەکتریان پشتی 3 دەمژمێران.

ج چەند دەم یێ پێتڤیە کۆ ژمارەیا بەکتریان ببیتە 3 جارانی ژمارەیا بەکتریان ل دەستپێکێ.

11 **ئەرد و خانی** (عەقار) ئەڤ خشتەیێ لخوارێ بهایێ چەند خانیێن هاتینە فروتن دیاردکەت پێ رووبەرێن وان.

رووبەر (m^2)	248	109	125	138	136.75	172.5	169.9	227	276
بها (مەلیون دینار)	179	125.9	136.75	138	172.5	169.9	187		

أ رێسایەکێ دیاربکە بۆ هەژمارکرنا بهایێ خانیەکێ پێ رووبەرێ وی، رووبەرێ وەك گۆڕاوێ ئازاد بکاربینە.

ب ئەڤێ نەخشەیێ بکاربینە بۆ دەرئینانا رووبەرێ نێزیککری بۆ خانیەکی بهایێ وێ 175 مەلیون دینار بیت.

ج ئەرێ تۆ باوەر دکەی کو بەرسڤاتە بۆ پرسیارا (ب) یا هویر بیت؟ ئەوێ چەندێ ڕوونبکە.

12 **ئابووری** زانایەکی ئابووری لێکولینەك لسەر ناڤەندێ کرێیا روژانە کر بۆ چەند کەسان ژ جورەکێ کرێکاران د کەرتێ تایبەتدا پێ ژیێ وان، و ئەڤ پێدایانە نڤیسین.

ژی (ساڵ)	18	28	38	48	58	68
ناڤەندێ کرێ (دینار)	17 480	30 650	37 440	41 230	37 570	21 390

أ نموونەیەکا گونجای دیاربکە بۆ نواندنا پێدایێن خشتەیێ.

ب نموونەیێ بکاربینە بۆ هەژمارتنا ناڤەندێ کرێیا ڕۆژانە بۆ کرێکارەکی ژ ئەڤی جۆری، ژییێ وی 43 ساڵ بیت.

13 **تەندروستی** ئەڤ خشتەیێ ل خوارێ. ژییێ ئافرەتان د کۆمەڵگەهەکێدا دیاردکەت دەمێ زاروکێ ئێکێ دبن.

ساڵ	1980	1985	1990	1995	2000
ناڤەندێ ژییێ ئافرەتێ دەمێ زاروکێ ئێکێ دبیت	22.7	23.7	24.2	24.5	24.9

أ ساڵا 1980 ساڵا سفرێ دانە، و بژمێرا ڕوونکرنێ بکاربینە بۆ دیارکرنا نموونەیەکا دووجای و ئێکا دی یا سێجایی بۆ نواندنا پێدایێن خشتەیێ.

ب هەردوو نموونەیان بکاربینە بۆ خەملاندنا ژییێ زاروکبوونا ئێکێ لنك ئافرەتێ د ڤی کۆمەڵگەهێدا ل ساڵا 2010 .

ج تو دبینی کیژ خەملاندن نێزیکترە بۆ ڕاستیێ؟ وێ چەندێ ڕوونبکە.

دەروازەیەك

لسەر مێژوویا بیرکاری

زانایێ بیرکاریێ فرەنسی لۆجندەر Legendre (1752 – 1833)ل ساڵا 1806 ڕێرەوێ کلکدارەکێ دیت، ب ڕێیا وێنەکێشانا چەماوەیەکی د نێزیکترین جهێن دشیاندا ببۆریت کو ئەو هندەك جهێن کلکدار تێدا دبینیت.

14 ئەڤ خشتەیێ ل خوارێ قەبارێ هەوایێ گەرم v د پڤدانکەکێدا پێ پلەیێن گەرماتیێ t دیار دکەت.

پلەیا گەرمیّ	37	41	44	47
قەبارە (m^3)	850	934	1027	1130

أ نەخشەیەکا توانی بۆ نواندنا پێدایێن خشتەیێ دیاربکە.

ب ئەوێ نەخشەیێ بۆ دیارکرنا قەبارەیێ هەوایێ گەرم دپڤدانکێدا بکاربینە، هەکەر پلەیا گەرماتیا بڕی هەوایی $42^{\circ}C$ بیت.

ج ئەرێ ئەو نەخشەیە دێ یا گونجای بیت هەکەر پلەیا گەرماتیێ زێدەتر بیت ژ 47؟ وێ چەندێ ڕوونبکە.

15 **کشتوکال** ئەڤ خشتەیێ لخوارێ ژمارەیا کێلگەیان ل وەلاتێن مەزن و ناڤەندێ ڕووبەرێ هاتیە چاندن د چەرخێ بیستێدا دیاردکەت

سال	1910	1930	1950	1969	1987	1997
ژمارەیا کیلگەیان	6.4	6.3	5.4	2.7	2.1	1.9
ناڤەندێ ڕووبەری (دۆنەم)	139	157	216	390	462	487

أ ژمارەیا کێلگەیان وەك گۆڕاوێ ئازاد بکاربینە بۆ دیارکرنا نەخشەیەکێ بۆ ناڤەندێ ڕووبەرێ کێلگەیی.

ب ئەوێ نەخشەیێ بکاربینە بۆ خەملاندنا ناڤەندێ ڕووبەرێ کێلگەیی هەکەر ژمارا کێلگەیان 1 ملیۆن بیت.

ج ئەڤێ نەخشەیێ بکاربینە بۆ خەملاندنا ناڤەندێ ڕووبەرێ کێلگەیی هەکەر ژمارا کێلگەیان ببیتە 4.5 ملیۆن.

16 **بازارێ پارەی** کۆمپانیا هەلۆ یا پیشەسازی ل سالا 1990 هاتە دامەزراندن. ئەڤ خشتەیێ ل خوارێ چەند بهایێن پشکەکێ (سهم) دیاردکەت د ڤێ کۆمپانییدا.

سالّ	1991	1994	1997	2000	2003
بهایێ پشکەکێ (ب دیناری)	79 410	96 410	107 260	132 440	151 190

أ خشتەیەکێ بۆ نواندنا پێدایێن خشتەیێ دیاربکە.

ب ڕێژەیا سەدی چەندە بۆ بلندبوونا بهایێ پشکەکا کۆمپانیا هەلۆ د سالّەکێدا؟

ج هەکەر بهایێ پشکەکا کۆمپانیا هەلو 520 155 دینار بوو ل سالا 2004. ئەرێ ئەڤ بهایە دگونجیت ل گەل ئەوی بهایێ نەخشە دیاردکەت؟ ئەڤێ ڕوونبکە.

د نەخشەی بکاربینە بۆ خەملاندنا ئەوێ سالا بهایێ پشکەکا کۆمپانیا هەلۆ بگەهیتە 200 000 دیناران.

هـ ژبەر گرفبوونێ (تضخم)، ئەوی بهایێ وێ دینارەك ل سالا 1991 ێ بلندبوو بۆ 1.34 دینار ل سالّ 2003 . بەراوردیێ ل ناڤبەرا بلندبوونا بهایێ پشکەکا کومپانیا هەلۆ و ڕێژەیا گرفبوونێ بکە.

17 **زیندەزانی** ئەڤ خشتەیێ لخوارێ ژمارەیا جورێن خشوکان دیاردکەت د چەند گزیرتێن کاریبیدا و ڕووبەرێن وان گزیرتان ب میلێن دووجاینە.

ژمارە	11	16	53	45	108	100
ڕووبەر	5	32	3 435	4 244	29 371	44 218

أ نەخشەیەکێ بۆ نواندنا پێدایێن خشتەیێ دیاربکە، پشتی ئەو ژمارە ب گۆڕاوەکی ئازاد بێتە دانان.

ب ئەوێ نەخشەی بکاربینە بۆ خەملاندنا ڕووبەرێ گزیرتەکێ کۆ 75 جۆرێن خشوکان تێدانە.

ج هویریا خەملاندنا تە ل لقێ (ب) چەوا دبینی؟ ئەڤێ ڕوونبکە.

18 **هزرکرنا ڕەخنەگر:** هندەك جاران وەسا دیار دبیت کو نەخشەیا دووجای باشترە ژ نەخشەیا هێلی بۆ پێدایین. تۆ چ دبێژی دەربارەی هاوکولکەیێ a د نەخشەیا دووجای دا؟

19 **بنڤیسە:** وەسا دانە کو تە ڕێسایەکا گونجای یا دیارکری بۆ نواندنا پێدایێن هەردوو گۆڕاوان. ئەرێ تو گەهشتیە ئەوێ ئەنجامێ کو ئەڤێ پەیوەندیێ هۆکارەکی باش هەیە لناڤبەرا هەردوو گۆڕاوان؟ پشتگیریا بەرسڤا خۆ ب نموونەیەکێ بکە.

ئامادەکرن بۆ ئەزموونێ

20 کیژ ئەڤێن ل خوارێ لسەر پێدایێن خشتەیێ بەرامبەر دهێتە بجهئینان؟

x	y
3	2
4	23
5	50
6	93
7	122
8	167

(أ) جیاوازیێن ئێکێ بۆ گۆڕاوێ پەیوەست یا نەگۆرە.

(ب) جیاوازیێن دووێ بۆ گۆڕاوێ پەیوەست یا نەگۆرە.

(ج) ڕێژەیا بهایێن گۆڕاوێ پەیوەست یا نەگۆرە.

(د) ڕێژەیا بهایێن گۆڕاوێ پەیوەست یا نەگۆرە.

21 بەهایێ (n) چەندە کو ڕێ ددەت بۆ نواندنا پێدایێن خشتەیێ بەرامبەر ب ڕێسایەکا توانی یا هویر بیت؟

x	5	6	7
y	16	28	n

(أ) 40 (ج) 45

(ب) 49 (د) 52

22 بەهایێ (n) چەندە کو ڕێ ددەت بۆ نواندنا پێدایێن خشتەیێ بەرامبەر ب ڕێسایەکا توانی یا هویر بیت؟

x	5	6	7	8
y	12	32	58	n

(أ) 60 (ج) 80

(ب) 70 (د) 90

بەرهنگاری و بەرفرەهکرن

23 نەخشەیا $p(t)=\frac{a}{1+be^{-kt}}$ دبێژنێ نەخشەیا بازاری [دالة السوق] ل وان بارێن خوارن و ڕووبەرێ ئەردی تێدا دبنە ڕێگر بەرامبەر وەرارکرنا کومەلێ، تو دشێی نەخشەیا $F(t)=\frac{4000}{1+5.7e^{-0.2t}}$ بکاربینی بۆ دیارکرنا ژمارا ماسییان د کێلگەیەکی خودانکرنا ماسییاندا پێ ژمارا وان هەیڤێن بۆرین لسەر چاندنا هێکێن ماسییان، دەمێ t ژمارا هەیڤان بیت.

أ ژمارا ماسییان دناڤ کێلگەی دا بخەملینە پشتی 10 هەیڤان ژ چاندنا هێکان.

ب دا ژمارا ماسییان بگەهتە 3000 ماسییان، چەند هەیڤ بسەرڤە دچن؟

ج پترترین ژمارا ماسییان دکێلگەی دا بهەژمیرە، هەکەر ئەو نەخشە یا گونجای بیت بۆ بکارئینانێ.

24 **بژمێرا ڕوونکرنێ:** تو دشێی جۆرەکی ژ شێوەیێن لێژبوونێ دیاربکەی بکارئینانا بژمێرا ڕوونکرنێ. دبێژنێ لیژبوونا هێزێ. فرمانا Power Regression دبژمێرا ڕوونکرنێ دا بکاربینە بۆ دیارکرنا نموونەیەکا هێزێ کو پێدایێن خشتەیی بەرامبەر بنوینت.

x	1	24	41	74
y	1	4.9	6.4	8.6

پێداچوونا لووپێچی

هەر سیستەمەکی ژڤان لاسەنگەیان ب وێنەیێ ڕوونکرنێ بنوێنە. (وانەیا 2–3)

25 $\begin{cases} y \geq 3x+1 \\ y \leq x-3 \end{cases}$ **26** $\begin{cases} y \geq x-8 \\ y \leq -\frac{4}{3}x+\frac{1}{3} \end{cases}$ **27** $\begin{cases} y \leq 5x \\ y \geq x+2 \end{cases}$

28 **کار** نەخشەیا $p(x)=-x^3+12x^2-12x-80$ ڕێسایەکە بکاردهێت بۆ هەژمارکرنا قازانجێ کۆمپانیەکێ ب مەلیونێن دیناران، پێ ژمارەیا یەکێن هاتینە بەرهەمدان x. (پۆلێن پێشتر)

أ سفرێن ئەڤێ نەخشەیێ بهەژمێرە.

ب کیژ ڤان سفرێن نەخشەیێ ژمارا یەکەیێن بەرهەمی دنوێنیت، کو وەسا ل کۆمپانیێ دکەت ژ زەرەرمەندیێ بۆ قازانجی بچیت.

ئاوێتەکرنا نەخشەیان بکاربینە دا بڕیارێ بدەی کا ئەڤ نەخشەیە g نەخشەیەکا (بەرۆڤاژییە) بۆ نەخشەیا f. (وانەیا 4–5)

29 $f(x)=x^2+1$ ؛ $g(x)=\sqrt{x}+1$ **30** $f(x)=-4+5x$ ؛ $g(x)=\frac{1}{5}x+\frac{4}{5}$

بەشی 5

ڕێبەرێ خواندنێ: پێداچوون

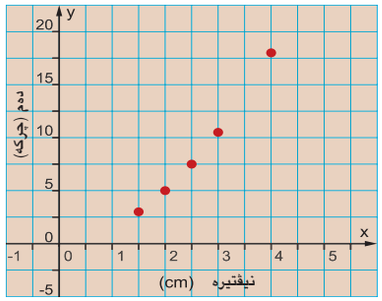
1 سەروکێ باژێرڤانیەکێ گرنگی ب پاقژکرنا جادەیێن باژێری دا پشتی بارینا بەفرەکێ. ئەڤ خشتەیە لێچوێێ پاقژکرنا ڕووبەرێن جیاواز ژ جادەیێن باژێری دیاردکەت، وێنەیەکی ڕوونکرنێ بکاربینە و هاوکێشەیەکێ بنڤیسە بۆ هەژمارکرنا لێچوێێ پاقژکرنا جادەکێ ب درێژاهیا 2400 m .

درێژاهیا جادێ ب متران	لێچۆ ب دیناران
300	6950
600	8900
900	10 850
1200	12 800

2 یانەیا ڕەوشەنبیریا سلێمانیێ پلانەکێ دێ داریژیت بۆ گێرانا ئاهەنگەکا ڕێزگرتنێ بۆ دانەرێن وێ. ڕێکخەرێ ئاهەنگێ بریاردا کۆ 4 سێنیکان بۆ مێهڤانان پێشکێش بکەت هەر ئێك ژ وان 30 پارچەیێن شرینیێ تێدا بن، پشتی ئەڤێ 4 پارچێن شرینیێ زێدەبکەن. خشتەیەکێ دروستبکە و وێنەیێ ڕوونکرنێ بکێشە و هاوکێشەیەکێ بۆ نواندنا ئەڤێ بارێ بنڤیسە، ژمارا میهڤانان وەك گۆڕاوێ ئازاد دانە.

3 ئەڤ خالێن ڕوونکرنێ پێدایێن دەمێ پێدڤی بۆ داگرتنا ژمارەیەکا پاکیتێن لوولەکی پی نیڤتیرەیێ بنکەیێ وان دنوێنیت.

دەمێ داگرتنا پاکێتان



أ خشتەیەکی دروستبکە و هاوکێشەیەکێ بۆ نواندنا پێداییان بنڤیسە.

ب ئەوێ هاوکێشێ بۆ خەملاندنا دەمێ پێدڤی بۆ داگرتنا پاکیتەکێ نیڤتیرەیێ بنکەیێ وێ $12cm$ بیت بکاربینە.

4 بهایێ نەخشەیا $f(x)=\begin{cases}5x+2 & x\le 1\\ x^2-6 & x>1\end{cases}$ بهەژمێرە.
دەمێ $x=-2$ و $x=5$

5 وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ نەخشەیێ بهەژمێرە.

$$f(x)=\begin{cases}2x+4 & x<-2\\ -3x+2 & x\ge -2\end{cases}$$

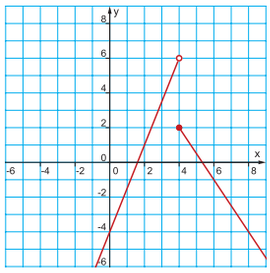
6 بهایێ نەخشەیا $f(x)=\begin{cases}\sqrt{5x+9} & x\ge 4\\ 9-7x & x<4\end{cases}$ بهەژمێرە
دەمێ $x=-6$ و $x=10$

وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ ئەڤێ نەخشەیێ بکێشە.

7 $f(x)=\begin{cases}2x-4 & x<0\\ 5 & x\ge 0\end{cases}$

8 $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x-1 & x\le 2\\ \sqrt{x+2} & x>2\end{cases}$

9 نەخشەیەکا ڕێسا پلەدار بۆ ئەڤی وێنەیێ ڕوونکرنێ بنڤیسە.



10 کۆمپانیەکا پۆستە و ڤەگۆهاستنێ 6000 دیناران وەردگرت بۆ هەر تشتەکی فرێکەت کو بارستایێ وی ژ kg 8 زێدەتر نەبیت، و بۆ هەر کیلوگرامەکا زێدە 1500 دیناران وەردگرت. نەخشەیەکا ڕێسا پلەدار بنڤیسە بۆ ئەوی پارەی وەردگرت ژ فرێکرنا تشتەکی بارستایا وی kg 18 زێدەتر نەبیت.

11 $g(x)$ نەخشەیا پەیدابوویە ژ جهگوهۆڕکیا نەخشەیا $f(x)=\begin{cases}2x-2 & x\le 3\\ -4x+16 & x>3\end{cases}$ ب ڕاکێشانا دوو یەکەیان بۆ لایێ چەپێ، هاوکێشا نەخشەیا $g(x)$ بنڤیسە.

12 نەخشەیا $h(x)$ ئەوا پەیدابووی ژ ڕاکێشانا نەخشەیا $f(x)=\begin{cases}2x-2 & x\le 3\\ -4x+16 & x>3\end{cases}$ ب 2 یەکەیان بۆ سەری بنڤیسە.

13 نەخشەیا $g(x)$ ئەوا پەیدابووی ژ ڕاکێشانا $f(x)=\begin{cases}3x+2 & x\le 0\\ x^2 & x>0\end{cases}$ ب 2یەکەیان بۆ لایێ ڕاستێ.

14 وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ $g(x)=f\left(\frac{1}{2}x\right)+1$ بکێشە هەکەر بزانی کو $f(x)=2x^2+1$

15 $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$ بهەژمێرە، هەکەر بزانی کو $f(x)=x+3$ و $g(x)=x^2-9$ دیاربکە.

16 $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$ بهەژمێرە، هەکەر بزانی کو $f(x)=x+6$ و $g(x)=\frac{18}{x+4}$ بواری $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$ دیاربکە.

هەر نەخشەیەکێ بنڤیسە $f(x)=x^2-5x-14$ ، $g(x)=x-7$

17 $(f+g)(x)$

18 $(f-g)(x)$

19 $(g-f)(x)$

20 $(fg)(x)$

21 $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

22 $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$

هەکەر $f(x)=x-2$ و $g(x)=\frac{8}{x+1}$ ، هەر ئێکێ ژ ئەڤانێن ل خوارێ بهەژمێرە.

23 $f(g(-2))$ وَ $g(f(-2))$

24 $f(g(1))$ وَ $g(f(1))$

25 $g(f(x))$ و بواری وێ

26 $f(g(x))$ و بواری دی

27 کۆمپانیەکا فرۆکەڤانیێ بڕیاردا ب زیدەکرنا 30 000 دیناران لسەر بهایێ هەر پلێتەکێ، ژبەر بلندبوونا بهایێ سووتەمەنیان. و یا لسەر کومپانییێ کۆ 9% وەك باجا فروکخانێ بئێختە سەر بهایێ هەر پلێتەکێ، نەخشەیەکا ئاوێتە بنڤیسە بۆ نواندنا بهایێ نوو یێ پلێتێ، دەمی بهایێ وێ x دینار بیت، بەری بهایێ سووتەمەنییان و باجێ زێدەبکەت.

28 ئەڤ خشتەیە بلندبوونا بهایێ چوونا ژوورێ بۆ باغچەیەکی گیانەوەران و پەیوەندی ل گەل سالێن بۆری ژ دامەزراندنا وێ دیاردکەت. ل جیاوازییان و ڕێژەیانا بگەرە بۆ دیارکرنا گونجایترین پەیوەندی بۆ نواندنا پێدایێن خشتەی. بژمێرا ڕوونکرنێ بکاربینە بۆ دیارکرنا پەیوەندییێ.

بهایێ پلێتێن چوونە ژوور بۆ باغچێ گیانەوەران	
ژمارەیا سالان ژ ئاڤاکرنێ	بها ب دیناران
1	9500
2	10 250
3	11 100
4	12 000
5	12 920

29 ئەڤ خشتەیە بکارئینانا ئاڤێ ژ لایێ ئاکنجیێن باژێرەکی پێ پلەیێن گەرماتیێ دیاردکەت.

پلەیا گەرمێ (سەدی)	ئاڤا مەزاختی (m^3)
12	269 899
15	297 912
18	328 952
21	363 110
24	401 122
27	442 893

أ پەیوەندییەکێ بنڤیسە ئەڤان پێداییان ب نێزیکی بنوێنیت.

ب پەیوەندییێ بکاربینە بۆ خەملاندنا برێ ئاڤا مەزاختی، هەکەر پلەیا گەرمێ $30\ ^\circ C$ بیت.

ج هەکەر ئاڤا مەزاختی د ڕۆژەکێدا $189\ 270\ m^3$ بوو پلەیا گەرمێ د وێ ڕۆژێدا گەهشتبوو چەندێ؟

بەشی 5

ئەزموونا بەشی

1 ژیار وەك فرۆشیارەك د سۆپەرمارکێتەکا مەزندا کاردکەت ئەو 300 000 دیناران هەیڤانە وەردگریت سەربارەی 3% ژ سەرجەمێ پارێ فرۆتنێ. ئەوێ ژیار هەیڤانە وەردگریت ب خشتەیەکێ و وێنەکی روونکرنێ و هاوکێشەیەکێ بنوێنە. هەکەر بزانی کو فرۆتنێن وی ل ناڤبەرا 0 و 000 000 10 دینارانە.

2 زانا لسەر کەڤرەکێ بلند یێ راوەستیا بوو ئەوی بەرەك بەرەڤ خوارێ هاڤێت. ئەڤ خشتە پێدایێن بلندیا ئەوی بەری پشتی t چرکەیان ژ هاڤێتنا وی دیاردکەت.

أ وێنەیەکی روونکرنێ و هاوکێشەیەکێ دروست بکە کو دەربڕینێ ژ بلنداهیا بەری بکەت پێ دەمی وەك گۆراوەکی ئازاد.

ب بلنداهیا کەڤری چەندە؟

ج بلنداهیا بەری چەندە پشتی 10 چرکەیان؟

د پشتی چەند چرکەیان ئەو بەرە دێ گەهیتە ئەردی؟

دەم (s)	بلنداهی (m)
1	615.1
2	600.4
3	575.9
4	541.6
5	497.5
6	443.6

وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ نەخشەیێ بکێشە.

3 $f(x)=\begin{cases}-x-3 & x<1\\ 2x-6 & x\geq 1\end{cases}$

4 $f(x)=\begin{cases}5 & x<-2\\ -x^2-4x & x\geq -2\end{cases}$

وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ $f(x)$ ب زانینا $g(x)$ بکێشە.

5 $f(x)=2x-4$ و $g(x)=-\frac{1}{2}f(x)-1$

6 $f(x)=x^2-2$ و $g(x)=-f(x+2)$

هەر نەخشەیەکێ یان بهایەکی بهەژمێرە، هەکەر بزانی کۆ $f(x)=4x^2-9$ و $g(x)=2x+3$

7 $(f-g)(4)$ **8** $g(f(3))$

9 $(fg)(5)$ **10** $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$

11 زێرنگرەك 10% وەك باجا دابینکرنێ بۆ فرۆتنا هەر پارچەیەکا زێری ددەت. و ب بهایێ 150% ژ لێچویێ گشتی دفروشیت. نەخشەیەکا ئاوێتە بنڤیسە کو بهایێ لێچویێ بنەرەتی ب c دیناران بنوینیت.

12 ئەڤ خشتەیێ ل خوارێ پێدایێن بهایێ ژمارەیەکا خانییان پێ دووراتیێن وان ژ ناڤەراستا باژێری دیاردکەت.

أ نەخشەیەکێ بنڤیسە کو ببیتە پەیوەندییەك بۆ لێکۆلینا بهایێ خانی p پێ دووریێ d ژ ناڤەڕاستا باژێری.

ب ئەوێ نەخشەیێ بکاربینە بۆ خەملاندنا تێکرایێ بهایێ خانییەکی کو 20 km ژ ناڤەڕاستێ باژێری یی دووربیت.

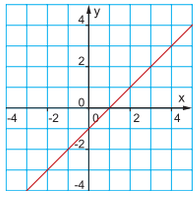
بهایێ خانییان	
دووراتیی ژ ناڤەڕاستا باژێری (km)	ناڤەندێ بهایێ (دینار)
2	118 496 000
4	109 016 000
6	100 295 000
8	92 271 000
10	84 890 000
12	78 098 000

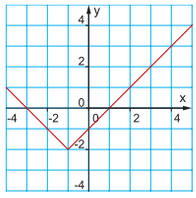
بەشی 5

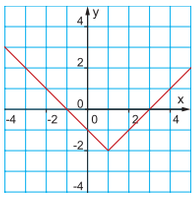
ئەزموونا کەلۆکی

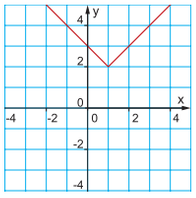
هەلبژارتن ژ چەند بەرسڤان

1 کیژ وێنەیێ رووبەرێ نەخشەیا $f(x)=|x+1|-2$ دنوێنیت؟

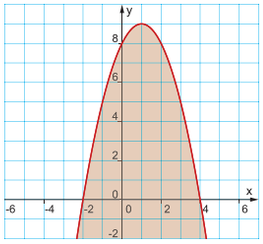
أ)


ب)


ج)


د)


2 کیژ وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ کیژ نەخشەی یان لاسەنگەیا ل خوارێ دبیتە باشترین نواندن؟



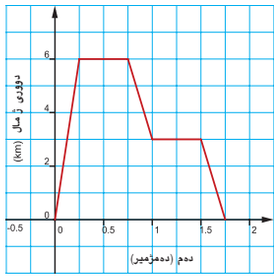
أ) $y=x^2+2x+8$

ب) $y=-x^2+2x+8$

ج) $y\le x^2+2x+8$

د) $y\le -x^2+2x+8$

3 ئەف وێنەیێ رووبەرێ بۆ کیژ ئەڤێن ل خوارێ دبیتە باشترین نواندن.



أ) شۆفێرێ ب سواربوونا پایسکلی هەتا گەهشتە پەرتووکخانێ 6 km برین، دەمژمێرەکی ل پەرتووکخانێ ما، پاشی ڤەگەڕیا مال.

ب) شۆفێرێ ب سواربوونا پایسکلی هەتا گەهشتە پەرتووکخانێ 6 km برین. نیڤ دەمژمێری ل پەرتووکخانێ ما، پاشی بەرەڤ دوکانا فرۆتنا کاسیتێن ڤیدیۆیێ چۆ و نیڤ دەمژمێر بسەرڤەچوو، پاشی ڤەگەڕیا مال.

ج) شۆفێرێ ب سواربوونا بایسکلی هەتا گەهشتە پەرتووکخانێ 3 km برین، نیڤ دەمژمێری ل پەرتووکخانێ ما، پاشی 3 km برین بۆچۆنا دوکانا فرۆتنا کاسیتێن فیدیۆیێ، پاشی ڤەگەڕیا مال.

د) شۆفێرێ ب سواربوونا پایسکلی هەتا گەهشتە پەرتووکخانێ 6 km برین، ل پەرتووکخانێ 3 دەمژمێران ما، پاشێ 3 km برین بۆ چوونا دوکانا فرۆتنا کاسیتێن فیدیۆیێ، ل وێ دوکانێ دەمژمێرەك بۆران.

4 بهایێ $f(x)=\begin{cases}x^2+4x-8 & x<-1\\ x^3-x^2+5 & x\ge -1\end{cases}$ چەندە؟

هەکەر $x=-1$

أ) -13 ب) -11 ج) 3 د) 5

5 کیژ ڤان دبیتە کۆمەڵا شیکاری بۆ هاوکێشە $\sqrt{2x-4}=x-6$ ؟

أ) $\{10\}$ ج) $\{2,20\}$

ب) $\{4,10\}$ د) $\{2,12\}$

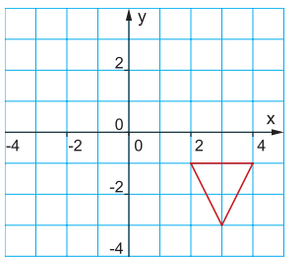
6 کیژ ڤان دبیتە نەخشەیا $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ هەکەر

$f(x)=2x^2-7x-30$ و $g(x)=x-6$ ؟

أ) $2x-5$ ج) $\frac{(2x-5)(x+6)}{x-6}$

ب) $2x+5$ د) $\frac{(2x-10)(9x+3)}{x-6}$

7 کیژ ڤان جهگوهۆڕکان وێنەیە بۆ سێگوشەیەکێ و سەرەکی وێ $(-2,1)$ بیت؟



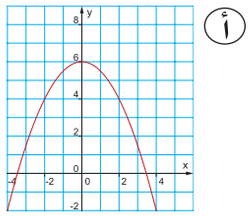
أ) وێنەدانەوە ل دۆر تەوەرێ ئێکێ.

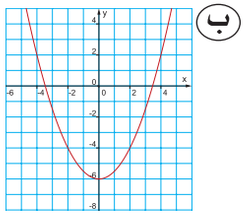
ب) وێنەدانەوە ل دۆر تەوەرێ دووێ.

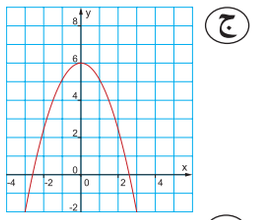
ج) ڕاکێشان ب 3 یەکەیان بەرەڤ لایێ چەپێ، و 3 یەکەیان بەرەڤ سەری.

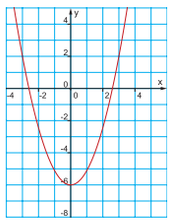
د) دەوردان ل دۆر خالا بنەڕەت ب گۆشەیا 180°

8 کیژ ڤان دبیته ویّنەیێ رووونکرنێ بۆ نەخشەیا $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+6$

أ 

ب 

ج 

د 

بەرسڤەکا کورت

9 بهایێ ڤێ بڕێ $\log_4 256^3$ چەندە؟

10 بهایێ c چەندە ل $4(5i-2)+3=2(10i+c)-7$ ؟

11 بهایێ ڤێ بڕێ دەمێ $x=5$ بهەژمێرە.

$$\left(\frac{x^2+5x-36}{2x^2-10x+8}\right)\left(\frac{x^2+x-2}{x^2+11x+18}\right)$$

بەرسڤەکا کورت

12 $f(x)=x^2+1$

أ پەیوەندیا بەرۆڤاژی یا ڤێ نەخشەیێ دیاربکە.

ب ویّنەیێ رِوونکرنێ بۆ $f(x)=x^2+1$ و بۆ بەرۆڤاژیا وێ بکێشە.

ج رِوونبکە ئەرێ ئەڤ پەیوەندیا بەرۆڤاژی نەخشەیە یان نە.

13 ئەڤان خالان $(0,6)$ ، $(2,2)$ ، $(5,11)$ بکاربینە.

أ نەخشەیەکا دووجایی بنڤیسە کۆ ویّنەیێ رِوونکرنا وێ د هەرسێ خالانرا ببوریت.

ب ب شێوەیێ جەبری ساخبکە کو ویّنەیێ رِوونکرنێ یێ نەخشەیا تە نڤیسی د ڤان خالانرا دبۆرِیت.

ج ویّنەیێ رِوونکرنێ بۆ وێ نەخشەی بکێشە.

د $f(7)$ و $f(-7)$ بهەژمێرە.

14 $f(x)=x^2-4$

أ دوو جهگوهۆرِکان بنڤیسە، ئەڤی نەخشەی بگۆهۆرن ب شێوەیەکی سەرێ نەخشەی د$(1, 4)$بیت.

ب دوو جهگوهۆرِکان بنڤیسە، ئەڤێ نەخشەی دگوهۆرِن ب شێوەیەکی کو ویّنەیێ رِوونکرنێ یێ نەخشەیا پەیدابووی د خالێن $(0, 2)$ و$(-4, 2)$ رِابیوریت.

بەرسڤەکا دریژ

15 ئارازای تانکێ ترومبێلا خو ب سۆتەمەنیێ پڕکر و بۆ گەشتەکێ چوو. ئەڤ خشتەیە پێدایین برِێن سوتەمەنیا مای د تانکێدا دیاردکەت پێ دووریا ترومبێلێ برِی.

دووراتی (ب میلان)	0	50	100	150	200
برِێ سوتەمەنیێ (ب گالونان)	10	8	6	4	2

أ نەگۆرێ جیاوازیان یان رێژەیان بکاربینە بۆ دیارکرنا نەخشەیا بنەرەت وەك نموونەیەك بۆ برِێ سوتەمەنیا مای د تانکێ ترومبێلێدا.

ب ئەوێ نموونەیا بیرکاری بۆ نواندنا پێدایێن خشتەی بنڤیسە.

ج پشتی برِینا 75 میلان چەند برِێ سوتەمەنیێ مایە.

د ئەرێ ترومبێل دشێت 300 میلان ببرِیت بێی وەرگرتنا سوتەمەنیا نوو؟

هـ نەخشەیا بەرۆڤاژییا وێ بنڤیسە، رِوونبکە ئەو چ دنوێنیت؟

بەشێ

6

ئێك ل دویڤ ئێك و زنجیرە

Sequences and Series

بەشێ شەشێ

ئێك ل دویڤ ئێك و زنجیرە

1-6 ئێك ل دویڤ ئێك

2-6 زنجیرە

3-6 ئێك ل دویڤ ئێك و زنجیرەییێن ژمارەی

ئەزموونا نیڤا بەشی

4-6 ئێك ل دویڤ ئێك و زنجیرەییێن ئەندازەی

بەرپەڕێ تەکنۆلۆژیا ڤەدیتنا زنجیرەییێن ئەندازەیی ییێن بێ دوماهیك.

5-6 دەرئەنجامێ بیرکاری

لاکیشەیا زێرین

ئێك ل دویڤ ئێکا فیبوناتشی پەیوەندی دگەل ئەندازە و هۆنەر و تالارسازیێ هەیە، ئەو پەیوەندییە ییێن هاتینە دیتن بکارئینانا لاکێشەییێن زێرین.

ئەرێ تو یێ ئامادەی؟

زاراف

هەر زاراڤێ دگەل پێناسا وێ یا ل ڕەخێ چەپێ هاتی گرێدە.

1. نەخشەیا توانی
2. نەخشە
3. نەخشەیا هێلی
4. نەخشەیا دووجایی

أ. پەیوەندییە ل ناڤبەرا دوو گۆڕاوان ب مەرجەکی هەر بهایەکی گۆڕاوی ئێکێ بەرامبەر ئێك بهایێ گۆڕاوێ دووێیە.

ب. نەخشەیەکە وێنەیێ ڕوونکرنا وێ ڕاستەهێلە.

ج. نەخشەیەکە ڕێسایا وێ ڕێژەیا دوو ڕادەییە

د. نەخشەیەکە هاوکێشەیا وێ $f(x)=ax^2+bx+c$ دەمێ $a\neq 0$

هـ. نەخشەیەکە هاوکێشەیا وێ $f(x)=ab^x$ ، $a\neq 0$ دەمێ $b\neq 1$ ، $b>0$

نڤیسینا بڕێن ڕەگدار بسادەترین شێوە.

ئەڤێ بڕێ بسادەترین شێوە بنڤیسە.

5. $\sqrt{25}\times\sqrt{36}$
6. $\sqrt{121}-\sqrt{81}$
7. $\sqrt{\frac{1}{49}}$
8. $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{64}}$

هەژمارکرنا هێزان

بهایێن هەر بڕەکێ بهەژمێرە.

9. $(-3)^3$
10. $(-5)^4$
11. $1-(-2^3)^3$
12. $\frac{2^2\times 2^7}{(2^2)^5}$

شیکارکرنا هاوکێشەیەکێ پێ گۆڕاوەکی

x پێ گۆڕاوێن دی بژمێرە.

13. $y=12x-5$
14. $y=-\frac{x}{3}+1$
15. $y=-9+x^2$
16. $y=-4(x^2-9)$

هەژمارکرنا بهایێ بڕان

ئەڤێ بڕێ بژمێرە دەمێ $x=2$ و $y=12$ و $z=24$.

17. $\frac{y(y+1)}{3x}$
18. $z+(y-1)x$
19. $y\left(\frac{x+z}{2}\right)$
20. $z\left(\frac{1-y}{1-x}\right)$

دژە نموونە

دژە نموونەیەکێ دەربینە کو ئاراستەیێ دەستەواژێ دیاربکەت.

21. $n^2=n$ دەمێ n ژمارەیەکا ڕاستی بیت.
22. $n^3\geq n^2\geq n$، دەمێ nژمارەیەکا ڕاستی بیت.
23. $\frac{1}{n}>\frac{1}{n^2}$ دەمێ n ژمارەیەکا ڕاستی بیت.
24. $\frac{2}{n}\neq\frac{n}{2}$ دەمێ n ژمارەیەکا ڕاستی بیت.

بەشێ 6

ڕێبەرێ خواندنێ: لێنێرینەك بۆ بەشی

ل دەمێ بۆری

ئەڤە خواندبوون

- کومەلێن ژمارەیان، ژ وان ژمارەیێن سرووشتی و ژمارەیێن دووجایی.
- بکارئینانا شێوازێن جیاواز و ڕێژەیان بۆ پولینکرنا پێدایيان.
- کێشانا وێنەیێن ڕوونکرنێن نەخشەیێن هێلی و نەخشەیێن توانی و هەژمارکرنا بهایێن وان.

د ئەڤی بەشیدا

دێ فێر ئەڤان بی

- چەند شێوازێن ژمارەیان کۆ دبێژنێ ئێکێن ل دویڤ ئێك، و سەرجەمێن وان کۆ دبێژنێ زنجیرە.
- پۆلینکرنا ئێك ل دویڤ ئێکێ ئەرێ یا ژمارەییە یان ئەندازەییە.
- دێ چەوا ئێکێن ل دویڤ ئێك و زنجیران نڤیسی و هەژمێری.

د ئایندەدا

تۆ دشێی شارەزایین ئەڤی بەشی بکاربینی

- دپۆلێن بلندتردا، ل دەمێ خواندنا جیاکاریێ و تمامکاریێ.
- دوانەیێن فیزیایێدا، بۆ دیارکرنا ڕێسایەکێ وەك بلندبوونا قەپەکێ ئێك ل دویڤ ئێك جاران دەمێ ل ئەردی دکەڤیت.
- د ژیانا ڕۆژانەدا بۆ هەژمارتنا بکارخستنا گەشەیا دارایی.

زاراڤ

Vocabulary

Sequence (Progressions)	ئێك ل دویڤ ئێك
Convergent sequence	ئێك ل دویڤ ئێکا لێکنێزیکبووی
Divergent sequence	ئێك ل دویڤ ئێکا لێکدووربوویی
Explicit definition	پێناسەیا ئاشکەرا
Finite sequence	ئێك ل دویڤ ئێکا بدوماهیك هاتی
Infinite sequence	ئێك ل دویڤ ئێکا بێ دوماهیك
Iteration	دووبارەبوون
Limit	ئارمانج
Recursive definition	پێناسەیا نەدیار
Series	زنجیرە
Term of a sequence	رادێ زنجیرێ

ڕۆناهیەك لسەر زاراڤان

بۆ تێگەهشتنا زاراڤێن ڤی بەشی، ئەڤان پێنگاڤێن ل خوارێ پەیرەوبکە:

1. د ژیانا ڕۆژانەدا پەیڤا ئێك **ل دویڤ ئێك** چ دگەهینت؟ ئێك ل دویڤ ئێکا ژمارەیی چ دگەهینت؟
2. پەیڤا بدوماهیك هاتی ئانکو دوماهیکەك یا هەی، هندەك نموونەیان بینە کو پەیڤا **بدوماهیك هاتی** تێدا بکاربهێت، ئێك ل دویڤ ئێکا بدوماهیك هاتی چ ڕامانێ ددەت ڕوونبکە.
3. ب پالپشتیا ڕامانا پەیڤا دوماهیك هندەك نموونەیان بینە، کو درستەیدا پەیڤا دوماهیك تێدا بکارهاتبیت و دشیاندابیت **ئێك ل دویڤ ئێکا بێ دووماهیك** ڕوونبکەت.
4. پەیڤا زنجیرە د تەلفزیۆنێدا چ دگەهینیت هەروەسا پەیڤا **زنجیرە** د بیرکاریێ دا چ دگەهینیت؟
5. رادە د ڕادەداری دا چ دگەهینیت پاشی بەحسێ **ڕادێ ئێك ل دویڤ ئێکێ** بکە.

بەشێ 6

بیرکاری
ب خواندن و نڤیسینێ

ستراتیژیا خواندنێ: بەلگەیەکی باوەر پێکەری بکاربینە

داتو بشێی بەلگەیەکی باوەر پێکری بنڤیسی کو پەیوەندی ل گەل تێگەهەکی ژ تێگەهێن بیرکاریێ هەبیت، دڤێت تو باش د ئەوێ نڤیسینی بگەهی. بۆ نڤیسینا ئەڤی بەلگەی تو دشێی رێیەکا ژ چوار پێنگاڤان بکاربینی، هەر وەك ل شیکارکرنا نموونەیا ل خوارێ هاتیە روونکرن.

ل پەرتووکا پۆلا دەهێ

بنڤیسە: جیاوازیا ل ناڤبەرا ئەگەرا تیۆری و ئەگەرا تاقیکرنێ [پراکێکی] دیاربکە، نموونەیەکێ بینە کو تێدا دجیاوازبن.

پێنگاڤا(1)ێ **ئارمانجێ دیاربکە**

ئارمانج روونکرنا جیاوازیێ لناڤبەرا ئەگەرا تیوری و ئەگەرا تاقیکرنێ (پراکتیکی).

پێنگاڤا(2)ێ **ڕستەیەکێ بنڤیسە ئەڤێ ئارمانجێ ساخبکەت**

ئەگەرا تیۆری پشت بەست دبیت ب بیرکاری، لێ ئەگەرا پراکتیکی پشت بەست دبیت ب ئەنجامێ تاقیکرنێ.

پێنگاڤا(3)ێ **نموونەیەکێ بینە پاڵپشتیا بەرسڤا تە بکەت**

دەمێ پارچەکێ درەڤێ کانزای هەل ددەی ئەگەرا دەستکەفتنا خەت دبیتە $\frac{\text{ژمارا ئەوان جارێن روودانێ ساخدکەن}}{\text{لسەر هەموو ئەنجامان}}$ ئانکو $\frac{1}{2}$

لێ ئەگەرا پراکتیکی بۆ دەستکەفتنا خەت دبیتە $\frac{\text{ژمارا ئەوان جارێن خەت تێدا دیاربووی}}{\text{ژمارا ئەوان جارێن پارچەیا دراڤی هەلدای}}$

هەکەر بتنێ ئێك جارێ پارچەیا پارەی هەلدەین شێر یان خەت دێ بدەست مە کەڤیت.

ئەگەرا پراکتیکێ بۆ خەت دێ بیتە 1 (دەمێ خەت بدەست مە بکەڤیت) یان 0 (دەمێ شێر بدەست مە بکەڤیت)، لێ ئەگەرا تیوری بۆ بدەست کەفتنا خەت هەردێ مینت $\frac{1}{2}$.

پێنگاڤا(4)ێ **بەلگەیێ خو پۆختە بکە:**

چونکی ئەگەرا تیوری بتنێ پشت بەست دبیت ب ژمارا ئەنجامێن تیۆری، لەورا چ جاران ناهێتە گوهۆڕین، لێ ئەگەرا پراکتیکی پشت بەست دبیت ب ئەنجامێن تاقیکرنێ، ئەڤە وەدکەت کو هەر ل هەلدانەکێ بهێتە گوهۆڕین.

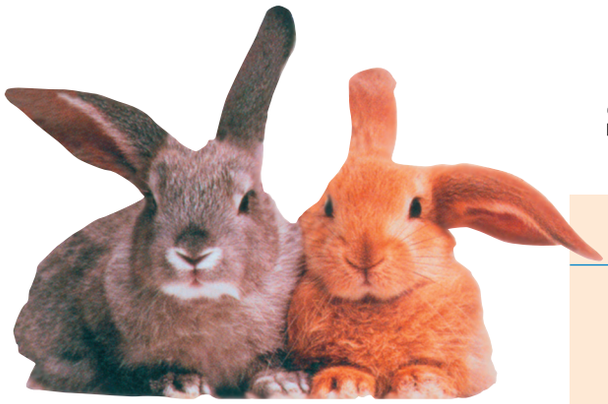
هەوڵبدە

بۆ بەرسڤدانا ئەڤان هەردوو پرسیاران وان هەر چار پێنگاڤان بکاربینە:

1. بەرکێ زارەکێ 20 جاران هەلدا و ژمارە 3 دووجاران دیاربوو. دڤێت بکیماسی چەند جاران بەرکێ ئەڤێ زارێ هەلدەن هەتا ئەگەرا تیوری و ئەگەرا پراکتیکی یەکسان بن د روودانا دەست کەفتنا ژمارە 3 دا؟ روونبکە چەوا گەهشتییە ئەڤێ پرسیارێ.
2. بابێ هوشیاری دڤێت کورێ خو ببەتە قوتابخانەکا نوی، 9 قوتابخانە بۆ وی هاتنە دیارکرن، ئەوی بڕیار دا سەرەدانا 3 یان 4 قوتابخانەیان بکەت. ژمارا رێکێن سەرەدانا 4 قوتابخانەیان بکەت ب چەندێ زێدەترە ژ ژمارا رێکێن سەرەدانا 3 قوتابخانەیان بکەت؟ بەرسڤا خۆ ڕوونبکە.

1-6

ئێك ل دویڤ ئێك
Sequences and Series



كی ئەڤێ بكاردئینیت؟

ئێك ل دویڤ ئێك بكاردهێن بۆ دروستكرنا هندەك سامپلان ب مەرەما ئەنجامدانا ڤەكۆلینان لسەر گەلەك ڕووداندا سروشتی. وەكی گوهۆڕینێ ل ژمارا كۆمەڵەكا كێڤرێشكان دگەل بۆرینا دەمی.

ئارمانج

- هەژمارتنا ڕادێ n ێ د ئێك ل دویڤ ئێكا ژمارەیدا.
- نڤیسینا ڕێسایا ئێك ل دویڤ ئێكێ.
- هەژمارتنا سەرجەمی و نڤیسینا وی بكارئینانا هێمایێ خرڤەكرنێ (التجميع).

زاراڤ
Vocabulary

ئێك ل دویڤ ئێك (متتالية) Sequence

ڕادێ ئێك ل دویڤ ئێكێ Term of a sequence

ئێك ل دویڤ ئێكا بێ دوماهیك Infinite sequence

ئێك ل دویڤ ئێكا بدوماهیك هاتی Finite sequence

پێناسەیا ئاشكرا [دیار] Explicit definition

دووبارەبوون Iteration

پێناسەیا نەدیار Recursive definition

زنجیرە Series

بەشە سەرجەم partid sum

هێمایێ خرڤەكرنێ Summation Symbol

زانایێ بیركاری یێ ئیتالی (لیۆناردۆ فیبۆناتشی) ل ساڵا1201 ز. بەحسێ ئەوێ زێدەبوونا بلەز كر ئەوا هاتیە ئەنجامدان لسەر ژمارەكا كێڤرێشكان دكۆمەڵەكێدا. فیبۆناتشی جۆتێن كێڤرێشكان هەیڤ ب هەیڤ دهەژمارتن، بۆ وی دیاربوو ئەو ژمارە ل دویڤ شێوازەكی زێدەبوو، پاشی ئەڤە ب **ئێك ل دویڤ ئێكا فیبۆناتشی** هاتە ناڤكرن.

ئێك ل دویڤ ئێك Sequence كۆمەلەكا ژمارەیێن ڕێزكرییە. هەر ئێك ژ وان ژمارەیان دبیتە **ڕادەیەك Term** ژ ڕادەیێن ئێك ل دویڤ ئێكێ. چێدبیت ئێك ل دویڤ ئێك **یابێ دوماهیك بیت، Infinite** ئانكو ژمارەیەكا بێ دوماهیك یا ڕادەیان پێكبهێت، وەكی ئێك ل دویڤ ئێكا ژمارەیێن سروشتی. و چێدبیت ئێك ل دویڤ ئێك **ئێك یا بدوماهیك بیت Finite sequence** ، ئانكو ژمارەیەكا بدوماهیك هاتی یا ڕادەیان پێكبهێت، وەكی 4، 3، 2، 1 . ئەڤە ئەوێ چەندێ دیاردكەت، كو ئێك ل دویڤ ئێك نەخشەیەكە بواریێ وان ژمارەیێن سروشتینە، ئێك ل دویڤ ئێك و مەودایێ وێ دبیتە كۆمەڵا ئەوان ژمارەیێن ڕادەیان پێكدئینن. بیركاری زانا a_n ل جهێ نڤیسینا شێوەیێ نەخشەیا $a(n)$ بكاردئینن، دبێژنە ژمارە n خانەیا ڕادەی، ڕادەیێ ئێكێ دبیتە a_1 و ڕادەیێ دووێ دبیتە a_2 لێ ئەو ڕادەیێ خانەیا وی n بیت دبیتە a_n (ڕادەیێ n ی ***nth* term**). چونكی ئێك ل دویڤ ئێك نەخشەیەكە، لەورا هەر خانەیەكا n بەرامبەری وێ بتنێ ئێك ڕادە هەیە دبیتە a_n .

خانەیا ڕادەی	n	1	2	3	4	5	بوار
ڕادە	a_n	1	1	2	3	5	مەودا

ل ئێك ل دویڤ ئێكا فیبۆناتشی، هەر ئێك ژ ڕادەیێ ئێكێ و دووێ یەكسانە 1 ، لێ هەر ڕادەیەك ژ ڕادەیێن دی یەكسانە سەرجەمێ هەردوو ڕادەیێن دی ئەوێن ڕاستەخۆ لپێش ئەوی هاتین، ئانكو $a_1=1$، $a_2=1$، $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ دەمێ $n\geq 3$. دبێژنە ئەڤێ جۆرێ پێناسێ **پێناسەیا نەدیار (ڤەشارتی) Recursive definition** ل پێناسەیا نەدیار ڕادەیەك یان هندەك ڕادەیێن ل پێش وی دهێنە بكارئینان بۆ هەژمارتنا ڕادەیەكی ل پشت وی.

نموونـــــە 1 هەژمارتنا ڕادەیێن ئێك ل دویڤ ئێكێ، بكارئینانا پێناسەیا نەدیار.

پێنج ڕادەیێن ئێكێ بووێ ئێك ل دویڤ ئێكێ بهەژمێرە، ئەگەر پێناسەیا نەدیار ب ئەڤێ شیوازی بیت $a_1=5$، $a_n=2a_{n-1}+1$ ڕادەیێ ئێكێ پێدایە

بۆ هەژمارتنا a_2 بهایێ a_1 دانە دپێناسەیا نەدیار دا، و ب ئەڤی شێوەی بەردەوام بە ب دانا بهایێ هەر ڕادەیەك بۆ هەژمارتنا ڕادەیا پشتی خۆ.

n	$2a_{n-1}+1$	a_n
1	دراو	5
2	$2(5)+1$	11
3	$2(11)+1$	23
4	$2(23)+1$	47
5	$2(47)+1$	95

ئانكو هەر پێنج ڕادەیێن ئێكێ بۆ ئەڤێ ئێك ل دویڤ ئێكێ دبنە 5, 11, 23, 47, 95

خالا چاڤدێریێ

1. پێنج ڕادەیێن ئێكێ بۆ هەر ئێك ل دویڤ ئێكەكا ل خوارێ بهەژمێرە.

أ $a_1=-5$ ، $a_n=a_{n-1}-8$ ب $a_1=2$ ، $a_n=-3a_{n-1}$

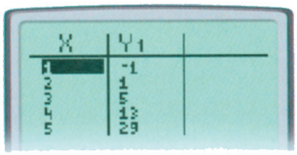
تو دشێی پێناسەیا هندەك ئێك ل دویڤ ئێكان ب **پێناسەیەكا دیار** (ئاشكەرا) **Explicit definition** پێناسەبكە ب جۆرەكی كو تو دشێی بهایێ هەر ڕادەیەكی ب زانینا خانەیا وی بهەژمێری.

نموونـــــە 2 هەژمارتنا ڕادەیین ئێك ل دویڤ ئێكێ بكارئینانا پێناسەیا ئاشكەرا.

پێنج ڕادەیێن ئێكێ بۆ ئەوێ ئێك ل دویڤ ئێكێ بهەژمێرە،
هەكەر پێناسەیا وێ ئەڤە بیت: $a_n = 2^n - 3$
خشتەیەكێ دروستبكە و بهایێ a_n بهەژمێرە ب جۆرەكی n بهایان ژ 1 هەتا 5 وەربگریت. هەر پێنج ڕادەیێن ئێكێ پێكهاتینە ژ $-1, 1, 5, 13, 29$

n	2^n-3	a_n
1	2^1-3	-1
2	2^2-3	1
3	2^3-3	5
4	2^4-3	13
5	2^5-3	29

ساخبكە، بژمێرا ڕوونكرنێ بكاربینە، نەخشەیا $y = 2^x - 3$ تۆماربكە، پاشی خشتەیێ بهایان دروستبكە.



خالا چاقدێریێ

2. پێنج ڕادەیێن ئێكێ بۆ هەر ئێك ل دویڤ ئێكەكا ل خوارێ بهەژمێرە:

أ $a_n = n^2 - 2n - 1$ ب $a_n = 3n - 5$

تو دشێی زانیاریێن خۆ بكاربینی بۆ نڤیسینا پێناسەیا ئێك ل دویڤ ئێكێ.

نموونـــــە 3 نڤیسینا پێناسەیا ئێك ل دویڤ ئێكێ

پێناسەیا ڕادەیێ nێ بۆ هەر ئێك ل دویڤ ئێكەكێ بنڤیسە.

أ **3, 6, 12, 24, 48**

جیاوازییا ل ناڤبەرا هەر ڕادەیەكی و ڕادەیێ لپێش وی و ڕێژەیا هەر ڕادەیەكی بۆ ڕادەیێ ل پێش وی دیاربكە.

ڕێژە		2	2	2	2
ڕادە	3	6	12	24	48
جیاوازییێن ئێكێ		3	6	12	24
جیاوازییێن دووێ			3	6	12

یا دیارە ڕێژە دنەگۆڕن ئانكو $a_n = 2a_{n-1}$ یان $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 2$ ئەڤ ئێك ل دویڤ ئێكە، ئێك ل دویڤ ئێكا توانییە و بنجینەیێ وێ دبیتە 2 . بنێرە شێوازێ هێزێن ژمارە 2 .

$a_1 = 3 = 3 \times 2^0$ ، $a_2 = 6 = 3 \times 2^1$ ، $a_3 = 12 = 3 \times 2^2$ ...

شێوازێ $3(2^{n-1})$ پێناسەیەكا گونجاییە بۆ ئەڤێ ئێك ل دویڤ ئێكێ، ئانكو $a_n = 3 \times 2^{n-1}$

ب **2.5, 4, 5.5, 7, 8.5**

ڕادە	2.5	4	5.5	7	8.5
جیاوازییێن ئێكێ	1.5	1.5	1.5	1.5	

چونكی جیاوازییێن ئێكێ دنەگۆڕن، لەورا ئەڤ ئێك ل دویڤ ئێكە یا هێلییە، ڕادەیێ ئێكێ 2.5 هەروەسا بۆ هەر ڕادەیەكی ل دویڤ وێ 1.5 زێدە دكەن. یاسا دبیتە $a_n = 1.5\ n + 1$.

ل بیرا تەبیت

نەگۆڕییا جیاوازییێن ئێكێ، نموونەیەكا هێلی پەیدادكەت و نەگۆڕیا جیاوازییێن دووی نموونەیەكا دووجای پەیدا دكەت، و نەگۆڕیا ڕێژەیان نموونەیەكاتوانی پەیدادكەت.

خالا چاقدێریێ

3. پێناسەیەكا گونجای بۆ ڕادەیێ n یێ بۆ هەر ئێكێ ل خوارێ بنڤیسە:

أ $7, 5, 3, 1, -1$ ب $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$

نموونـــــه 4 بجهێنان لسەر فیزیایێ

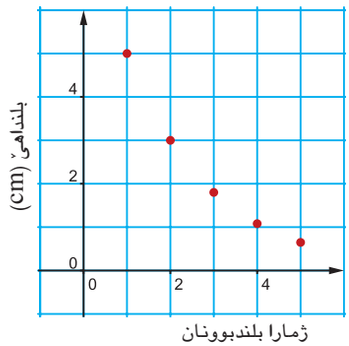
تەپەك ژ بلنداهیەکێ بەرداروریێ، پشتی ب ئەردی کەفتی 155 cm بلندبووقە، پاشی هندەك جارێن دی بلندبوو کو ل هەر جارەکێ بلنداهیا تەپێ بوو 60% ژ بلنداهیا جارا بەری وێ. ب وێنەیێ ڕوونکرنێ ئەڤێ ئێکێ ل دویڤ ئێکێ بنوێنە. شێوازێ وێ وەسفبکە. ل جارا نەهێ ئەو تەپە چەند بلندبوو؟

بلنداهی ل جار ئێکێ 155 cm بوو بلنداهی ل هەر جارەکێ دبیتە 60% ژ بلنداهیا بەری وێ.

ئەم دشێین ئەڤێ ئێك ل دویڤ ئێکێ ب ئەڤی شێوازی پێناسە بکەین $a_n = 0.6 \times a_{n-1}$ ، $a_1 = 155$ ئەڤێ پێناسەیا نوی بۆ هەژمارتنا هندەك ڕادەیێن ئێك ل دویڤ ئێکێ بکاربینە.

پاشی ب وێنەیێ ڕوونکرنێ بنوێنە.

$$a_2 = 0.6 \times 155 = 93$$
$$a_3 = 0.6 \times 93 = 55.8$$
$$a_4 = 0.6 \times 55.8 = 33.48$$



وەسا دیاردبیت کو وێنەیێ ڕوونکرنێ یێ توانییە. شێوازەکی بۆ نڤیسینا پێناسەیەکا گونجای بۆ ئەڤێ ئێك ل دویڤ ئێکێ بکاربینە. $a_n = 155 \times 0.6^{n-1}$ دەمێ n ژمارا جارێن بلندبوونا تەپێ بیت. ئەڤێ ڕێسایێ بۆ هەژمارتنا بلنداهیا تەپێ ل جارا نەهێ بکاربینە: $a_9 = 155 \times 0.6^{9-1} \approx 2.603$. ئەڤ تەپە ل جارا نەهێ 2.6 cm بلند دبیت ب نێزیکی.

تاگەهداری!

چونکی بواریّ نەخشەی بەشەکە ژ کۆمەلا ژمارەیێن سروشتی ڤێجا ب هێلەکی دناڤبەرا خالان نەگەهینە.

خالا چاڤدێریێ

4. حەودەکا گولان پێدڤی ب 1.6 گالون ئاڤێ هەیە بۆ ئاڤدانا وێ ل هەر جارەکێ. سەرجەمێ ئەوان گالۆنێن ئاڤا بکارهاتی ل هەر ئاڤدانەکێ ب وێنەیێ ڕوونکرنێ بنوێنە. ئەوی شێوازێ بدەست تەکەفتی وەسفبکە. سەرجەمێ ئاڤا بکارهاتی پشتی 10 جارێن ئاڤدانێ چەندە؟

فراکتال Fractals وێنەیەکە بدەست دکەڤیت ب دووبارەبوونا شێوەیێن لێکچوویی ئەوێن هاوشێوە ل گەل شێوەیێ بنەڕەت.

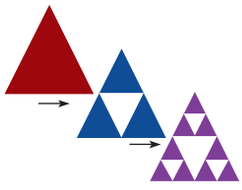
نموونـــــه 5 سێگۆشەیا سیرپنسکی Sierpinski

سێگۆشەیەك ب فراکتالکرنا سێگۆشەیەکا لا یەکسان بدەست دکەڤیت، ب بڕینا سێگۆشەیەکا لا یەکسان ژ ناڤەڕاستا سێگوشەیا ئێکێ، پاشی ئەڤێ لسەر هەر سێگۆشەیەکا بدەست تەکەفتی دووبارەبکە، ژمارا سێگۆشەیان ل جارا پێنجێ چەندە؟

ل هەر دووبارەبوونەکێ ژمارا سێگۆشەیان 3 جاران زێدەدبیت، هێمایێ N_n بۆ ژمارا سێگۆشەیێن ل جارا ئێکێ بکاربینە. ل جارا ئێکێ ئێك سێگۆشە هەیە. ل جارا دووێ 3 سێگۆشە بدەست دکەڤن، هەر وەسا.

$N_1 = 1$ ، $N_2 = 3$ ، $N_3 = 3^2$ تو دشێی بنڤیسی $N_n = 3^{n-1}$

ڤێجا $N_4 = 3^3 = 27$ ، $N_5 = 3^4 = 81$. ل جارا پێنجێ ژمارا سێگۆشەیان دبیتە 81.



خالا چاڤدێریێ

5. کۆمەلەیا کانتۆر شێوەیەکی فراکتالە، ب لادانا سیئیتکێ ناڤەڕاستێ پارچە ڕاستەهێلی، بجهێنانا ئەڤێ کردارێ لسەر هەر پارچەڕاستەهێلەکێ بدەست تە دکەڤیت. ژمارا وان پارچە ڕاستەهێلان چەندە پشتی جارا پێنجێ

هزربکه و گەنگەشێ بکه

1. **ڕوونبکه** ئەرێ جیاوازیا ل ناڤبەرا پێناسەیا ئیك ل دویڤ ئێکێ بشێوەیێ نەدیار و پێناسەیا وێ بشێوەیێ ئاشکەرا [دیار].

2. **بهەژمێرە** ئەوان هەرسێ ڕادەیێن ئەڤێ ئێك ل دویڤ ئێکێ تەمام دکەن ... 4، 2، 1

3. **بەحس بکه** چەوا ئێك ل دویڤ ئێکێ وەك نەخشە دبینی؟ ئەرێ بۆ هەموو ئێك ل دویڤ ئێکان هەمان بوار هەیە؟ وێ چەندێ ڕوونبکه.

4. **ڕێکخەربە** وێنەیێ بەرامبەر کوپی بکه و پاشی تەمامبکه. ئەوا تو ژ ئێك ل دویڤ ئێکان فێربووی ب کورتی تێدا بنڤیسه.

پێناسەیا ئێك ل دویڤ ئێکێ	دوو جۆرێن ئێك ل دویڤ ئێکێ
نموونه	دوو ڕێسایێن گونجای بۆ پێناسێ

ئێك ل دویڤ نیە

فێربە

1-6 ڕاهێنان

ڕاهێنانێن ئاراستەکری

1 **زاراڤ** پێناسەیا ——— بۆ ئێك ل دویڤ ئێکەکێ پێناسەیەکە ڕێکێ ددەت بۆ پەیداکرنا ڕادەیێ وێ یێ n ی ب زانینا ڕادەیێ بەرێ یان ڕادەیێن بەرێ وێ [نە ئاشکەرا یان ئاشکەرا].

بەرێ خۆ بدە نموونه 1

پێنج ڕادەیێن ئێکێ بۆ هەر ئێك ل دویڤ ئێکەکێ بهەژمێرە.

2 $a_n = 4a_{n-1} - 1 \; ; \; a_1 = 1$ **3** $a_n = a_{n-1} + 11 \; ; \; a_1 = 3$ **4** $a_n = \frac{a_{n-1}}{5} \; ; \; a_1 = 500$

بەرێ خۆ بدە نموونه 2

5 $a_n = 12(n-2)$ **6** $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ **7** $a_n = -3n^2$

8 $a_n = n(n-1)$ **9** $a_n = 4^{n-1}$ **10** $a_n = (n+1)^2$

بەرێ خۆ بدە نموونه 3

پێناسەیەکا گونجای بۆ ڕادەیێ n یێ بۆ هەر ئێك ل دویڤ ئێکەکێ بنڤیسه.

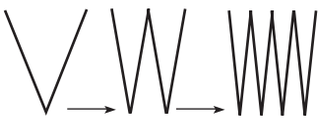
11 6, 9, 12, 15,18 , ... **12** $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$ **13** 25, 15, 5, −5, −15, ...

بەرێ خۆ بدە نموونه 4

14 **پاشەکەوت** داهاتیێ ئاواتێ ل ساڵا ئێکێ 25000000 دیناربوو. ل ساڵێن دویڤڕا داهاتیێ ئاواتێ د هەر ساڵەکێدا 5% زێدە دبوو ژ داهاتیێ وێ یێ ساڵا بۆری. ئەڤێ ئێك ل دویڤ ئێکێ ب وێنەیێ ڕوونکرنێ بنوێنه، و بەحسێ شێوازێ وێ بکه. داهاتیێ ئاواتێ پشتی 5 ساڵان دی بیته چەند؟ پشتی 10 ساڵان دێ بیته چەند؟

بەرێ خۆ بدە نموونه 5

15 **فراکتال** ژمارەیا پارچێن ڕاستەهێلان د وێنەیێن چارێ و پێنچێدا چەندە؟



ڕاهێنان و شیکارکرنا پرسیاران

پێنج ڕادەیێن ئێکێ بۆ هەر ئێك ل دویڤ ئێکەکێ بهەژمێرە.

16 $a_n = a_{n-1} - 3 \; ; \; a_1 = 7$ **17** $a_n = \frac{1}{n^2}$ **18** $a_n = 1.5a_{n-1} - 2 \; ; \; a_1 = 4$

19 $a_n = (2)^{n-1} + 8$ **20** $a_n = 2n^2 - 12$ **21** $a_n = -3a_{n-1} - 1 \; ; \; a_1 = -2$

ڕاهێنانێن نازاد

بۆ شیکارکرنا بەرێ خۆ بدە

پرسیاران	نموونه
16–18	1
19-21	2
22-24	3
25	4
26	5

پێناسەیەکا گونجای بۆ ڕادەیێ nێ بۆ هەر ئێك ل دویڤ ئێکەکێ بنڤیسە.

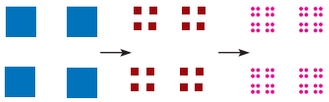
22 $2, 8, 18, 32, 50, \ldots$

23 $9, 5, 1, -3, -7, \ldots$

24 $5, 0.5, 0.05, 0.005, \ldots$

25 **دیزاین (نەخشەکێشان)** جهێن کورسیێن ئەندامێن ئۆرکسترایێ ل هولاّ مۆزیکا کلاسیکی هاتنە ڕێزکرن لسەر شێوەیێ نیڤ بازنەیی، کۆ سەروکێ ئورکسترایێ ل چەقێ ڕاوەستیابوو ژمارەیا کورسیێن ڕێزا ئێکێ 16 و هەر ڕێزەکێ بۆ ڕێزا د دیڤدا چوار کورسی زێدە دبن. ب وێنەیێ روونکرنێ ئێك ل دویڤ ئێکێ بنوێنە و بەحسێ شێوازێ وێ بکە. ژمارەیا کورسیێن ڕێزا شەشێ چەندن؟

26 **فراکتال** ژمارەیا چارگوشەیان د هەردوو وێنەیێن چوار و پێنجێدا بهەژمێرە.



پێنج ڕادەیێن ئێکێ د هەر ئێك ل دویڤ ئێکەکێدا بهەژمێرە.

27 $a_1 = 12$ ، $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + 2$

28 $a_1 = 1$ ، $a_n = \frac{2}{a_{n-1}}$

29 $a_1 = -10$ ، $a_n = -a_{n-1} + 10$

30 $a_n = 2n^2 - 12$

31 $a_n = 8 - \frac{1}{10}n$

32 $a_n = 5(-1)^{n+1} \times 3^{n-1}$

33 **شاشی د شیکارکرنێدا** ئەڤێن ل خوارێ دوو شێوازن بۆ پێنج ڕادەیێن ئێکێ بۆ ئەڤێ ئێك ل دویڤ ئێکێ $a_1 = 3$ ، $a_n = 2n + 1$، کیژ وان نەیا دروستە، شاشییا وی دیاربکە.

أ

3, 5, 7, 9, 11

ب

3, 7, 15, 31, 65

پێناسەیەکا گونجای بۆ ڕادەیێ nێ بۆ هەر ئێك ل دویڤ ئێکەکێ بنڤیسە، و ڕادەیێ دەهێ بنڤیسە.

34 $16, 4, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \ldots$

35 $\frac{15}{9}, \frac{14}{9}, \frac{13}{9}, \frac{12}{9}, \frac{11}{9}, \ldots$

36 $-5.0, -2.5, 0, 2.5, 5.0, \ldots$

37 $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

38 $0.04, 0.4, 4, 40, 400, \ldots$

39 $24, 21, 16, 9, 0, \ldots$

40 **فیبوناتشی** ل بیرا تەبیت کۆ ئێك ل دویڤ ئێکا فیبوناتشی دبیتە نموونەیەك بۆ خواندنا ژمارەیا جوتێن کێفریشکان پشتی چەند هەیڤێن دیارکری، ئەڤ ئێك ل دوورڤ ئێکە ب ژمارەیا 1 و پاشی ژمارەیا 1 دەستپێدکەت، و هەر ڕادەیەك دبیتە سەرجەمێ هەردوو ڕادەیێن بەری وی.

أ دوازدە ڕادەیێن ئێکێ ژ ئەڤێ ئێك ل دویڤ ئێکێ بهەژمێرە.

ب ژمارەیا جوتێن کێڤریشکان لدوماهیا ساڵەکێ دێ بنە چەند؟

41 **شترەنج** سەرمەدی قارەمانیەکا شترەنجێ ڕێکخست، کۆ هەر یاریزانەك بتنێ جارەکێ یاریێ دگەل هەموو یاریزانان بکەت. خشتەیەکێ دروست بکە و تێدا دیاربیت کو زێدەکرنا هەر یاریزانەکێ نوی دبیتە هۆیێ ئەوێ چەندێ کو ژمارەیا یارییان ژ ئێك یاریێ زێدەتر بیت.

قارەمانیا شترەنجێ	
ژمارا یاریزانان	ژمارا یارییان
1	0
2	1
3	3
4	6
5	10

أ ئەڤێ ئێك ل دویڤ ئێکێ ب وێنەیێ روونکرنێ بنوێنە بەحسێ شێوازێ وی بکە ڕادەیێن ل دووڤدا چنە؟

ب لارێ راستەهێلێ بکاربینە بۆ دەرئینانا ڕێسایا ئێك ل دویڤ ئێکێ.

ج **دێ چ بیت هەکەر...؟** خشتە دێ چەوا هێتە گوهۆڕین هەکەر هەر یارزانەك دوو جاران دگەل هەر یاریزانەکی ژ یاریزانێن دی بکەت؟ خشتەکێ دروست بکە، و دیاربکە کا چەوا ئێك ل دویڤ ئێك دێ هێتە گوهۆڕین.

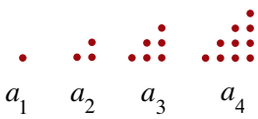
دەروازەیەك

لسەر میژوویا بیرکاریێ

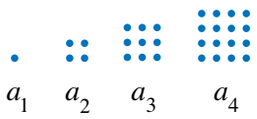
ئێك ل دویڤ ئێکا فیبوناتشی دهێتە بکارئینان بۆ دیارکرنا ڕێژەیا زێرین. ڕێژەیا هەر ڕادەیەکێ بۆ ڕادەیێ بەری وی نێزیکی ڕێژەیا زێرین $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ دبیت هەر چەند خانەیا ڕادەی زێدەببیت.

ژمارا خالێن هەر وێنەیەکێ ل خوارێ، د هەر ئێك ل دویڤ ئێکەکێدا بهەژمێرە.

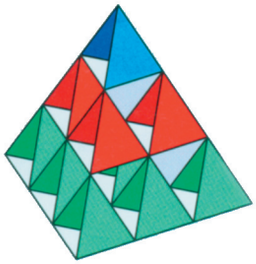
42



43



44 تەنێ بەرامبەر ژ شێوەیەکێ ئەندازەی پێکدهێت. هەر ئێك ژ وان ژ 6 زلکێن شخاتێ یێن درێژی یەکسان هاتیە دروستکرن. شێوەیەك ل بەشێ سەری هەیە و 3 شێوە ل تەختێ دووێ هەنە و 6 شێوە ل تەختێ سێیێ هەنە و هەروەسا ...

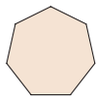
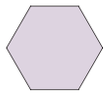
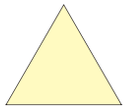


أ ڕێسایا $a_n = a_{n-1} + 6n$ ڕێسایەکە بۆ هەژمارتنا ژمارا زلکێن شخاتێ د تەختێ (n) ی دا. پێنج ڕادەیێن ئێکێ بۆ وێ ئێك ل دویڤ ئێکێ بهەژمێرە دەمێ $a_1 = 6$.

ب لارێ هێلی بۆ دیارکرنا ڕێسایا ئەڤێ ئێك ل دویڤ ئێکێ بکاربینە.

ج چەند زلکێن شخاتێ بۆ دروستکرنا تەختێ دووی دڤێن.

45 **ئەندازە:** خشتەیێ ل خوارێ سەرجەمێ پیڤانێن گۆشەیێن ژناڤدا بۆ پێنج چەند لایێن ڕێك دیاردکەت.

سەرجەمێ پیڤانێن گۆشەیێن ژ ناڤدا				
				
900°	720°	540°	360°	180°

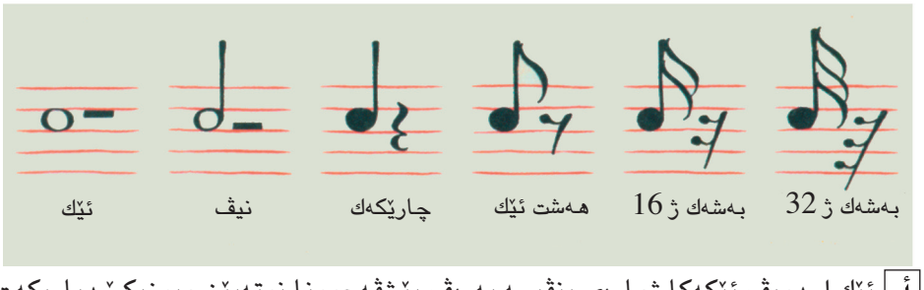
أ پێناسەیەکا ئاشکەرا بۆ ئەڤێ ئێك ل دویڤ ئێکێ بنڤیسە. سەرجەمێ پیڤانێن گۆشەیێن ژناڤدا یێ چەند لایەکی ڕێك بهەژمێرە، هەکەر ژمارا لایێ وێ 12 بیت.

ب ل بیرا تەبیت کو پیڤانێن گۆشەیێن ژناڤدا یێن چەند لایەکی دیەکسانن. خشتەیەکی دروستبکە پیڤانا هەر گۆشەیەکا ژناڤدا یا چەند لایەکی ڕێك دیار بکەت، پێداییێن خشتەی ب وێنەیێ ڕوونکرنێ بنوینە، بەحسێ ئەوی شێوازی بکە.

ج پێناسەیا ئاشکەرا بۆ ئێك ل دویڤ ئێکا لقێ (ب) بنڤیسە.

د پیڤانا گۆشەیا ژناڤدا یا دەهـ لایەکی ڕێك بهەژمێرە.

46 **خەملاندن:** بهایێ ڕادەیێ بیستی د ڤێ ئێك ل دویڤ ئێکێ دا دیاربکە: 7.94, 8.935, 9.93, 10.925, 11.92, ...

47 **میوزیك** وێنەیێ ل خوارێ دەمێ نۆتەیێن میوزیکێ یێن جیاواز دیاردکەت:

أ ئێك ل دویڤ ئێکەکا ژمارەی بنڤیسە بەرەڤ پێشڤەچوونا نوتەیێن میوزیکێ دیاربکەت. پێناسەکا ئاشکەرا و ئیکا نەدیار بۆ ئەوێ ئێك ل دویڤ ئێکێ بنڤیسی.

ب نۆتەیەکا تەمام 4 بیت (Beats) و نیڤ نۆتە 2 بیت و چارێکا نۆتێ 1 بیت و هەروەسا ئێك ل دویڤ ئێکەکێ بنڤیسە ژمارا بیتەیێن نۆتەیەکێ پشتی یەکەیێن ل سەری بنوێنیت. پێناسەیەکا نە دیار و پێناسەیەکا ئاشکەرا لسەر ئەڤێ ئێکێ ل دویڤ ئێکێ بنڤیسە. پەیوەندی چییە لناڤبەرا ئەڤێ ئێك ل دویڤ ئێکێ و ئێك ل دویڤ ئێکا لقێ أ؟

48 **بنڤیسە** جیاوازیا ل ناڤبەرا ئێك ل دویڤ ئێکەکا بدوماهیك هاتی و ئێکا دی یا بدوماهیك نەهاتی ڕوونبکە.

ئامادەکرن بۆ ئەزموونێ

49 کیژ ئەڤان دبیتە ڕادەیێ د دویڤدا د ڤێ ئێك ل دویڤ ئێکیدا؟ ... ,−9 ,−6 ,−3 ,0

أ) −3　　ب) 0　　ج) 3　　د) 6

50 کیژ ئەڤانێن ل خوارێ دبیتە ڕێسایا ئەڤێ ئێك ل دویڤ ئێکێ ... 4, 12, 36, 108,

أ) $a_n = 4 + 3n$　　ج) $a_1 = 4$ ؛ $a_n = 3a_{n-1}$ دەمێ $n \geq 2$

ب) $a_n = 3 + 4n$　　د) $a_1 = 3$ ؛ $a_n = 4a_{n-1}$ دەمێ $n \geq 2$

51 ڕێسایا کیژ ئێك ل دویڤ ئێکێ دبیتە $a_n = \frac{2n}{n+1}$

أ) $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \frac{10}{11}, \ldots$　　ج) $1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \ldots$

ب) $0, 1, 2, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \ldots$　　د) $2, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \frac{12}{7}, \ldots$

52 کیژ ئێك ل دویڤ ئێکەیە کو ڕێسایا وێ دبیتە $a_1 = 6$؛ $a_n = 12 - 2a_{n-1}$ دەمێ $n \geq 2$

أ) 6, 4, 2, 0, −2, −4, ...　　ج) 0, 12, −12, 36, −60, ...

ب) 6, 0, 12, −12, 36, ...　　د) 6, 0, −6, −12, −18, ...

53 **بەرسڤەکا کورت** ڕادەیێ د دویڤدا بۆ ڤێ ئێك ل دویڤ ئێکێ... ,−2 ,4 ,−8 ,16 ,−32 بهەژمێرە؟

بەرهنگاری و بەرفرەهکرن

پێناسەیەکا ئاشکەرا بۆ هەر ئێك ل دویڤ ئێکەکێ بنڤیسە، و ڕادەیێ دەهێ بهەژمێری.

54 $-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 8, \frac{61}{3}, \frac{122}{3}, \ldots$

55 −2, 6, −12, 20, −30, ...

56 0.9, 0.8, 0.6, 0.3, −0.1, ...

57 **ئەندازە** 5 بازنان بکێشە. خالەکێ لسەر بازنا ئێکێ دانە و دوو خالان لسەر بازنا دووێ دانە و 3 خالان لسەر بازنا سێیێ دانە و هەروەسا... ، هەردوو خالان دهەر بازنەکێدا بگەهینە ئێك دوو، پترترین دەڤەرێن ئێکودوونەبڕین د هەر بازنەکێدا بژمێرە.

أ ئەڤ ئێك ل دویڤ ئێکا بدەست تە کەفتی بنڤیسە.

ب وەسا یا دیارە کو هەر ڕادەیەك دوو جارانی ڕادەیێ بەری خۆیە، لێ ڕادەیێ شەشێ یی دیارە کۆ کێمترە ژ 32 ێ. بزاڤێ بکە ئەڤان دەڤەرێن د بازنا شەشێ دا ب هووری دیاربکە ب دروستکرنا وێنەیەکی ڕێك و پێك.

پێداچوونا لولپێچی

هەر بڕەکی ب سادەترین شێوە بنڤیسە، وەسا دانە کۆ یا پێناسەکریە. (پۆلێن پێشتر)

58 $\frac{x^2-9}{x^2+5x+6}$

59 $\frac{4x^2-5x}{8x^2+18x-35}$

60 $\frac{4x-12}{x^2-25} \div \frac{8x-24}{2x-10}$

61 $\frac{x^2-5x-6}{x^2-3x-18} \times \frac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$

کۆم بکە یان لێدەربکە. (پۆلێن پێشتر)

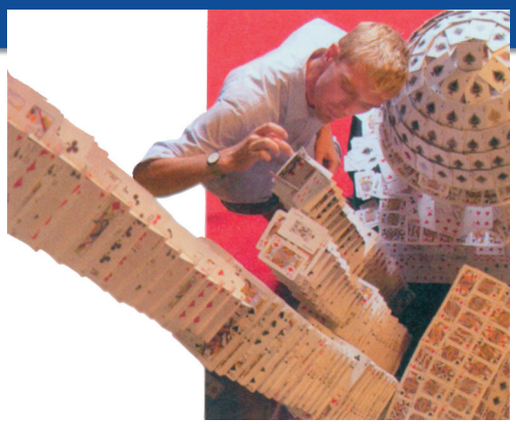
62 $\frac{2x-3}{x+1} + \frac{4x-9}{x-1}$

63 $\frac{9x}{8x-4} - \frac{10x+3}{12x-6}$

64 $\frac{x^2}{2x+7} - \frac{x}{x+2}$

65 **ئەدەب** کرمانجی ب تێکرایێ بەرپەڕەك ونیف بەرپەر د خولەکەکێدا دخواند ژ پەرتووکەکا ژ 854 بەرپەران پێك هاتی. خشتەیەکی دروستبکە و نەخشەیەکێ بنڤیسە کۆ ژمارەیا بەرپەرێن ماین p بنوێنیت پێ دەمی t . وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ وێ نەخشەیێ بنڤیسە.

2-6 زنجیره
Series



بوچی ئەم فێڕی قێ دبین؟

تۆ دشێی سەرجەمێن ئێك ل دویڤ ئێكان بكارینی بۆ هەژمارتنا پیڤانێن خانیەكی كۆ ب كارتونان هاتبیتە ئاڤاكرن (نموونە 4).

ئارمانج

• سەرجەمێ ئێك ل دویڤ ئێكی د هەژمێرن و دنڤیسن بكارئینانا هێمایێ سەرجەمی.

زاراڤ
Vocabulary

زنجیرە
Series

سەرجەمێ بەشی
Partial sum

هێمایێ سەرجەمی
Summation symbol

تۆ یێ فێربووی دوانەیێن بۆریدا دێ چەوا ڕادەیێ n ی بۆ ئێك ل دویڤ ئێكەكێ هەژمێری. هندەك جاران تو دشێی سەرجەمێ هندەك ڕادەیێن ئێك ل دویڤ ئێكێ بهەژمێری، بۆ دەربڕینا ئەڤی سەرجەمی زنجیرە بكاردهێیت، خشتەیێ ل خوارێ نموونەیەكێ لسەر ئەڤێ دیاردكەت.

ئێك ل دویڤ ئێك	1, 2, 3, 4	2, 4, 6, 8, ...	$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$
زنجیرە	$1+2+3+4$	$2+4+6+8+\ldots$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$

چونكی پڕانیا ئێك ل دویڤ ئێكان بدوماهیك نەهاتینە، لەورا بەهرا پتر سەرجەمێ بەشی دهێتە بكارئینان.

سەرجەمی بەشی هێمایێ S_n بۆ دهێتە دانان، كۆ دبیتە سەرجەمێ n ڕادەیان ژ ڕادەیێن ئێكێ بۆ ئێك ل دویڤ ئێكێ.

$S_1=2$ سەرجەمێ ڕادەیێ ئێكێ

$S_2=2+4=6$ سەرجەمێ هەردوو ڕادەیێن ئێكێ

$S_3=2+4+6=12$ سەرجەمێ هەرسێ ڕادەیێن ئێكێ

$S_4=2+4+6+8=20$ سەرجەمێ هەرچوار ڕادەیێن ئێكێ

تو دشێی دەربڕینێ ژ زنجیرەیێ بكەی بكارئینانا هێمایێ سەرجەمی Σ لسەر ئەڤی شێوەیی.

$\sum_{k=1}^{k=5} 2k$ ← پێناسەیا دیار بۆ ئێك ل دویڤ ئێكێ

$k=1$ → بهایێ k یێ ئێكێ

$k=5$ → بهایێ k یێ دوماهیكێ

نموونە 1 بكارئینانا هێمایێ سەرجەمی

هەر زنجیرەكێ بكارئینانا هێمایێ سەرجەمی بنڤیسە.

أ $3+6+9+12+15$

پێناسەیا دیار بۆ ئەڤێ ئێك ل دویڤ ئێكێ دەربینە $a_k=3k$ پێناسەیا دیار

سەرجەمێ پێنج ڕادەیێن ئێكێ بنڤیسە $\sum_{k=1}^{k=5} 3k$ هێمایێ سەرجەمی بكاربینە

ب $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}$

پێناسەیا دیار بۆ ئەڤێ ئێك ل دویڤ ئێكێ دەربینە $a_k=(-1)^{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ پێناسەیا دیار

سەرجەمێ شەش ڕادەیێن ئێكێ بنڤیسە $\sum_{k=1}^{k=6}(-1)^{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ هێمایێ سەرجەمی بكاربینە

هشیاربە!

بۆ وان ئێك ل دویڤ ئێكێن نیشانا ڕادەیێن وان ل دویڤ ئێك دهێنە گوهۆڕین $(-1)^{k+1}$ بكاربینە. هەگەر نیشانا a_1 یا $(+)$ بیت و $(-1)^+$ بكاربینە هەگەر نیشانا a_1 یا $(-)$ بیت.

خالا چاڤدێری

1. ئەڤێ زنجیرەیێ بنڤیسە بكارینانا هێمایێ سەرجەمی

أ $\frac{2}{4}+\frac{2}{9}+\frac{2}{16}+\frac{2}{25}+\frac{2}{36}$

ب $-2+4-6+8-10+12$

نموونـــــه 2 هەژمارکرنا بهاییێن زنجیرەیان

ئەڤێ زنجیرەیێ ڤەکە و بهایێ وێ بهەژمێرە.

أ $\sum_{k=3}^{k=6} \frac{1}{2^k}$

زنجیرەیێ ڤەکە ب دانانا بهایێ k هێزان بهەژمێرە سادەبکە

$$\sum_{k=3}^{k=6} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6}$$
$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$$
$$= \frac{8}{64} + \frac{4}{64} + \frac{2}{64} + \frac{1}{64} = \frac{15}{64}$$

ب $\sum_{k=1}^{k=4} (10 - k^2)$

ڤەکە $\sum_{k=1}^{k=4} (10-k^2) = (10-1^2) + (10-2^2) + (10-3^2) + (10-4^2) = 10$

ئاگەهداربە!

چێدبیت هندەک ئێک ل دویڤ ئێک ب ڕادەیێ a_k دەست پێ بکەن دەمێ $k \neq 1$ هەر وەکی د نموونەیا 2 – أ ێدا.

خالا چاڤدێرییێ

2. ئەڤێ زنجیرەیێ ڤەکە وبهایێ وێ بهەژمێرە.

أ $\sum_{k=1}^{k=4} (2k-1)$ ب $\sum_{k=1}^{k=5} -5(2)^{k-1}$

ل هەموو دەمان هەژمارتنا سەرجەمێ ژمارەیا ڕادەیێن ئێك ل دویڤ ئێکی نەیا بساناهییە. لێ یا دشیاندایە ڕێسایەکێ بۆ هەژمارتنا سەرجەمێ ڕادەیێن ئێکێ ل هندەك ئێك ل دویڤ ئێکێن تایبەت دیاربکەی. **زنجیرەیا نەگۆر** زنجیرەکە هەموو ڕادەیێن وێ یەکسانن: $3+3+3+3+3$

$$\sum_{k=1}^{k=5} 3 = \underbrace{3+3+3+3+3}_{\text{ژمارەیا ڕادەیان 5}} = 5\text{x}3 = 15$$

سەرجەمێ ڕادەیێن ئێکێ بۆ زنجیرەیا نەگۆڕ دبیتە $\sum_{k=1}^{k=n} c = nc$

$$\sum_{k=1}^{k=n} a = \underbrace{c+c+\ldots+c}_{\text{ژمارا ڕادەیان } n} = c \times n$$

زنجیرەیا هێلی زنجیرەکە بۆ هەژمارتنێ، وەکی سەرجەمێ ژمارەیێن سروشتییێن ئێکێ هەتا خانەیەکا دیارکری. سەرجەمێ 10 ژمارەیێن ئێکێ (ژبلی سفرێ) دبیتە:

$$\sum_{k=1}^{10} k = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$$

ڕێزکرنا ژمارەیان دووبارەبکە.

$$= (1+10)+(2+9)+(3+8)+(4+7)+(5+6)$$
$$= 11+11+11+11+11 = 5\times 11 = 55$$

بەرێ خو بدێ کو نیڤا ژمارا ڕادەیان $= 5$ و $11 = 1+10$ دبیتە سەرجەمێ ڕادەیێ ئێکێ و ڕادەیێ دوماهیکێ. ئەڤ تێبینیە ڕێکێ ددەتە تە بۆ پێشبینیێ کۆ سەرجەمێ ژمارەیێن سروشتی هەتا خانەیا n (ژبلی سفرێ) دبیتە $\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n}{2}(n+1)$ یان $\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

فێربە و شرۆڤەبکە

یاساییێن سەرجەمێ هندەک زنجیرەیان

زنجیرەیا نەگور	زنجیرەیا هێلی	زنجیرەیا دووجایی
$\sum_{k=1}^{k=n} a = na$	$\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}$	$\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

نموونـــــه 3 بکارئینانا یاساییێن سەرجەمێ هندەك زنجیرەیان

بهایێ ئەڤێ زنجیرەیێ بهەژمێرە.

أ $\sum_{k=1}^{k=6} 8$ زنجیرەیا نەگوٚرە

ڕێکا ئێکێ: یاسایا سەرجەمی بکاربینە، زنجیرێ 6 ڕادە هەنە.

$$\sum_{k=1}^{k=6} 8 = na = 6 \times 8 = 48$$

ڕێکا دووێ: سەرجەمێ ڤەکە و بهەژمێرە.

$$\sum_{k=1}^{k=6} 8 = \underbrace{8+8+8+8+8+8}_{\text{6 ڕادە}} = 48$$

ب $\sum_{k=1}^{k=5} k$ زنجیرەیەکا هێلیێە

ڕێکا ئێکێ: یاسایا سەرجەمی بکاربینە:

$$\sum_{k=1}^{k=5} k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{5\times6}{2} = 15$$

ڕێکا دووێ: ڤەکە و سەرجەمی بهەژمێرە.

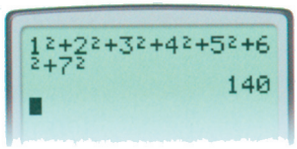
$$\sum_{k=1}^{k=5} k = 1+2+3+4+5 = 15$$

ج $\sum_{k=1}^{k=7} k^2$ زنجیرەیا دووجاییە

ڕێکا ئێکێ: یاسایا سەرجەمی بکاربینە.

$$\sum_{k=1}^{k=7} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{7(7+1)(2\times7+1)}{6} = \frac{56(15)}{6} = 140$$

ڕێکا دووێ: ڤەکە و سەرجەمی بهەژمێرە بژمێرا ڕوونکرنێ بکاربینە.



ئاگەهداری!

دەمێ ڕادەیێن زنجیرەکی دهەژمێری، دقێت ژمارا ڕادێ ئێکێ و دووماهیکێ تێدا بیت، ژمارا ڕادەیێن زنجیرەیا $\sum_{k=5}^{k=10} 8$ دبیتە 6 نەك 5 چونکی بهایێن k دبنە $k = 5,6,7,8,9,10$

خالا چاڤدێریێ

3. بهایێ هەر زنجیرەیەکێ بهەژمێرە

أ $\sum_{k=1}^{k=60} 4$ **ب** $\sum_{k=1}^{k=15} k$ **ج** $\sum_{k=1}^{k=10} k^2$

نموونـــــه 4 بجهئینان لسەر شیکارکرنا پرسیاران

شیکارکرنا پرسیاران

سیپانی دقێت خانییەکی ژ کارتێن یاریکرنێ دروستبکەت کو ژمارە یا وان 52 دانەنە. هەر وەکی ل ویٚنەیێ بەرامبەر دیار، و دقێت پترترین ژمارە نهۆمان دەست بکەڤیت. ئەو دشێت چەند نهۆمان دروستبکەت؟

1 پرسیارێ تێبگەهە

داخوازی زانینا ژمارا نهۆمانە

زانیارییێن گرنگ دیاربکە:

- ژمارەیا کارتان 52 دانەنە
- داخوازی پترترین نهۆم بهێنە دروستکرن.

2 پلانێ دانە

هێلکارەکی بۆ خانی بکێشە ژ بۆ باشترین تێگەهشتنا پرسیارێ. شێوازەکی بۆ ژمارا کارتان ل هەر نهۆمەکێ بهەژمێرە.

3 شیکاربکه

خشتەیێ وێنەیێ وی دروستبکه.

نهۆم	1	2	3	4
وێنه				
ژمارەیا کارتان	2	5	8	11

ژمارا کارتان ژ نهۆمەکێ بۆ نهۆمەکا دی 3 کارتە زێدە بن، زنجیرەکێ بنقیسە کو ژمارا کارتان د n نهۆمێ دا دیاربکەت.

$\sum_{k=1}^{k=n}(3k-1)$ دەمێ k هێمایێ خانەیا نهۆمێ بیت و n ژمارا نهۆمان بیت.

$$\sum_{k=1}^{k=4}(3k-1)=(3\times1-1)+(3\times2-1)+(3\times3-1)+(3\times4-1)=26$$

$$\sum_{k=1}^{k=5}(3k-1)=(3\times1-1)+(3\times2-1)+(3\times3-1)+(3\times4-1)+(3\times5-1)=40$$

$$\sum_{k=1}^{k=6}(3k-1)=(3\times1-1)+(3\times2-1)+(3\times3-1)+(3\times4-1)+(3\times5-1)+(3\times6-1)=57$$

چونکی ژمارا کارتان 52 کارتەنە، لەورا پترترین ژمارا ئەوان نهۆمێن بدەست سیپان دکەڤن دبنە 5 نهۆم.

4 ساخبکه

خشتەیی بکاربینە بۆ تمامکرنا شێوازێ نهۆما پێنجێ، 14 کارتە تێدا دهێنە، بکارئینان $S_5=2+5+8+11+14=40$. هەکەر سیپانی بقێت نهۆمەکا دی زێدەبکەت ئەو دێ پێدڤی ژمارەیەکا زێدەتر یا کارتان بیت ژ ئەوێن ماین کو ژمارا وان دبنە 12 کارتە.

4. پشتی هێوا ئاڤدانا باغچێ خو تمامکر ئەوی سۆندەپێچا و هەلگرت. دریژیا هەر پێچەکا سۆندەی ب 6 cm زێدەتربوو ژ پێچا بەری وێ. هەکەر دریژیا پێچا ئێکێ 34 cm بیت، ئەرێ دریژیا سۆندەی چەندە، هەکەر ژمارا پێچان 12 پێچەبن.

هزربکه و گەنگەشێ بکه

فێربه و ژبەربکه

1. جیاوازیێ لناڤبەرا ئێك ل دویڤ ئێکێ و زنجیرێ روونبکه.
2. هێمایێ هەر گۆراوەکی چییە د $\sum_{k=1}^{k=n}k$ دا.
3. رێکخەربە، خشتەیی دووبارە بنقیسی و پاشی تەمامبکه. شێوەیەکی گشتی بۆ هەر زاراڤەکی بنقیسه. نموونەیەکێ بۆ بینه.

	ئێك ل دویڤ ئێك	زنجیره
شێوەیێ گشتی		
نموونه		

2-6 ڕاهێنان

ڕاهێنانێن ئارڕاستەکری

1 **زاراڤ** نموونەیەکێ بینە بۆ بکارئینانا هێمایێ سەرجەمی.

بەری خۆ بدە نموونە 1

بکارئینانا هێمایێ سەرجەمی ئەڤێ زنجیرەیێ بنڤیسە.

2 $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}$

3 $-3+6-9+12-15$

4 $1+10+100+1000+10\ 000$

5 $100+95+90+85+80$

بەری خۆ بدە نموونە 2

ئەڤێ زنجیرەیێ ڤەکە و بهایێ وێ بهەژمێرە.

6 $\sum_{k=1}^{k=5} k^3$

7 $\sum_{k=1}^{k=4} (-1)^{k+1}\frac{12}{k^2}$

8 $\sum_{k=5}^{k=10} -5k$

بەری خۆ بدە نموونە 3

بهایێ ئەڤێ زنجیرەیێ بهەژمێرە.

9 $\sum_{k=1}^{k=21} k$

10 $\sum_{k=1}^{k=20} k^2$

11 $\sum_{k=15}^{k=35} 6$

بەری خۆ بدە نموونە 4

12 **پارەدان** کارزان هەیڤانە 500 142دیناران قستێ خۆ ددەت، ژ بهایێ ترومبێلا وی کڕی. دێ پشتی دوو سالان چەندێ دەت؟ پشتی 5 سالان دێ چەندێ دەت؟

ڕاهێنان و شیکارکرنا پرسیاران

ڕاهێنانێن ئازاد

بۆ شیکارکرنا پرسیاران	بەری خو بدە نموونە
16–13	1
19–17	2
22–20	3
23	4

بکارئینانا هێمایێ سەرجەمی ئەڤێ زنجیرەیێ بنڤیسە.

13 $1.1+2.2+3.3+4.4+5.5$

14 $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}$

15 $11-12+13-14+15-16$

16 $1+2+4+8+16+32$

ئەڤێ زنجیرەیێ ڤەکە و بهایێ وێ بهەژمێرە.

17 $\sum_{k=1}^{k=5} 8(k+1)$

18 $\sum_{k=2}^{k=7} (-2)^k$

19 $\sum_{k=1}^{k=4} \frac{k-1}{k+1}$

بهایێ هەر زنجیرەیەکێ بهەژمێرە.

20 $\sum_{k=1}^{k=99} k$

21 $\sum_{k=11}^{k=88} 2.5$

22 $\sum_{k=1}^{k=25} k^2$

23 ل کۆگەهەکا مەزن قودیکێن پەنیری ب چەند تەخان لسەر ئێك دانینە، کو ل تەخێ سەری ئێك قودیکا دانای، ل هەر تەخەکێ ئێك قۆدیك زێدەترە ژ تەختێ د سەر وێ دا. چەند قۆدیك دانینە هەکەر ژمارا تەخەیان 20 تەخبن.

ئەڤێ ئێك ل دویڤ ئێکێ بنڤیسە بکارئینانا هێمایێ سەرجەمی.

24 $-1+4-9+16-25+36$

25 $25+24+23+\ldots+2+1$

26 $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}$

27 $-800-80-8-0.8-0.08$

28 $10.8+10.5+10.2+9.9$

29 $9-16+25-36+49-64$

30 $-3.9+4.4-4.9+5.4-5.9$

31 $0+3.4+6.8+10.2+13.6$

32 $3+\frac{3}{2}+1+\frac{3}{4}+\frac{3}{5}$

33 $1000+100+10+1+\frac{1}{10}$

34 **گەشت** دووری ل ناڤبەرا بەغدا و باژێرێ هەکاری 596 km . هەکاری بڕیاردا کۆ نیڤا دووریێ ل روژا ئێکێ ببڕیت و نیڤا مایی ل ڕۆژا دووێ، و نیڤا مایی ل ڕۆژا سێیێ، و هەروەسا.....
بکارئینانا هێمایێ سەرجەمی زنجیرەیەکێ بنڤیسە کۆ سەرجەمێ ئەوێ دووریيا هەکاری بڕی د 5 ڕۆژاندا بنوێنت. چەند کیلومتر هەکاری د ئەوان 5 ڕۆژاندا بڕین؟

35 **پشت ڕاستی:** ڕێڤەبەرێ گەنجینەیەکێ ڕێیا داریێ بکاردئینیت بۆ ئاگەهدارکرنا کارمەندێن خۆ ل دەمێ بڕیارێ ددەت بۆ داخستنا گەنجینەیێ ل بارێن تەنگافیێ، ئەو ڕێیە ئەڤەیە ئاگەهدارکرنا سێ کارمەندانا ژ لایێ ڕێڤەبەری بۆ داخستنا قفلێن گەنجینەیێ، و هەر ئێك ژ وان کارمەندان سێ کارمەندێن دی ئاگەهدار بکەت.

أ هێلکاریێ داریێ بۆ 3 ئاستان دروستبکە کو ئەڤێ ڕێکێ بنوێنت:

ب زنجیرەکێ بنڤیسە ژمارا وان کارمەندێن هاتینە ئاگەهدارکرن بنوێنیت هەتا ئاستێ (5)، و بهایێ ئەوێ زنجیرێ بهەژمێرە.

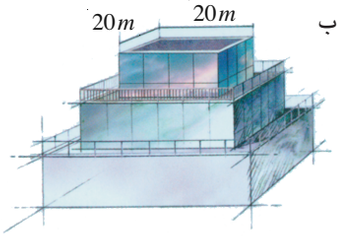
ج **دێ چ بیت هەکەر...؟** وەسا دانە کو ڕێڤەبەری ئاگەهداریا 5 کارمەندان کر ل جهی 3 یان د هەر ئاستەکیدا. ئەرێ ژمارا وان کارمەندێن زێدە ئەوێن د 5 ئاستاندا هاتینە ئاگەهدارکرن چەندە؟

هەر زنجیرەکێ ڤەکە و بهایێ وێ بهەژمێرە.

36 $\sum_{k=1}^{k=6}(k^2+1)$ **37** $\sum_{k=1}^{k=6}(-1)^k(5k)$ **38** $\sum_{k=3}^{k=6}\frac{1}{2k}$

39 $\sum_{k=1}^{k=6}(3k-2)$ **40** $\sum_{k=6}^{k=11}12(k-2)$ **41** $\sum_{k=1}^{k=5}\frac{k^2}{5k}$

42 **ئاڤاهی** ئەڤ وێنەیێ بەرامبەر مودێلا ئوتیلەکێ لسەر شێوێ هەرەمەکی دیاردکەت. هەر نهۆمەك ب شێوەیێ شەشپالوێیە. درێژیا هەر لایەکی وێ ب 10 m زێدەترە ژ درێژیا نهۆما دکەفتە دسەر وێ دا.



أ زنجیرەکێ بنڤیسە بۆ نواندنا سەرجەمێ ڕووبەرێ n نهۆمێن ژ ڤێ ئوتێلێ.

ب کێمترین ژمارەیا نهۆمان چەندە دەمێ سەرجەمێ ڕووبەرێن هەموو نهۆمان نە کێمتر بیت ژ $50000\ m^2$ ؟

خەملاندن **ب هزری هەر سەرجەمەکی بخەملینە. پاشی خەملاندنا خۆ دگەل ئەوی سەرجەمێ بژمێری هەژمارتی بەراوردبکە.**

43 $10+11+12+...+29+30$ **44** $1+3+5+...+97+99$

45 $(-2)+(-4)+(-6)+...+(-98)+(-100)$

46 **فیزیا** ئەڤ خشتەیێ بەرامبەر ئەوان دووراتیان دیاردکەت کو تەنەك دبڕت دەمێ ب سەربەستی دکەفتە خوارێ:

دووریێن کەفتنا خوارێ یا سەربەست ل هەر دەمەکی		
دەم	نموونەیا لیۆناردۆ	نموونەیا گالیلو
1	1	1
2	2	3
3	3	5
4	4	7
5	5	9

أ زنجیرەکێ د 5 دەمان دا بۆ هەر نموونەیەکێ بنڤیسە و بهایێ وی بهەژمێرە، هەر سەرجەمەك چ دنوینیت.

ب هەر زنجیرەکێ بکارئینانا هێمایێ سەرجەمی بنڤیسە، سەرجەمێ دەهـ ڕادەیێن ئێکێ بۆ هەر ئێکێ ژ وان بنڤیسە.

ج ئەو دووراتیێن تەنەك ل کەفتنا خوارێ یا سەربەست دبڕت ل دویڤ نموونەیا نۆکە ئەڤەنە 1, 4, 9, 16, 25, .. . بەراوردیێ بکە لناڤبەرا نموونەیێن لیۆناردۆی و گالیلو و ئەڤێ نموونەیا نۆکە کار پێ دهێتە کرن.

دەروازەیەك

لسەر مێژوویا بیرکاری

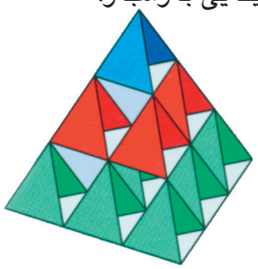
زانایێ بیرکاری یێ ئەلمانی فردریك گاوس، ل ژێرێ دەهـ ساڵیدا ڕێیەکا بلەز دیت بۆ هەژمارکرنا سەرجەمێ ژمارەییێن سروشتی ژ 1 هەتا 100 ێ. و ئەڤ ڕێکە بوو هۆیێ ڤەدیتنا ڕێیا هەژمارتنا سەرجەمێ ژمارەییێن سروشتی ژ 1 هەتا n دەمێ n هەر ژمارەیەکا سروشتی بیت.

47 **هزرکرنا ڕەخنەگر:** چێدبیت هندەك تایبەتمەندیێن بیرکاری لسەر زنجیران بهێنە بجهێنان.

أ سەرجەمێ هەر ئێکێ ژ ئەڤان بهەژمێرە $\sum_{k=1}^{k=10} 3k$ و $3\sum_{k=1}^{10} k$ دەستەواژەیەکێ بنڤیسە پالپشتیا ئەوا تو پێگەهشتی بکەت.

ب هەر ئێکێ ژ ئەڤان بهەژمێرە $\sum_{k=1}^{k=10} 2$ و $\sum_{k=1}^{k=10} k + \sum_{k=1}^{k=10}$ و $\sum_{k=1}^{k=10} (k+2)$. دەستەواژەیەکێ بنڤیسە پالپشتیا ئەوا تو پێگەهشتی بکەت.

48 زنجیرا $\sum_{k=1}^{k=n} (3k^2 + 3k)$ بکاربینە بۆ هەژمارتنا ژمارا زلکێن شخاتێ ئەوێن پێدڤی بۆ دروستکرنا هەر ڕەفکەکێ ژ n تەخان پێکهاتبیت، کو یا هاوشێوەیە دگەل ئەوێ هەرەما ل وێنەیێ بەرامبەر.



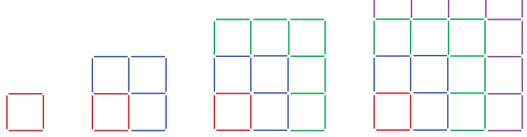
أ ئەوێ زنجیرێ بکاربینە بۆ هەژمارتنا ژمارا زلکێن شخاتێ ئەوێن پیدڤی بۆ دروستکرنا هەرەمەکێ ژ 5 تەخان پێکهاتبیت.

ب ئەڤێ ڕێسایێ.....

$\sum_{k=1}^{k=n} ax_k = a\sum_{k=1}^{k=n} x_k$ و ڕیسایا $\sum_{k=1}^{k=n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{k=n} a_k + \sum_{k=1}^{k=n} b_k$ بکاربینە بۆ نڤیسینا زنجیرا $\sum_{k=1}^{k=n} (3k^2 + 3k)$ وەك سەرجەمێ ئەنجامێ لێکدانا زنجیرەکا دووجای ل گەل ژمارەکێ و ئەنجامێ لێکدانا زنجیرەکا هێلی ل گەلەك ژمارەکێ بکاربینە.

ج ڕێسایێن سەرجەمێ زنجیرەیێن هێلی و دووجای و ئەوێن ل لقێ (ب) بدەست تە کەفتین بکاربینە بۆ هەژمارتنا ژمارا زلکێن شخاتێ ئەوێن پێدڤی بۆ دروستکرنا هەرەمەکێ ژ 17 تەخان پێکهاتبیت.

49 **پێنگاڤێن جۆرا و جۆر:** بەرێ خۆ بدە شێوازێ ل خوارێ، زلکێن شخاتێ بۆ دروستکرنا چارگۆشێ بکارهاتینە و دریژاهیا هەر لایەکی ل هەر جارەکێ ب ئێکێ زێدەکرییە.



أ ئێك ل دویڤ ئێکەکێ بنڤیسە بۆ نواندنا ژمارا وان زلکێن شخاتێ ئەوێن پێدڤی بۆ دروستکرنا چارگۆشەیەکێ.

ب بکارئینانا هێمایێ سەرجەمی زنجیرەکێ بنڤیسە بۆ نواندنا ژمارا وان زلکێن شخاتێ ئەوێن پێدڤی بۆ دروستکرنا چارگۆشەیەکێ دریژیا لایەکێ وێ 6 زلك بن. چەند زلك دڤێن بۆ دروستکرنا وێ چوار گۆشەیێ.

50 **هزرکرنا ڕەخنەگر:** ئەرێ سەرجەمێ $1+3+5+7+9$ یەکسانە دگەل سەرجەمێ $9+7+5+3+1$ ؟ ئەرێ ئەڤ هەردوو زنجیرە ب هەمان شێوە دهێنە نڤیسین بکارئینانا هێمایێ سەرجەمی.

51 **بنڤیسە** ئەوی هۆیێ روونبکە کو وە سالا S_n دکەت بەشەکی سەرجەمی بیت و نەك سەرجەمێ گشتی بیت بۆ هەموو ڕادەیێن ئێك ل دویڤ ئێکێ.

ئامادەکرن بۆ ئەزموونێ

52 کیژ ڤانێن ل خوارێ دبیتەڤەکریێ زنجیرەیا $\sum_{k=1}^{k=7} (-1)^k (3k)$ ؟

أ $3+6+9+12+15+18+21$

ب $-3+6-9+12-15+18-21$

ج $3-6+9-12+15-18+21$

د $-3-6-9-12-15-18-21$

53 کیژ ڤانێن ل خوارێ نڤیسینا زنجیرەیا $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}$ دنوینیت بکارئینانا هێمایێ سەرجەمی.

أ $\sum_{k=1}^{k=4} \frac{k}{2}$

ب $\sum_{k=1}^{k=4} \frac{1}{2^k}$

ج $\sum_{k=1}^{k=4} \frac{1}{2k}$

د $\sum_{k=1}^{k=4} \frac{1}{k+2}$

54 کیژ ئەڤان دبیتە بهایێ $\sum_{k=1}^{k=6} k^2$ ؟

أ) 36 ب) 55 ج) 91 د) 273

55 کیژ ئەڤان دبیتە بهایێ $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}$ ؟

أ) $\frac{1}{45}$ ب) $\frac{4}{45}$ ج) $\frac{7}{12}$ د) $\frac{5}{8}$

56 **بەرسڤەکا کورت:** هۆزانێ هەرەمەك ژ قودیکێن تەزیاتیان دروستکر، دەمێ نهۆما سەری ژ قودیکەکێ پێکهاتبوو، بەلێ نهۆما دبندا ژ 4 قودیکان پێکهاتبوو، و نهۆما دبنرا ژ 9 قودیکان پێکهاتبوو و یا چارێ ژ 16 قودیکان پێکهاتبوو... ئەرێ تۆ دێ ئێك ل دویڤ ئێکەکێ یان زنجیرەکێ بکارئینی بۆ دەرئینانا ژمارەیا قودیکان د نهۆما 20 یدا؟ ئەوێ چەندێ رووننبکە.

بەرهنگاری و بەرفرەهکرن

بکارئینانا هێمایێ سەرجەمی ئەڤێ زنجیرەیێ بنڤیسە، پاشی بهایێ وێ بینەدەر.

57 $1+2+3+...+1000$

58 $1^2+2^2+3^2+...+25^2$

سیفەتێن هەر زنجیرەکێ بسەلمێنە.

59 $\sum_{k=1}^{k=n} ax_k = a\sum_{k=1}^{k=n} x_k$

60 $\sum_{k=1}^{k=n}\left(a_k+b_k\right)=\sum_{k=1}^{k=n} a_k+\sum_{k=1}^{k=n} b_k$

61 **هزرکرنا رەخنەگر** لدویڤ هزرا تە بهایێ ڤێ زنجیرەیێ ... + 1−1 + 1−1 + 1−1 چەندە، هەکەر تو لسەر ڤی شێوەی یێ بەردەوام بی؟ ئەوێ چەندێ ڕوونبکە.

پێداچوونا لووپێچی

ئێکودووبڕینێن ئاسۆی و ستوونێ بۆ هەر راستەهێلەکێ دەربینە، پاشی وینەبکە (پولێن پێشتر)

62 $3x-4y=12$

63 $-6x+3y=-18$

64 $10x+15y=-5$

65 **ئاڤاهی** ئەڤ نەخشەیە $h(t)=8|t-6|+10$ دبیتە ڕێسایەك بۆ هەژمارکرنا بلندایا سەر ئێخەکێ ژ ئەردی ب پییان... دەمێ t ب چرکان بیت، کێمترین بلندایا سەرئێخێ چەندە؟ (پولێن پێشتر)

پێنج ڕادەیێن ئێکێ بۆ هەر ئێك ل دویڤ ئێکەکێ بینەدەر. (وانەیا 6 - 1)

66 $a_n=\left(\frac{1}{2}n+2\right)^2$

67 $a_n=\left(a_{n-1}\right)^2-1$ ؛ $a_1=2$

68 $a_n=\frac{4^n}{2}$

3-6

ئێك ل دویڤ ئێك و زنجیرەییێن ژمارەیی
Arithmetic Sequences and Series

ئارمانج

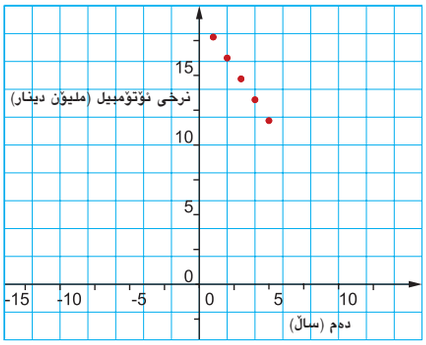
- هەژمارتنا ڕادەیەکێ داخوازکری دئێك ل دویڤ ئێکا ژمارەی دا.
- هەژمارتنا بەهایێن زنجیرەیێن ژمارەی.

زاراڤ
Vocabulary

ئێك ل دویڤ ئێکا ژمارەی
Arithmetic Sequence (Progression)
زنجیرەیا ژمارەی
Arithmetic Series

کێ ئەڤێ بکاردئینت؟

تو دشێی ئێك ل دویڤ ئیکا ژمارەی بۆ خەملاندنا کرێیا لێچویا پۆستێ بکاربینی.



سمکو ترومبێلەکا نوی کری ب 16 750 000 دیناران، ڕێڤەبەریا باجا دەرامەتی بهایێ وێ ترومبێلێ سالّ ل دویڤ سالێ ب ڤی شێوەی خەملاند: 17 750 000 ، 16 250 000 ، 14 750 000 ، 13 250 000 ، ... دبێژنە ڤێ ئێك ل دویڤ ئێکێ **ئێك ل دویڤ ئێکا ژمارەی** **Arithmetic sequence** چونکی جیاوازی d ل ناڤبەرا هەر ڕادەیەکی و ڕادەیێ ل پێش وی یا نەگۆرە و نابیتە سفر، دبێژنە ئەڤێ جیاوازیێ بنچینە **Common difference** و د ئێك ل دویڤ ئێکا سەری دا دبیتە 1 500 000 دینار.

ڕادە	a_1	a_2	a_3	a_4
بها	17 750 000	16 250 000	14 750 000	13 250 000
جیاوازی	−1500	−1500	−1500	

ل بیرا تەبیت کو جیاوازیێن ئێکێ ل ناڤبەرا بهایێن ڕادەیێن نەخشەیەکا هێلی جیاوازیەکا نەگۆرە. بەرێ خو بدە ئەڤێ: هەکەر جووتێ ڕێکخستی (n,a_n) ب وێنەیەکی روونکرنێ هاتە نواندن و هندەك خال بدەست تە کەفتن هەموو ئەو خالە دێ کەڤنە سەر ئێك راستەهێلی. و ب ڤی جۆری تو دشێی بەرێ خو بدەیە ئێك ل دویڤ ئێکا ژمارەی کو ئەو نەخشەیەکا هێلییە و بواری وێ کۆمەلّا ژمارەیێن سروشتییە.

نموونـــــە 1 جوداکرنا ئێك ل دویڤ ئێکێن ژمارەیی

دیاربکە ئەرێ ئەڤ ئێك ل دویڤ ئێکا ژمارەییە یان نە، هەکەر ژمارەی بیت بنچینەیێ وێ بهەژمێرە. ڕادەیێ پشتی ڕادەیێ دیارکری بهەژمێرە.

أ **−3, 2, 7, 12, 17, ...**

ڕادە	-3	2	7	12	17
جیاوازی		5	5	5	5

ئەڤە ئێك ل دویڤ ئێکا ژمارەییە، بنچینەیێ وێ دبیتە 5 . ڕادەیێ پشتی ڕادەیێ دیارکری دبیتە $17+5=22$.

ب **−4, −12, −24, −40, −60, ...**

ڕادە	−4	−12	−24	−40	−60
جیاوازی		−8	−12	−16	−20

ئەڤە نە ئێك ل دویڤ ئێکا ژمارەییە، چونکی جیاوازی ل ناڤبەرا ڕادەیێن وێ نەیا یەکسانە.

خالا چاڤدێریێ

1. دیاربکە ئەرێ ئەڤ ئێك ل دویڤ ئێکە یا ژەمارەییە یان نە، هەکەر یا ژمارەی بیت – بنچینەیێ وێ و ڕادەیێ پشتی ڕادەیێ دیارکری بهەژمێرە.

أ $1.9, 1.2, 0.5, -0.2, -0.9, ...$ ب $\frac{11}{2}, \frac{11}{3}, \frac{11}{4}, \frac{11}{5}, \frac{11}{6}, ...$

بەرێ خۆ بدە شێوازێ خشتەیێ بەرامبەر، هەر ڕادەیەکێ وێ دبیتە سەرجەمێ ڕادەیێ ئێکێ چەند جارانی بنچینەیێ وێ، تو دشێی ئەڤی شێوازی بۆ دارشتنا یاسایا ئێك ل دویڤ ئێکا ژمارەی گشتگیر بکەی:

ڕادەیێ دووێ = ڕادەیێ ئێکێ + بنچینە

ڕادەیێ سێیێ = ڕادەیێ دووێ + x2 بنچینە

و هەروەسا

بهایێ ترومبێلێ سالّ ل دویڤ سالێ	
n	a_n
1	$a_1 = 16\,750\,000 + 0(-1500\,000)$
2	$a_2 = 16\,750\,000 + 1(-1500\,000)$
3	$a_3 = 16\,750\,000 + 2(-1500\,000)$
4	$a_4 = 16\,750\,000 + 3(-1500\,000)$
5	$a_5 = 16\,750\,000 + 4(-1500\,000)$
n	a_n = 16 750 000 + (n-1)(-150 000)

فێربە و خۆبەرێکە

یاسایا گشتی بۆ ئێك ل دویڤ ئێکا ژمارەی

ڕادەیێ nی بۆ هەر ئێك ل دویڤ ئێکەکا ژمارەی ب ئەڤی شێوەی دهێتە هەژمارتن:

$a_n = a_1 + (n-1)d$ دەمێ a_1 ڕادەیێ ئێکێ بیت و d بنچینە بیت.

نموونـــــە 2 هەژمارکرنا ڕادەیێ nی یێ ئێك ل دویڤ ئێکا ژمارەی

ڕادەیێ دەهێ ل ئەڤێ ئێك ل دویڤ ئێکا ژمارەی **32, 25, 18, 11, 4, ...** بهەژمێرە.

پێنگاڤا (1)ێ: بنچینەی بهەژمێرە $d = 25 - 32 = -7$

پێنگاڤا (2)ێ: ڕادەیێ دەهێ بهەژمێرە بکارئینانا یاسایا وی

یاسا $a_n = a_1 + (n-1)d$

لجهێ وی دانە $a_{10} = 32 + (10-1)(-7)$

سادەبکە $= -31$

ڕادەیێ دەهێ دبیتە -31

ساخبکە: ئێك ل دویڤ ئێکێ تەمامبکە.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	32	25	18	11	4	−3	−10	−17	−24	−31

خالا چاڤدێریێ

2. ڕادەیێ یازدێ ل هەر ئێك ل دویڤ ئێکێ بهەژمێرە.

أ) $-3, -5, -7, -9, \ldots$

ب) $9.2, 9.15, 9.1, 9.05, \ldots$

ژ قوتابی بۆ قوتابی

من دقێت بهایێ هەر ڕادەیەکی ساخبکەم بکارئینانا بژمێرا ڕوونکرنێ نەخشەیا ڕادەیێ گشتی بئێخە دناڤ بژمێرا ڕوونکرنێدا (ل نموونە 2) $y = 32 + (x-1)(-7)$

پاشی ئەرکێ خشتەکرنێ بکاربینە ب $(n = 1)$ دەستپێبکە پێنگاڤەکێ بکاربینە بڕێ وێ 1 بیت، پاشی بهایێ ئەوی ڕادەیێ تە دقێت بخوینە ئەو بهایە (y) یە کو بەرامبەری خانەیا ڕادەیێ تە دقێت.

نموونـــــه 3 هەژمارتنا ڕادەییێن نەدیار

ڕادەییێن نەدیار د قێ ئێك ل دویڤ ئێکا ژمارەیدا 17– , ▢ , ▢ , ▢ ,11 بهەژمێرە.

پێنگاڤا (1)یێ: بنچینەیێ بهەژمێرە.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ یاسا

$-17 = 11 + (5-1)d$ لجهێ وێ دانە

$-7 = d$ سادەبکە

پێنگاڤا (2)یێ: ڕادەییێن نەدیار بهەژمێرە بکارئینانا $a_1 = 11$ ، $d = -7$.

$a_2 = 11 + (2-1)(-7) = 4$

$a_3 = 11 + (3-1)(-7) = -3$

$a_4 = 11 + (4-1)(-7) = -10$

خالا چاڤدێرییێ

3. ڕادەییێن نەدیار د قێ ئێك ل دویڤ ئێکا ژمارەیدا 0 , ▢ , ▢ , ▢ ,2 بهەژمێرە.

چونکی جیاوازییێن ل ناڤبەرا ڕادەیەکی و ڕادەییێن بەری وی د ئێك ل دویڤ ئێکا ژمارەییدا، دبیتە جیاوازییێن نەگوهڕ، لەورا زانینا دوو ڕادەیان بەسە بۆ دەرئینانا بنچینەیی.

نموونـــــه 4 هەژمارتنا ڕادەیێ nی بۆ ئێك ل دویڤ ئێکا ژمارەیی ب زانینا دوو ڕادەیان

ڕادەیێ شەشێ بۆ ئێك ل دوویڤ ئێکا ژمارەیی بهەژمێرە، بۆ زانین $a_9 = 120$ ، $a_{14} = 195$

پێنگاڤا (1)یێ: بنچینەی بهەژمێرە.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ یاسا

$a_{14} = a_9 + (14-9)d$ وەسا دانە کو $a_n = a_{14}$ و $a_1 = a_9$ (9 لجهێ 1 ، 9 دانە)

$a_{14} = a_9 + 5d$ سادەبکە

$195 = 120 + 5d$ لجهێ وێ دانە

$15 = d$ هاتە شیکاربکە

پێنگاڤا (2)یێ: a_1 بهەژمێرە.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ یاسا

$120 = a_1 + (9-1)(15)$ لجهێ وێ دانە

$120 = a_1 + 120$ سادەبکە

$0 = a_1$ شیکاربکە

پێنگاڤا (3)یێ: یاسایا ئێك ل دویڤ ئێکا ژمارەی بنڤیسە و بۆ هەژمارتنا a_6 بکاربینە

$a_n = a_1 + (n-1)d$ یاسا

$a_n = 0 + (n-1)(15)$ لجهێ وێ دانە

$a_6 = 0 + (6-1)15$ سادەبکە

$= 75$ شیکاربکە

ڕادەیێ شەشێ د قێ ئێك ل دویڤ ئێکێدا دبیتە 75 .

خالا چاڤدێرییێ

4. ڕادەیێ یازدێ بۆ هەر ئێك ل دویڤ ئێکەکا ژمارەیی بهەژمێرە

أ $a_2 = -133$ و $a_3 = -121$ ب $a_3 = 20.5$ و $a_8 = 13$

د وانەیێن بۆریدا تە زنجیرەیێن ژمارەیی نڤیسینە و بهایێن وان هەژمارتینە. **زنجیرەیا ژمارەیی** **Arithmetic Series** زنجیرەکە کو ئێك ل دویڤ ئێکەکا ژمارەییە، تو دشێی بساناهی یاسەیەکێ دەربینی بۆ هەژمارکرنا بهایێ زنجیرەیا ژمارەی هەتا ڕادەیەکێ دیارکری وەکی ئەڤا ل خوارێ.

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + (a_1+d) + (a_1+2d) + \ldots + a_n \\ S_n &= a_n + (a_n-d) + (a_n-2d) + \ldots + a_1 \\ \hline 2S_n &= \underbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)\ldots+(a_1+a_n)}_{\text{سەرجەمێ } n \text{ بڕان هەر ئێك ژ وان یەکسانە } a_1+a_n} \\ 2S_n &= n(a_1+a_n) \end{aligned}$$

$$S_n = n\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right) \text{ یان } S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$$

فێربە و ژبەربکە

سەرجەمێ n ڕادەیێن ئێکێ د ئێك ل دویڤ ئێکا ژمارەییدا

ب نڤیسین	ب ژمارەیان	ب جەبرێ
سەرجەمێ n ڕادەیێن ئێکێ د ئێك ل دویڤ ئێکەکا ژمارەییدا کو دبیتە ئەنجامێ لێکدانا ژمارەیا ئەڤان ڕادەیان دگەل ناڤەندێ ژمارەیی یێ هەردوو ڕادەیێن ئێکێ و دوماهیکێ.	سەرجەمێ $2+4+6+8+10$ دبیتە $S_5 = 5\left(\frac{2+10}{2}\right) = 5(6) = 30$	$S_n = n\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)$ دەمێ n ژمارا ڕادان بیت و a_1 ڕادەیێ ئێکێ بیت و a_n ڕادەیێ دوماهیکێ بیت

نموونە 5 هەژمارتنا بهایێ زنجیرەکا ژمارەیی

سەرجەمێ داخوازکری بینەدەر د هەر زنجیرەکا ژمارەییدا.

أ S_{15} د زنجیرەییدا

$25+12+(-1)+(-14)+\ldots$

بنچینەیێ بهەژمێرە.

$d = 12-25 = -13$

ڕادەیێ a_{15} بهەژمێرە.

$a_{15} = 25+(15-1)(-13)$

$= -157$

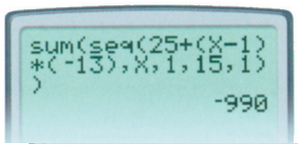
S_{15} بهەژمێرە.

$S_n = n\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)$

$S_{15} = 15\left(\frac{25+(-157)}{2}\right)$

$= 15(-66) = -990$

بژمێرا ڕوونکرنی بکاربینە بۆ ساخکرنێ.



√

ب $\sum_{k=1}^{k=12}(3+4k)$

هەردوو ڕادەیان a_1 و a_{12} بهەژمێرە.

$a_1 = 3+4(1) = 7$

$a_{12} = 3+4(12) = 51$

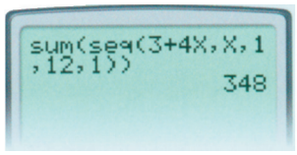
S_{12} بینەدەر.

$S_n = n\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)$

$S_{12} = 12\left(\frac{7+51}{2}\right)$

$= 348$

بۆ ساخکرنێ بژمێرا ڕوونکرنێ بکاربینە.



√

ئاگەهداریە!

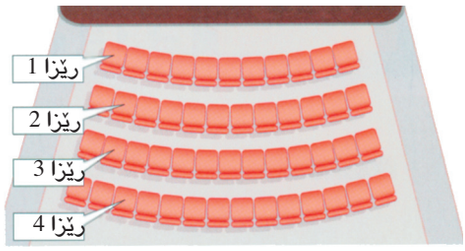
ب سەرجەمێ بەشی نەشێن سەرجەمێ زنجیرا ژمارەیی یا بێدوماهیك بهەژمێرن چونکی بهایێ ڕادان بێدوماهیك زێدە دبیت یان کێم دبیت.

خالا چاڤدێریێ

5. سەرجەمێ داخوازکری بهەژمێرە بۆ هەر زنجیرەکا ژمارەیی.

أ S_{16} د ڤێ زنجیرەیدا $12+7+2+(-3)+\ldots$ **ب** $\sum_{k=1}^{k=15}(50-20k)$

نموونـــــه 6 بجهئینان لسەر شانویان



هەر 14 ڕێزێن ئێکێ ییێن کورسیکان د ناڤەڕاستا شانویەکا جیهانیدا ئێك ل دویڤ ئێکەکا ژمارەی پێکدئینن.

أ **ژمارەیا کورسیکان د ڕێزا 14 یێدا چەندە؟**

یاسایێ بنڤیسە بکارئینانا. $a_1 = 11$ و $d = 1$

$a_n = a_1 + (n-1)d$	یاسایا ڕادەییێ n ی بنڤیسە
$a_{14} = 11 + (14-1)(1)$	لجهێ وێ دانە
$= 11 + 13$	
$= 24$	سادەبکە

ژمارەیا کورسیکان د ڕێزا 14 یێدا 24 کورسیکن.

ب **ژمارەیا کورسیکان د هەر 14 ڕێزاندا چەندە؟**

S_{14} بهەژمێرە بکارئینانا یاسایا سەرجەمێ ڕادەییێن ئێکێ د زنجیرەکا ژمارەییدا.

$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$	یاسا
$S_{14} = 14\left(\frac{11+24}{2}\right)$	لجهێ وێ دانە
$= 14\left(\frac{35}{2}\right) = 245$	سادەبکە

ژمارەیا کورسیکێن د ڤان 14 ڕێزێن ئێکێدا 245 کورسیکن.

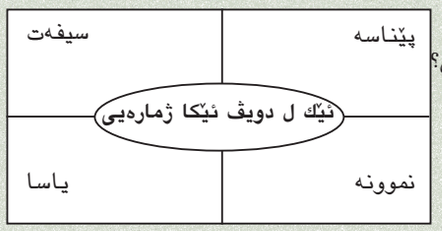
دێ چ بیت هەکەر... ؟ وەسا دانە کو ژمارەیا کورسیکان د هەر ڕێزەکێدا، دەستپێکرن ژ ڕێزا دووێ کو دوو کورسیکان ژ ڕێزا بەری وێ زێدەترە.

أ ژمارەیا کورسیکان د ڕێزا 14 یێدا چەندە؟

ب ژمارەیا کورسیکان د هەر 14 ڕێزاندا چەندە؟

هزربکە و گەنگەشێ بکە

1. بەراوردییێ دناڤبەرا ئێك ل دویڤ ئێکا ژمارەیی و نەخشەیا هێلیدا بکە.
2. بنچینەییێ سالب د ئێك ل دویڤ ئێکا ژمارەی دا چ دگەهینت؟
3. چەوا ڕادەییێ شەشێ دئێك ل دویڤ ئێکەکا ژمارەیی دا دێ هەژمێری هەکەر تە هەردوو ڕادەییێن سێیێ و چواریێ زانین؟
4. چەوا بنچینەییێ ئێك ل دویڤ ئێکەکا ژمارەیی دێ هەژمێری هەکەر تە هەردوو ڕادەییێن حەفتێ و دوازدێ زانین؟
5. ڕێکخەربە: ئەڤێ هێلکاری بنڤیسە، پاشی تەمامبکە، هەر چارچووڤەکی پربکە ژ بۆ ئەوا تو تێگەهشتی ژ ئێك ل دویڤ ئێکا ژمارەی ڕوونبکەی.



3–6 ڕاهێنان

ڕاهێنانێن ئازاد

1 **زاراڤ** بڕەیێ $50+40+30+20+10$ دبیتە (ئێك ل دویڤ ئێکەکا ژمارەیی یان زنجیرەیا ژمارەیی).

بەڕێ خۆ بدە نموونە 1 دیاربکە کا هەر ئێك ل دویڤ ئێکەك یا ژمارەییە یا نە هەکەر یا ژمارەی بوو، بنچینەیی و ڕادەیێ د دویڤدا دهێت بهەژمێرە.

2 $46, 39, 32, 25, 18, \ldots$

3 $28, 21, 15, 10, 6, \ldots$

4 $\frac{12}{3}, \frac{10}{3}, \frac{8}{3}, \frac{6}{3}, \frac{4}{3}, \ldots$

بەڕێ خۆ بدە نموونە 2 ڕادەیێ هەشتێ د هەر ئێك ل دویڤ ئێکەکا ژمارەیدا بهەژمێرە.

5 $3, 8, 13, 18, \ldots$

6 $10, 9\frac{3}{4}, 9\frac{1}{2}, 9\frac{1}{4}, \ldots$

7 $-3.2, -3.4, -3.6, -3.8, \ldots$

بەڕێ خۆ بدە نموونە 3 ڕادەییێن نەدیار د هەر ئێك ل دویڤ ئێکەکا ژمارەیدا بهەژمێرە.

8 $13, \square, \square, 25, \ldots$

9 $9, \square, \square, \square, 37, \ldots$

10 $1.4, \square, \square, \square, -1, \ldots$

بەڕێ خۆ بدە نموونە 4 ڕادەیێ نەهێ د هەر ئێك ل دویڤ ئێکەکا ژمارەیدا بهەژمێرە.

11 $a_4=27$ ، $a_5=19$

12 $a_3=12.2$ ، $a_4=12.6$

13 $a_3=-5$ ، $a_6=-11$

14 $a_{10}=100$ ، $a_{20}=50$

15 $a_7=-42$ ، $a_{11}=-28$

16 $a_4=\frac{3}{4}$ ، $a_8=\frac{1}{2}$

بەڕێ خۆ بدە نموونە 5 سەرجەمێ داخوازکری دهەر ئێك ل دویڤ ئێکەکا ژمارەیدا بهەژمێرە.

17 S_{15} د زنجیرەیا $5+9+13+17+\ldots$

18 $\sum_{k=1}^{12}(-2+6k)$

19 S_{18} د زنجیرەیا $3.2+2.9+2.6+2.3+\ldots$

بنیڕە نموونەیا 6

20 **کرێ** بلند گەهشتە کۆمپانیەکا پێزانینان دا کاری لێ بکەت ب موچەیەکی سالانە ب برێ 26 000 000 دیناران. ب مەرجەکی سالانە مووچەیێ وی 1 250 000 دیناران زێدەبکەت.

أ مووچەپێ وی دسالا شەشیدا دێ بیتە چەند؟

ب سەرجەمێ وان مووچەییێن د شەش سالێن ئێکێدا وەردگریت چەندە؟

ڕاهێنان و شیکارکرنا پرسیاران

دیاربکە ئەرێ هەر ئێك ل دویڤ ئێکەك یا ژمارەییە یان نە هەکەر یا ژمارەی بیت، بنچینەی و ڕادەیێ د دویڤدا دهێت بهەژمێرە.

21 $288, 144, 72, 36, 18, \ldots$

22 $-2, -12, -22, -32, -42, \ldots$

23 $0.99, 0.9, 0.81, 0.72, \ldots$

ڕادەیێ یازدێ د هەر ئێك ل دویڤ ئێکەکا ژمارەیدا بهەژمێرە.

24 $12, 11.9, 11.8, 11.7, \ldots$

25 $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \ldots$

26 $-3.0, -2.5, -2.0, -1.5, \ldots$

ڕادەیێ نەدیار دهەر ئێك ل دویڤ ئێکەکا ژمارەیدا بهەژمێرە.

27 $77, \square, \square, \square, 33, \ldots$

28 $-29, \square, \square, -2, \ldots$

29 $2.3, \square, \square, \square, 1.5, \ldots$

ڕاهێنانێن ئازاد

بۆ شیکارکرنا پرسیاران	بنیڕە نموونە
1	23-21
2	26-24
3	29-27
4	32-30
5	35-33
6	36

ڕادەیێ دوازدێ د هەر ئێك ل دویڤ ئێکەکا ژمارەیدا بهەژمێرە.

30 $a_4=18.4$ ، $a_5=16.2$ **31** $a_4=-2$ ، $a_8=46$ **32** $a_{22}=-49$ ، $a_{25}=-58$

سەرجەمێ داخوازکری د هەر زنجیرەکا ژمارەیدا بهەژمێرە.

33 S_{15} د زنجیرەیا $-18+(-16)+(-14)+\ldots$ **34** $\sum_{k=1}^{k=20}(88-3k)$ **35** $\sum_{k=1}^{k=14}\left(14-\frac{1}{2}k\right)$

36 **مەزاختن** کاژینێ پۆشیەك ب قست کری دحەفیا ئێکێدا 15000 دینار دانە فروشیاری، و دگەل فروشیاری ڕێککەفت کو ل هەر حەفتیێەکێ 5000 دیناران بۆ قستێن وی زێدەبکەت.

أ د حەفتیا نەهێدا دێ چەندێ دەت؟

ب سەرجەمی وی پارەیێ ل دوماهیکا حەفتیا نەهێ داین دێ چەند بیت؟

37 **دەمژمێر** دەمژمێرا گورەپانەکێ زەنگەکێ لێد دەت د دەمژمێرا ئێکێدا، و دوو زەنگەیان د دەمژمێرا دووێدا، و هەروەسا...

أ دەمژمێر دێ چەند زەنگان لێدەت ژ دەمژمێر 1 ێ پشتی نیڤرو هەتا نیڤا شەڤێ؟ ب دڕێژاهیا 24 دەمژمێران دێ چەند زەنگان لێدەت؟

ب **دێ چ بیت هەکەر ...؟** دەمژمێرا باژێرڤانیێ ل هەر نیڤ دەمژمێرەکێ زەنگەکێ لێددەت ئەڤە زێدەباری لێدانێن وێ د سەرێ هەر دەمژمێرەکێدا، کارتێکرن لسەر ئێك ل دویڤ ئێکێ دێ چ بیت؟ ژمارا لێدانێن ڤی دەمژمێرێ دماوێ 24 دەمژمێراندا دێ چەند بیت؟

سەرجەمێ داخوازکری د هەر زنجیرەکا ژمارەیدا بهەژمێرە.

38 $\sum_{k=1}^{k=16}(555-11k)$ **39** $\sum_{k=1}^{k=15}(4-0.5k)$ **40** $\sum_{k=1}^{k=18}\left(-33+\frac{5}{2}k\right)$

41 S_{16} د زنجیرەیا $7.5+7+6.5+\ldots$ **42** S_{18} ل زنجیرەیا $2+9+16+23+\ldots$

43 **ئاڤاهی** هەرەما لۆڤەرا هاتیا دروستکرن ل پاریسێ بەرامبەری موزەخانا لۆڤەرا ئەو ژی د سالێن هەشتیاندا د چەرخێ بیستێدا، ئەڤ هەرەمە ب تابلۆیێن شووشەی هاتیە ئاڤاکرن. ئەڤ هەرەمە یا پێکهاتی بوو ژ چەند ڕووتەختەیان، ڕووتەختێ سەر 4 تابلۆیان بخۆڤە دگریت، و 4 تابلۆ زێدە دبن بەرەڤ خوارێ.

أ هێمایێ سەرجەمی بکاربینە بۆ نڤیسینا زنجیرەیەکێ و دیارکرنا ژمارەیا تابلویێن گشتی د n ڕووتەختاندا.

ب هەکەر هەرەم ژ 18 ڕووتەختان پێکبهێت: ژمارەیا تابلۆیێن شووشەی دێ بنە چەند؟

ج ب راستی، ژمارەیا تابلۆیێن هاتینە بکارئینان 11 تابلویان کێمتر بوو ژ ئەوێن هاتینە هەژمارتن، ئەو ژی بۆ دروستکرنا دەروازەیێ هەرەمی بوو، ژمارا تابلۆیان دهەرەما لۆڤەردا چەندە؟

44 **فیزیا** تانکێن ئاڤێ ل جهێن بلند ددانن دا ئاڤ بگەهیتە هەموو مالان، ئەڤ تانکە چەند مترەکێ بلندبیت، بەستانا ئاڤێ دێ 9.73 کیلو باسکالان زێدەبیت.

أ ئێك ل دویڤ ئێکەکێ بنڤیسە کۆ پەستانێ ئاڤێ دیاربکەت دگەل بلندبوونا تانکێ مترەك پشتی مترەکێ.

ب کێمترین بلنداهیا تانکێ دێ چەند بیت هەتا پەستانێ ئاڤێ بگەهیتە 345 کیلو باسکالان؟

ج کێمترین بلنداهیا تانکێ دێ چەند بیت هەتا پەستانێ ئاڤێ بگەهیتە 690 کیلو باسکالان، کو ئەو دبیتە باشترین ئاستێ بەرنیاس بۆ پەستانی ئاڤێ؟

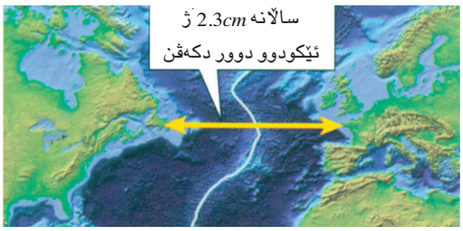
د ئەڤێ ئێك ل دویڤ ئێکێ ب وێنەیێ ڕوونکرنێ بنوێنە پەستانێ ئاڤێ ل هەر دوو لقێن ب ، ج شلۆڤەبکە.

دەروازەیەك

لسەر دەمژمێرێ

ژ گرنگترین تشتێن بەرچاڤ ل باژێرێ لەندەن، پایتەختێ بەریتانیا، دەمژمێرا بیگ بنا بناڤ و دەنگە ئەڤ دەمژمێرە دکەڤیتە دگورەپانا پەرلەمانێ بریتانیدا. ناڤێ ئەڤێ دەمژمێرێ د زڤریتە Big Ben زەنگا وێ یا گەلەکا مەزن، کو بارستەیا وێ دگەهیتە 13.8 تەنان ئەو زەنگێ لێددەت بۆ ئاشکەراکرنا دەمی.

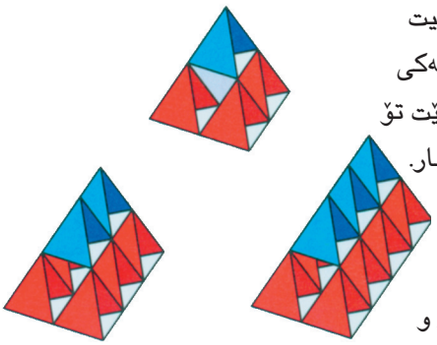
45 **زەڤی ناسی** کێشوەرێ ئەمریکا باکوور ساڵانە ژ کیشوەرێ ئەورووپا دوور دکەڤیت.



أ پشتی 50 ساڵان کیشوەرێ ئەمریکا باکوور دێ چەند ژ ئەورووپا دوورکەفیت؟

ب پشتی چەند ساڵان ئەڤ دووراتیە بکێماتی دێ کیلومترەکێ زێدەتر لێهیت.

46 تو دشێی سامپلەکی هەرەمەکا خودان ئێك سەر ژ دوو تەخان پێکهاتبیت دروستبکەی پێکبینی بکارئینانا 4 هەرەمێن بنکە سێیانە. دا تو سامپلەکی هەرەمەکا خودان چەند سەر ژ دوو تەخان پێکهاتبیت دروستبکەت، دڤێت تو هەر جارەکی 3 هەرەمان زێدەبکەی، هەر وەك ل وێنەیێ بەرامبەر یا دیار.



أ چەند هەرەمێن بنکەسێیانە دڤێن بۆ دروستکرنا سامپلەکی دوو تەخی 20 سەر هەبن؟

ب سولاڤێ 20 سامپل دروستکرن هەر ئێك ژ دوو تەخان پێکهاتبوو و سەرێن وان ژ 1 هەتا 20 سەران بوو ئێك ل دویڤ ئێك. چەند هەرەمێن بنکەسییانە بکارئینان؟

47 **کرێ** یانەیەکا تەپا باسکێ 395 000 دینار دانە ڕاهێنەرەکی ل حەفتیا ئێکێ، و 45 000 دینار بۆ وی راهێنەرەی زێدەکرن ل هەر حەفتیەکا ل دیڤدا. راهێنەری ل دوماهیا حەفتیێن وەرزی 755 000 دینار وەرگرتن، ئەرێ ئەڤی وەرزی چەند حەفتی تێدا هەبوون؟

48 **هزرکرنا ڕەخنەگر** بۆ نڤیسینا رێسایا ئێك ل دویڤ ئێکا ژمارەی، دڤێت کێمترین ڕادەیێن تۆ بزانی چەندبن؟ بۆ نڤێسینا هاوکێشەیا راستەهێلەکێ پێدڤییە تە چەند خال هەبن؟ ئەرێ هەردوو بەرسڤان پەیوەندی د گەل ئێك و دوو هەنە؟ ئەوێ چەندێ روونبکە.

49 **بنڤیسە** بنچینەیێ ئێك ل دویڤ ئێکەکا ژمارەی، ژمارەیەکا مووجەبە، ڕادەیێ a_n دێ چ لێهێت هەکەر n بەردەوام زێدەبیت، دێ چ لێهێت هەکەر بنجینەیێ سالب بیت.

ئامادەکرن بۆ ئەزموونێ

50 کیژ ئەڤان ئێك لدویڤ ئێکەکا ژمارەییە؟

أ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

ب $2.2, 4.4, 6.6, 8.8, \ldots$

ج $2, 4, 8, 16, \ldots$

د $2, 4, 7, 11, \ldots$

51 ڕێکخەرەکێ ئاهەنگان 45 هزار دیناران وەردگریت، زێدەباری 12 هزار دیناران بۆ هەر کەسەکی. کیژ ئەڤان ئێك لدویڤ ئێکان دەربڕینێ ژ ڤێ باری دکەت؟

أ $a_n = 45 + 12(n-1)$

ب $45, 57, 69, 81, 93, \ldots$

ج $a_n = 57 + 12n$

د $57, 69, 81, 93, 105, \ldots$

52 کیژ ئەڤان دبنە ژمارەیێن نەدیار د ئەڤێ ئێك لدویڤ ئێکا ژمارەییدا $4, \square, \square, \square, 40$

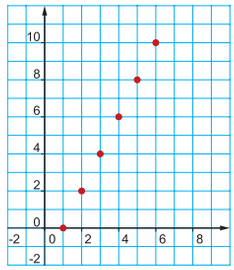
أ $11, 22, 33$

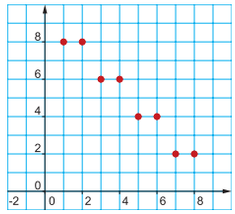
ب $13, 22, 31$

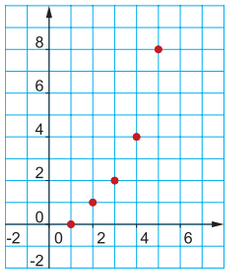
ج $14, 24, 34$

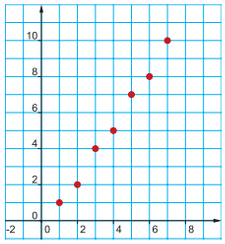
د $16, 24, 36$

53 کێژ ئەڤان هێلکارێن ڕوونکرنێ یێن ل خوارێ ئێك ل دویڤ ئێکا ژمارەی دنوێنیت:

أ


ب


ج


د


54 کێژ ئەڤان دبیتە سەرجەمێ ئەڤێ زنجیرەیێ $4+7+10+13+16+19$؟

أ $\sum_{k=1}^{k=6}(19-3k)$ ب $\sum_{k=1}^{k=6}(22-3k)$

ج $\sum_{k=1}^{k=6}19-4k$ د $\sum_{k=1}^{k=6}\left(22-3(k-1)\right)$

55 **بەرسڤەکا کورت** ڕادەیێ سێزدێ بۆ ڤێ ئێك لدویڤ ئێکا ژمارەیی ... ,54, 50, 46, 42 چەندە؟

بەرهنگاری و بەرفرەهکرن

56 تە دوو ڕادە a_n و a_m ژ ڕادەییێن ئێك لدویڤ ئێکەکا ژمارەیی هەنە.

أ دیاربکە کۆ بنچینەیێ ڤێ ئێك لدویڤ ئێکێ دبیتە $d=\frac{a_n-a_m}{n-m}$.

ب ڕێسایا نوی بکاربینە بۆ دەرئینانا بنچینەیی دەمی $a_{12}=88$ و $a_{36}=304$.

57 ڕێسایەکێ دەربینە ڕادەیێ ئێکێ بخوڤە بگریت، بۆ دەرئینانا سەرجەمێ ئێك لدویڤ ئێکەکا ژمارەیی. کەنگی بکارئینانا ڤێ ڕێسایێ دێ یا گونجای بیت؟

58 سەرجەمێ 3 ڕادەییێن ئێکێ یێن ئێك لدویڤ ئێکەکا ژمارەیی یەکسانە 60 . و ئەنجامێ لێکدانا وان یەکسانە 7 500 ئەو سێ ڕادەیە کێژ وانن؟

59 **هزرکرنا رەخنەگر** مەبەست چییە ژ یەکسانبوونا $a_{2n}=2a_n$ ؟

پێداچوونا لوولپێچی

دیاربکە ئەرێ نەخشەیا توانی نەخشەیەکا گەشەبوونە یان نزمبوونە؟ (وانەیا 4 - 1)

60 $f(x)=1.25(0.75)^x$ **61** $f(x)=1.43(5.32)^x$ **62** $f(x)=0.92(0.64)^x$

63 **دەنگ** نەخشەیێ $L=10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ ڕێسایەکێ بۆ پێڤانا ئاستێ تووندیا دەنگی بکاردهێت، دەمێ L ئاستێ تووندیا دەنگی ب دیسبیل) و I تووندیا دەنگی) و I_0 تووندیا بەرگوهی کەفتن) بیت. ئاستێ تووندیا دەنگی کۆ تووندیا وێ $10^{9.2}I_0$ بیت چەندە؟

هەر زنجیرەیەکێ بکارئینانا هێمایێ سەرجەمی بنڤیسە. (وانەیا 6 - 2)

64 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ **65** $\frac{4}{5}+\frac{8}{5}+\frac{12}{5}+\frac{16}{5}+4$

66 $-1+2+7+14+23$ **67** $-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}-1-\frac{4}{3}-\frac{5}{3}$

بەشی 6

ئەزموونا نیڤا بەشی

1-6 دەروازەیەك بۆ ئێك لدویڤ ئێكان

هەر پێنج رادەیێن ئێکێ د هەر ئێك لدویڤ ئێکەکێ دا بهەژمێرە.

1 $a_n = \frac{2}{3}n$ 2 $a_n = 4^{n-1}$ 3 $a_1 = -1.3$ ، $a_n = 2a_{n-1} - 12$ 4 $a_n = n^2 - 2n$

پێناسەیەکا دیار بۆ هەر ئێك لدویڤ ئێکەکێ بنڤیسە.

5 8, 11, 14, 17, 20, ...

6 −2, −8, −18, −32, −50, ...

7 1 000, 200, 40, $\frac{8}{5}$, ...

8 437, 393, 349, 305, 261, ...

9 پاسەك ب لەزا 55 km/h دچیت. پاسێ ل کیلومەترا (18) یێ ژ دەستپێکا ڕێکێ لەزا خۆ پاراست. پشتی 4 دەمژمێران ئەو باسەدێ ل کیژ کیلومەترا ڕێکێ بیت؟ ئەڤێ ئێك ل دویڤ ئێکێ ب وێنەیێ ڕوونکرنێ ل n کیلومەتران بنوێنە و ئەڤی شێوازی وەسفبکە.

2-6 زنجیرە و هێمایێ سەرجەمی

ئەڤێ زنجیرەیێ ڤەکە و بهایێ وێ بهەژمێرە.

10 $\sum_{k=1}^{k=4}(-14-2k)$ 11 $\sum_{k=1}^{k=4}\left(\frac{k}{k+2}\right)$ 12 $\sum_{k=1}^{k=5}(-1)^k(k^2-2)$

بهایێ ڤێ زنجیرەیێ بهەژمێرە.

13 $\sum_{k=1}^{k=5}\frac{1}{2}$ 14 $\sum_{k=1}^{k=40}k^2$ 15 $\sum_{k=1}^{k=15}k$

16 ژمارا کورسیکێن ڕێزا ئێکێ ل شانویەکێ 20 کورسیکن، ژمارا کورسیکان ب 3 کورسیکان زێدە دبیت ل هەر ڕێزەکێ بۆ ڕێزەیا ددیڤدا دهێت. سەرجەمێ کورسیکان دشانویێدا چەندن هەکەر تە زانی کۆ ژمارا ڕێزان 12 ڕێزن.

3-6 ئێك لدویڤ ئێك و زنجیرەیێن ژمارەیی

ڕادەیێ هەشتێ بۆ هەر ئێك لدویڤ ئێکەکا ژمارەیی ل خوارێ بهەژمێرە.

17 10.00, 10.11, 10.22, 10.33, ...

18 −5, −13, −21, −29, ...

19 $a_2 = 57.5$ و $a_5 = 80$

20 $a_{10} = 141$ و $a_{13} = 186$

ڕادەیێن نەدیار دهەر ئێك لدویڤ ئێکەکا ژمارەییدا ل خوارێ بهەژمێرە.

21 −23, ■, ■, −89, ...

22 31, ■, ■, ■, 79, ...

سەرجەمێ داخوازکری ل هەر زنجیرەکا ژمارەیێ ل خوارێ بهەژمێرە.

23 S_{10} ل زنجیرەیا $40+30+20+10+\ldots$

24 $\sum_{k=1}^{k=8}4k$

25 $\sum_{k=1}^{k=11}(0.5k+5.5)$

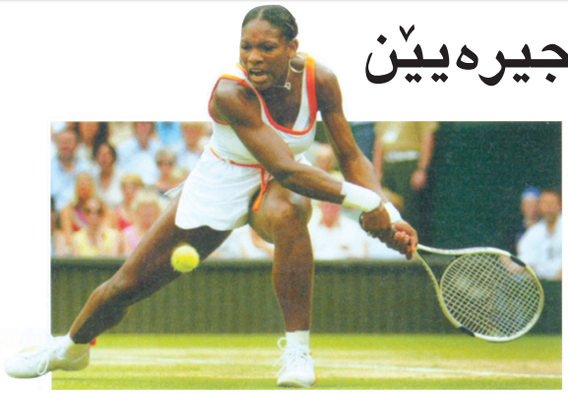
26 S_{14} ل زنجیرەیا $-6-1+4+9+\ldots$

27 ئازادی بریاردا کۆ هندەك ژ وان پارێن بابێ وێ ددەتێ بخو پاشبێخیت. بریاردا کۆ ل حەفتیا ئێکێ د سالێدا هزار دیناران بکەتە د (قاسا) خۆدا و 1500 دیناران ل حەفتیا دووێدا و 2000 دیناران ل حەفتیا سێیێ، و هەروەسا ... دێ چەند پارەی ل دوماهییا حەفتیا دوماهیکا سالێ کەتە د قاسا خۆ دا؟ ل دوماهیا سالێ پارەیێ وی دێ بیتە چەند؟ [هەکەر بزانی سالێ 52 حەفتی هەنە].

4-6

ئێك ل دویڤ ئێك و زنجیرەییێن ئەندازەیی

Geometric sequences and Series



ئارمانج

- هەژمارتنا ڕادەییێن ئێك ل دویڤ ئێكا ئەندازەی دگەل هەژمارتنا ناڤەندێ ئەندازەی
- هەژمارتنا بهاییێن زنجیرەییێن ئەندازەی.

کێ ئەڤێ بکاردئینیت؟

پلان دانەرێن یاریێن وەرزشێ ئێك ل دویڤ ئێك و زنجیرەییێن ئەندازەی بکاردئینن بۆ دیارکرنا ژمارا یارییان د هەر خولەکێدا (نموونە 6).

زاراڤ

Vocabulary

ئێك ل دویڤ ئێکا ئەندازەی

Geometric Sequence

ناڤەندێ ئەندازەی

Geometric mean

زنجیرەیا ئەندازەی

Geometric Series

سیرینا ولیامز ل قارەمانیا کچان ل و یمبلدون ل یارییا تەپا تێنسێ ل ساڵا 2003 ز پلەیا ئێکێ بدەست خۆڤەئینا دناڤ 128 یاریکەراندا. ل دوماهیا هەر یارییەکێ یاریکەرێ سەرکەفتی دێ بەردەوام بیت و یارێکەرێ نە سەرکەفتی دێ دەرکەڤیت، ئەڤە وێ چەندێ دگەهینت کو ژمارا یاریکەران ل دوماهیا هەر خولەکێ بنیڤی دبن. یا دشیاندایە ژمارا یاریکەرێن دمینن ل دوماهیا هەر خولەکێ دیاربکەن ب بکارئینانا ئێك ل دویڤ ئێکا ئەندازەی. د **ئێك ل دویڤ ئێکا ئەندازەیدا Geometric Sequence** ڕێژا هەر ڕادەیەکی بۆ ڕادەیێ ل پێش وی یا نەگۆڕە و یا جیاوازە ژ (1)ێ. دبێژنە ئەڤێ ڕێژەیێ **بنچینە Common ratio**. بنچینەیێ ئێك ل دویڤ ئێکا ئەندازەی یا سەری دبیتە $\frac{1}{2}$.

خولّ	1	2	3	4
ژمارە	128	64	32	16
ڕێژە	$\frac{64}{128}=\frac{1}{2}$	$\frac{32}{64}=\frac{1}{2}$	$\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$	

ل بیرا تە بیت کو نەخشەیێن توانی ڕێژەیا هاوبەش (بنچینە) هەیە. دەمێ جووتێ ڕێکخستی (n,a_n)یێ ئێك ل دویڤ ئێکا ئەندازەی ب وێنەیێ ڕوونکرنێ دنوێنی. ئەو خالێن تو دیار دکەی دکەڤنە سەر چەماوەیەکی توانی. ب ئەوی شێوەیێ تو دشێی بەرێ خو بدەیە ئێك ل دویڤ ئێکا ئەندازەی هەر وەك نەخشەیەکا توانی بوارێ وێ دبیتە کۆمەلا ژمارەییێن سروشتی.

نموونە 1 جوداکرنا ئێك ل دویڤ ئێکێن ئەندازەی:

دیاربکە ئەرێ ئەڤ ئێك ل دویڤ ئێکە یا ئەندازەییە یان نە، و هەکەر یا ئەندازەی بیت بنچینەی و ڕادەییێن دوماهیا ڕادەیێ دیارکری بهەژمێرە.

أ 8, 12, 18, 27, ...

8 12 18 27

جیاوازی 4 6 9

ڕێژە $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$

ئەڤە ئێك ل دویڤ ئێکەکا ئەندازەییە، بنچینەیێ وێ $r=\frac{3}{2}$ هێمایێr بۆ بنچینەیێ ئێك ل دویڤ ئێکا ئەندازەی بکاردهێت.

ب 8, 16, 24, 32, ...

8 16 24 32

جیاوازی 8 8 8

ڕێژە $\frac{4}{3}$ $\frac{3}{2}$ 2

ئەڤە ئێك ل دویڤ ئێکەکا ژمارەییە $d=8$ کو هێمایێd بۆ بنچینەیێ ئێك ل دویڤ ئێکا ژمارەی بکاردهێت.

ج 6, 10, 15, 21, ...

6 10 15 21

جیاوازی 4 5 6

ڕێژە $\frac{5}{3}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{7}{5}$

ئەڤ ئێك ل دویڤ ئێکەنەیا ژمارەییە و نەیا ئەندازەییە.

خالا چاڤدێریێ

1. دیاربکە ئەرێ ئەڤ ئێك ل دویڤ ئێکە یا ئەندازەییە یان نە، هەکەریا ئەندازەی بیت بنچینەیێ وی و ڕادەیێ ل دویڤ ڕادەیێ دیارکری بهەژمێرە.

أ $\frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{36}, \frac{1}{108}, \ldots$

ب 1.7, 1.3, 0.9, 0.5, ...

ج $-50, -32, -18, -8, \ldots$

هەر ڕادەیەك د ئێك لدویڤ ئێكەكا ئەندازەییدا دبیتە ئەنجامێ لێكدانا ڕادەیێ بەری وی دگەل بنچینەیێ. ئەڤە پێناسەیەكا نەدیار بۆ ئەڤێ ئێك لدویڤ ئێكێ ددەت. و شێواز ئەڤەیە:

$$a_n = a_{n-1} r$$

ڕادەیێ n ← بنچینە

ڕادەیێ بەری وی

هەروەسا تۆ دشێی پێناسەیەكا دیار بكاربینی بۆ دەرئینانا ڕادەیێ (n)ی د ئێك لدویڤ ئێكەكا ئەندازییدا. هەر ڕادەیەك دبیتە ئەنجامێ لێكدانا ڕادەیێ ئێكێ دگەل هێزەكێ ژ هێزێن بنچینەیێ، هەر وەكی یا دیار دڤێ خشتەیێدا.

ژمارەیا یاریكەران د هەر خۆلەكا و یمبلدوندا					
خۆل	1	2	3	4	n
ژمارەیا یاریكەران	128	64	32	16	a_n
ڕێسا	$a_1 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^0$	$a_2 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$a_3 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$a_4 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$a_n = 128\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

فێربە و ژبەربكە

یاسایا گشتی بۆ ئێك لدویڤ ئێكێن ئەندازەیی

ڕادەیێ a_n بۆ ئێك لدویڤ ئێكەكا ئەندازەیی ب ئەڤێ یاسایا ل خوارێ دهێتە هەژمارتن

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

دەمێ a_1 ڕادەیێ ئێكێ و r بنچینەیێ وێ بیت.

نموونـــــە 2 هەژمارتنا ڕادەیێ (n) د ئێك لدویڤ ئێكەكا ئەندازەییدا

ڕادەیێ نەهێ د ڤێ ئێك لدویڤ ئێكا ئەندازەییدا... **–80, 40, –20, 10, –5** بهەژمێرە.

پێنگاڤا (1)ێ: بنچینەیێ بهەژمێرە بكارئینانا ئەڤێ یاسایێ $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{10}{-5} = -2$

پێنگاڤا (2)ێ: ڕادەیێ نەهێ بهەژمێرە بكارئینانا ئەڤێ یاسایێ.

یاسا $a_n = a_1 r^{n-1}$

لجهێ وێ دانە $a_9 = -5(-2)^{9-1}$

سادەبكە $a_9 = -5(256) = -1280$

ڕادەیێ نەهێ د ڤێ ئێك لدویڤ ئێكا ئەندازەیدا ئەڤەیە -1280 .

ساخبكە: ئێك ل دویڤ ئێكێ تەمامبكە.

$$a_5 = -80$$
$$a_6 = -80(-2) = 160$$
$$a_7 = 160(-2) = -320$$
$$a_8 = -320(-2) = 640$$
$$a_9 = 640(-2) = -1280 \quad \surd$$

خالا چاڤدێریێ

2. ڕادەیێ نەهێ د هەر ئێك لدویڤ ئێكەكا ئەندازەیدا بهەژمێرە.

أ $\frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{16}, -\frac{3}{32}, \frac{3}{64}, \ldots$

ب $0.001, 0.01, 0.1, 1, 10, \ldots$

نموونـــــه 3 هەژمارتنا ڕادەیێ (n)ی بۆ ئێك ل دویڤ ئێكەكا ئەندازەیی بزانینا دوو ڕادەیان

ڕادەیێ دەهێ بۆ ئێك ل دویڤ ئێكا ئەندازەیی بهەژمێرە هەكەر تە زانی كو $a_5 = 96$ و $a_7 = 384$

ئاگەهداریە!
دەمێ دوو ڕادەیێن ئێك ل دویڤ ئێكەكێ دابن، پشتڕاستبە كۆ r بهایێ موجەب یان سالب وەرگرتینە.

پێنگاڤا (1)ێ: بنچینەیی بهەژمێرە.

$a_7 = a_5 r^{7-5}$	یاسا
$a_7 = a_5 r^2$	سادەبكە
$384 = 96r^2$	لجهێ وێ دانە
$4 = r^2$	هەردوو ڕەخان دابەشی 96 ێ بكە
$\pm 2 = r$	ڕەگێ دووجای بۆ هەردوو لایان وەربگرە

پێنگاڤا (2)ێ: a_1 بهەژمێرە.

هەردوو بهایێن r ێ ل ئێك دویڤ ئێكێ ڤەكۆلە.

$a_n = a_1 r^{n-1}$	$a_n = a_1 r^{n-1}$
$96 = 6(-2)^{5-1}$	$96 = a_1 (2)^{5-1}$
$6 = a_1$	$6 = a_1$

یاسا — لجهێ وێ دان — سادەبكە

پێنگاڤا (3)ێ: یاسایا ئێك ل دویڤ ئێكێ بنڤیسە. بۆ هەژمارتنا a_{10} .

$a_n = a_1 r^{n-1}$	$a_n = a_1 r^{n-1}$
$a_n = 6(-2)^{n-1}$	$a_n = 6(2)^{n-1}$
$a_{10} = 6(-2)^{10-1}$	$a_{10} = 6(2)^{10-1}$
$a_{10} = -3072$	$a_{10} = 3072$

یاسا — لجهێ وێ دانە — لجهێ n ێ، 10 دانە — سادەبكە

ڕادەیێ دەهێ دڤێ ئێك ل دویڤ ئێكێدا ئەڤەیە 3072 و 3072− .

خالا چاڤدێریێ

3. ڕادەیێ حەفتێ د هەر ئێك ل دویڤ ئێكەكا ئەندازەیدا بهەژمێرە.

أ $a_4 = -8$ و $a_5 = -40$ ب $a_2 = 768$ و $a_4 = 48$

ناڤەندێ ئەندازەی بۆ دوو ژمارەیێن موجەب وەك x ، y ب ڤی شێوەی پێناسە دكەن $\sqrt{xy}$ هەكەر a ، b سێ ڕادەیێن موجەب ل دویڤ ئێكودووبن د ئێك ل دویڤ ئێكا ئەندازەیدا دێ $b = \sqrt{ac}$

ناڤەندێ ئەندازەی د ئێك دویڤ ئێكا ئەندازەیدا ئەو ڕادەیە كو دكەڤتە ناڤبەرا دوو ڕادەین نە لدویڤ ئێك.

فێربە و خۆبەربكە

ناڤەندا ئەندازەیی

ل ئێك ل دویڤ ئێكا ئەندازەی یا ڕادەیێن موجەب، هەر ڕادەیەك دبیتە ناڤەندی ئەندازەی بۆ هەردوو ڕادەیێن بەری وی و پشتی وی.

نموونـــــه 4 هەژمارتنا ناڤەندێ ئەندازەیی

ناڤەندێ ئەندازەیی بۆ ئەڤان هەردوو ژمارەیان $\frac{1}{32}$ و $\frac{1}{2}$ بهەژمێرە.

$$\sqrt{ab} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{32}\right)}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{64}} = \frac{1}{8}$$

خالا چاڤدێریێ

4. ناڤەندێ ئەندازەیی بۆ ئەڤان هەردوو ژمارەیان **16** و **25** بهەژمێرە.

هەروەکی دیار دزنجیرەیێن ژمارەییدا، **زنجیرەیا ئەندازەیی** **Geometric Series** دبیتە زنجیرەك كۆ ئێك ل دویڤ ئێكا وێ یا ئەندازەییە. تۆ دشێی ب ساناهی یاسایەكێ بهەژمێری بۆ هەژمارکرنا سەرجەمێ زنجیرەكا ئەندازەی هەتا خانەیەكا دیارکری. هەروەکی د ڤێ شێوەیێ ل خوارێدا.

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \ldots + a_1 r^{n-1}$$

$$-rS_n = \quad -a_1 r - a_1 r^2 - \ldots - a_1 r^{n-1} - a_1 r^n$$

$$S_n - rS_n = a_1 - a_1 r^n$$

$$S_n(1-r) = a_1(1-r^n)$$

$$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

فێربە و خۆبەرێکە

سەرجەمێ ڕادەییێن ئێكێ د زنجیرەكا ئەندازەیدا

سەرجەمێ ڕادەییێن ئێكێ (S_n) د زنجیرەكا ئەندازەیدا $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ دهێتە هەژمارتن بكارئینانا ئەڤێ یاسایێ.

$$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right); r \neq 1$$

دەمێ a_1 ببیتە ڕادەیێ ئێكێ بۆ ئێك ل دویڤ ئێكێ و r بنچینەیێ وێ بیت.

نموونـــــە 5 هەژمارتنا سەرجەمێ زنجیرەكا ئەندازەیی

سەرجەمێ داخوازكری د هەر زنجیرەكا ئەندازەیدا بهەژمێرە.

أ S_7 د زنجیرەیا $3 - 6 + 12 - 24 + \ldots$

پێنگاڤا (1)ێ: بنچینەیی بهەژمێرە

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-6}{3} = -2$$

پێنگاڤا (2)ێ: S_7 بینەدەر دەمێ $a_1 = 3$ و $r = -2$ و $n = 7$

$$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

$$S_7 = 3\left(\frac{1-(-2)^7}{1-(-2)}\right)$$

$$= 3\left(\frac{1-(-128)}{3}\right) = 129$$

بژمێرا ڕوونكرنێ بكاربینە بۆ ساخكرنێ.

```
sum(seq(3(-2)^(X
-1),X,1,7,1))
                129
```

ب $\sum_{k=1}^{k=5}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

پێنگاڤا (1)ێ: ڕادەیی a_1 بهەژمێرە.

$$a_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{1-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$$

پێنگاڤا (2)ێ: S_5 بینەدەر

$$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

$$S_5 = 1\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^5}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}\right)$$

$$= \frac{1-\frac{1}{243}}{\frac{2}{3}} \approx 1.49$$

بژمێرا ڕوونكرنێ بكاربینە بۆ ساخكرنێ.

```
sum(seq((1/3)^(X
-1),X,1,5,1))
          1.49382716
```

لبیرا تەبیت

ئەڤ كومەلە بەشە كومەلن، چونكی هەر ئێك ژ وان ژ كۆمەلەكا ڕادەییێن بێدوماهیك یا پێكهاتی. ل وانەیا (5-6) دێ فێربی چەوا سەرجەمێ هندەك زنجیرەییێن بدوماهیك نەهاتی بهەژمێری.

خالا چاقدێریێ

5. سەرجەمێ داخوازكری د هەر زنجیرەكا ئەندازەیدا بهەژمێرە.

أ S_8 د زنجیرەیا $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$

ب $\sum_{k=1}^{k=6} -3(2)^{k-1}$

نموونـــــه 6 بجهێنان لسەر وەرزشێ

128 یاریکەر دقارەمانیا ویمبلدونادایا تەپا تێنسی لسەر ئەردی بەشداربوون، قارەمانی بەردەوامبوو هەتا بتنێ یاریکەرا سەرکەفتیا ئێکێ مای. چەند یاری د ڤێ قارەمانیێ دا هاتنەکرن؟

پێنگاڤا (1)ێ: ئێك ل دویڤ ئێکەکێ بنڤیسە.

بنڤیسە n = ژمارەیا خولان

a_k = ژمارەیا یاریان د خولا k یدا.

S_n = سەرجەمێ ژمارەیا یاریان د n خولاندا.

$a_n = 64\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ خولا ئێکێ 64 یارینە، لەورا $a_1=64$ ، چونکو ژمارەیا یاریان د هەر خولەکێدا دبیتە نیڤا ژمارەیا وان د خولا پێش وێ دا لەورا $r=\frac{1}{2}$.

پێنگاڤا (2)ێ: ژمارەیا خولان بهەژمێرە

$1 = 64\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ خولا دوماهیکی بتنێ یاریەك دهێتە ئەنجامدان.

$\frac{1}{64} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ بەشی توانی ژ بڕەیێ جودا بکە ب دابەشکرنێ لسەر 64 ێ.

$\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\frac{1}{64}$ لسەر شێوەیێ توانەکێ ژ توانێن $\frac{1}{2}$ بنڤیسە.

$6 = n-1$ توانەیان یەکسان بکە

$7 = n$ سادەبکە

پێنگاڤا (3)ێ: سەرجەمێ یاریان بهەژمێرە.

$S_7 = 64\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}\right) = 127$ یاسایا سەرجەمێ زنجیرەیا ئەندازەیی بکاربینە.

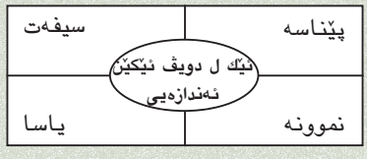
ل وێ خولێ 127 یاری هاتنە ئەنجامدان.

خالا چاڤدێریێ

کۆمپانیەکا مەزن سالانە 84000000 دیناران کرێیا بارەگایێ خۆ ددەت و ئەڤ بڕەیە سالانە 8% ێ زێدە دبیت. ب درێژاهیا 6 سالان ئەڤ کۆمپانیە دێ چەندێ دەت؟

هزریکە و گەنگەشێ بکە

1. سێ ڕادەیێن پشتی هەردوو ڕادەیێن ئێکێ ل ڤێ ئێك ل دویڤ ئێکا ئەندازەی 3, 6, ... بهەژمێرە پاشی هەرسێ ڕادەیێن پشتی هەردوو ڕادەیێن ئێکێ ل ڤی ئێك ل دویڤ ئێکا ژمارەی بهەژمێرە.
2. بەراوردیێ ل ناڤبەرا ناڤەندێ ژمارەیی و ناڤەندێ ئەندازەیی بۆ ڤان هەردوو ژمارەیان 4 و 10 بکە.
3. ڕێکخەربە: ئەڤی هێلکاریێ بەرامبەر دووبارە بنڤیسە و پاشی تەمامبکە. هەر چارچوڤەکی پڕبکە ب ئەوا تو تێگەهشتی ژ ئێك ل دویڤ ئێکێن ئەندازەیی.



فێربە و شرۆڤەبکە

4–6 ڕاهێنان

ڕاهێنانێن ئاراستەکری

1 **زاراف** ئەو ڕادەیێ دکەڤیتە دناڤبەرا دوو ڕادەییێن ل دویڤ ئێکێ نە هاتبن دا د ئێکێ ل دویڤ ئێکەکا ئەندازەیدا دبیتە ـــــ؟ـــــ (ناڤەندێ ژمارەی یان ناڤەندێ ئەندازەی).

بەری خۆ بدە نموونە 1

1 دیاربکە ئەرێ هەر ئێک ژ ڤان ئێک ل دویڤ ئێکەکا ئەندازەیێ یان ژمارەییە یان چ ژوان نینە، هەکەر یا ئەندازەیی بیت، بنچینەیێ و ڕادەیێ د دویڤدا بهەژمێرە.

2 $-10, -12, -14, -16, \ldots$

3 $\frac{1}{2}, 1, 2, 3, \ldots$

4 $-320, -80, -20, -5, \ldots$

بەری خۆ بدە نموونە 2

2 ڕادەیێ دەهێ ل هەر ئێک لدویڤ ئێکەکا ئەندازەیی بینەدەر.

5 $2, 6, 18, 54, 162, \ldots$

6 $5000, 500, 50, 5, 0.5, \ldots$

7 $\ldots -2 ، 1 ، -0.5 ، -0.25 ، -0.125$

بەری خۆ بدە نموونە 3

3 ڕادەیێ شەشێ د ئەوێ ئێک ل دویڤ ئێکا ئەندازەیدا بهەژمێرە، کو دوو ڕادەییێن وێ دیارکرینە.

8 $a_4 = -12 ، a_5 = -4$

9 $a_2 = 4 ، a_5 = 108$

10 $a_3 = 3 ، a_5 = 12$

بەری خۆ بدە نموونە 4

4 ناڤەندێ ئەندازەیی بۆ ڤان هەردوو ژمارەیان بهەژمێرە.

11 6 و $\frac{3}{8}$

12 2 و 32

13 12 و 192

بەری خۆ بدە نموونە 5

5 سەرجەمێ داخوازکری د هەر زنجیرەکا ئەندازەیدا بهەژمێرە.

14 S_8 د زنجیرەیا $2 + 0.2 + 0.02 + \ldots$

15 $\sum_{k=1}^{k=5} (-3)^{k-1}$

16 S_5 د زنجیرەیا $12 - 24 + 48 - 96 + \ldots$

17 $\sum_{k=1}^{k=9} 256\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

بەری خۆ بدە نموونە 6

18 **کرێ** موچەیێ ماموّستایەکێ زمانی د سالاّ وی یا ئێکێدا 8000000 دیناربوون ئەڤ موچەیە سالاّنە ب ڕێژەیا 5% زێدە دبیت. د سالا بیستێدا ژ خزمەتا وی دێ موچێ وی بیتە چەند؟ دوی ماوەیدا چەند وەرگرتبوو؟

ڕاهێنان و شیکارکرنا پرسیاران

ڕاهێنانێن ئازاد

بۆ شیکارکرنا پرسیاران	بەری خۆ بدە نموونە
1	21-19
2	25-22
3	28-26
4	31-29
5	35-32
6	36

دیاربکە ئەرێ ئەڤ ئێک ل دویڤ ئێکەیا ئەندازەییە یان یا ژمارەییە یان چ ژ وان نینە، هەکەر یا ئەندازەیی بیت، بنچینەی و ڕادەیێ د دویڤدا بهەژمێرە.

19 $-36, -49, -64, -81, \ldots$

20 $-2, -6, -18, -54, \ldots$

21 $2, 7, 12, 17, \ldots$

ڕادەیێ نەهێ ل هەر ئێک ل دویڤ ئێکەکا ئەندازەیی بهەژمێرە.

22 $\frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{1}{50}, \frac{1}{250}, \frac{1}{1250}, \ldots$

23 $3, -6, 12, -24, 48, \ldots$

24 $3200, 1600, 800, 400, \ldots$

25 $8, 24, 72, 216, 648, \ldots$

ڕادەیێ حەفتێ د ئەوێ ئێک ل دویڤ ئێکا ئەندازەیدا بهەژمێرە، کو دوو ڕادەییێن وێ دیارکرینە.

26 $a_4 = 54 ، a_5 = 162$

27 $a_5 = 13.5 ، a_6 = 20.25$

28 $a_4 = -4 ، a_6 = -100$

ناڤەندێ ئەندەیی بۆ ڤان هەردوو ژمارەیان بهەژمێرە.

29 9 و $\frac{1}{9}$

30 2 و 81

31 $\frac{1}{5}$ و 45

سەرجەمێ داخوازکری د هەر زنجیرەکا ئەندازەیدا بهەژمێرە.

32 S_6 د زنجیرەیا $1+5+25+125+\ldots$

33 S_8 د زنجیرەیا $10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\ldots$

34 $\sum_{k=1}^{k=6} -1\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

35 $\sum_{k=1}^{k=7} 8(10)^{k-1}$

36 **باب و باپیر** تە دایك و باب و دوو داپیر و دوو باپیر و 4 باب کالك و 4 داپیرێن مەزن هەنە

أ ژمارا باب کالکان و داپیرێن مەزن ل ماوێ 6 بابکان ل پێش تە چەند بوو؟ د ماوێ 21 بابکاندا ل بەری تە چەند بوو؟

ب **دێ چ بیت هەکەر...؟** ڕێسایا هەژمارکرنا باب کالکان و داپیرێن مەزن چەوا دهێتە گوهۆڕین هەکەر تو بابکێ ئێکێ بی؟

دەروازەیەك

ئنتیکە

ترومبێلا ڕولس ڕویس یا سەرمایدار (ڕۆك ئاند) رول جۆن گرانترین ترومبێل بوو کو ب 2.2 ملیون دیناران هاتیە فرۆتن.

بۆ هەر ئێك ل دویڤ ئێکەکا ئەندازەیی: پێناسەیا ئاشکەرا (دیار)، ڕادەیێ دەهێ، و سەرجەمێ دە ڕادەیێن ئێکێ بهەژمێرە.

37 $\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \ldots$

38 $4, 0.4, 0.04, 0.004, \ldots$

39 $8, 16, 32, 64, \ldots$

40 $-22, -11, -\frac{11}{2}, -\frac{11}{4}, \ldots$

41 $162, -54, 18, -6, \ldots$

42 $12.5, 62.5, 312.5, 1562.5, \ldots$

43 **ئنتیکە** شانازێ پوولەکی کەڤن ب 20 000 دیناران کڕی. شانازێ بهایێ وی وەسا دانا کو سالآنە ب 15% ێ دێ زێدە بیت.

أ بهایێ وی پوولی پشتی 4 سالان دێ بیتە چەند؟ پشتی 6 سالآن دێ بیتە چەند؟

ب ئەرێ زێدەبوونا بهایێ پوولی د چوار سالێن ئێکێدا پترە یان د چوار سالێن دوویدا؟ ئەوێ ڕوونبکە.

44 **قستێن زانکویێ** ژ ڕۆژا دایکبوونا شرینێ، داپیر و باپیرێن وێ بڕیاردا کۆ قستێن وەرگرتنا وێ ل زانکویێ بدەن. ل ڕۆژا بوونا وێ 50 دینار دانان، هەر دوو یان بڕیاردا کو هەر سالەکێ دوو جارانی سالا بەری وێ دانن. دەمێ ژییێ شرینێ بوویە 18 سالّ چەند پارە بۆ خرڤەبوون؟ دەمێ ژییێ وێ بۆیە 21 سالّ چەند پارە خرڤەبوون؟

45 **تەکنۆلوژیا** نامەیەکا ئەلکترونی گەهشتە تە، تێدا داخوازیا بەختەکێ باش بۆ تە دکەت، و داخوازا تە دکەت کۆ بۆ 5 هەڤالان بهێنێری، کۆ تۆ ژی داخوازێ ژ وان بکەی کۆ بۆ 5 ێن دی بهێنێرن، و هەروەسا... ژمارەیا نامەیان پشتی 10 ئاستان دێ بیتە چەند؟

46 **فراکتال Fractals** مەحفیرێ سێرپنسکی Sierpenski لسەر شێوەیەکی ژ ئێك بوونێیە و لسەر چوار گوشەیەکێ یا بەندە. د هەر خولەکێدا ژ ناڤەڕاستێ چوارگۆشەکا ڕەنگگری چوار گۆشەکێ ژێ دەردئینیت، هەر وەکی ل شێوەیێ ل خوارێ دیار.

أ هەکەر ڕووبەرێ چوارگۆشەیا ئێکێ $1\ m^2$ بیت. ئێك ل دویڤ ئێکەکێ بنڤیسە کو ڕووبەرێن ڕەنگگری یێ بدەست کەفتی د هەر خولەکێدا دیاربکەت.

ب د کیژ خولێدا ڕووبەرێ ڕەنگگری دێ کێمتر لێهێت ژ $\frac{1}{2}\ m^2$ ؟

47 **کاغەز** ستووراتیا کاغەزەکا سپی 0.1 mm. هەکەر تە ئەو کاغەزا پێچا دێ ستووری بیتە دوو جارانی خۆ.

أ هەکەر وێ کاغەزێ ب زێدەهی 7 جاران بپێچی ستووراتیا وێ پشتی حەفت جاران هاتیە پێچان دێ بیتە چەند؟

ب وەسا دانە کۆ تو دشێی ئەڤێ کاغەزێ هندی تە بڤێت بپێچی. پشتی چەند جاران ستووراتیا وێ دێ ژ کوپکێ ئیڤەرست Everest (بلندهیا وێ 8 850 m) زێدەتر بیت.

48 ئێك ل دویڤ ئێکەکا ژمارەیی و ئێکا دی یا ئەندازەیی دیاربکە ب مەرجەکی هەر ئێك ب ئەڤی شێوەیی دەستپێبکەت ... 1,4, .

49 **پیڤان** خشتەیێ بەرامبەر پیڤانێن هندەك جۆرێن كاغەزێ دیاردكەت كو گەلەك بكارئینان هەنە.

أ دریژی و پانی وێ كاغەزێ بۆ هەر پیڤانەكێ بپشكنە، دێ چ پەیوەندیێ بینی؟

ب ئەو كیژ پەیوەندیا ڕووبەرێن كاغەزێن جۆراوجۆر پێكڤە گرێددەت. ناڤێ پەیوەندیێ چییە؟

پیڤانێن كاغەزێ	
جۆر	پیڤان ب (گرێ)
A	$8\frac{1}{2}\times 11$
B	11×17
C	17×22
D	22×34
E	34×44

50 داهاتیێ ئێك ژ فلمێن سینەمایی د حەفتیا ئێكێدا ژ پیشاندانێ گەهشتە 60 ملیار دیناران و 9.6 ملیار دینار د حەفتیا سیێدا. وەسا دانە كو داهاتیێن حەفتیانە ئێك ل دویڤ ئێكەكا ئەندازەی دنوێنیت.

أ داهاتی فیلمی د حەفتیا دوویدا بخەملینە.

ب ڕێژەیا كێمبوونا داهاتیان ژ حەفتیەكێ بۆ حەفتیەكێ چەندە؟

ج د كیژ حەفتیێدا تو پێشبینیێ دكەی كو داهاتی دێ كێمتر بیت ژ ئێك ملیار دیناران؟

د پیشاندانا فلمی 8 حەفتیان یا بەردەوام بوو. سەرجەمێ داهاتیێن پشاندانێ چەندە؟

51 **زیندەزانی** ژمارەیا جۆرەكی ژ بەكتریان وەكی ئێك ل دویڤ ئێكەكا ئەندازەیی زێدە دبیت. ژمارەیا بەكتریان پشتی دەمژمێرەكێ 4 بوون و دبیتە 1024 پشتی 5 دەمژمێران. پشتی دوو دەمژمێرین دی ژمارەیا بەكتریا دبنە چەند؟ پشتی 3 دەمژمێران چەندە؟ پشتی 4 دەمژمێران چەندە؟

52 **پارەدان** كۆمپانیەك بارەگایەك ب بڕێ 750 000 دیناران ب هەیڤانە بكرێ گرت د سالا ئێكێدا، ب جورەكی كۆ پشتی سالا ئێكێ ب ڕێژەیا 10% ێ سالانە زێدەبكەت.

أ زنجیرەكێ بنڤیسە بۆ بڕێ وی پارەیێ كۆمپانی ل ماوەیێ 5 سالان ددەت.

ب هێمایێ سەرجەمی بكاربینە بۆ نواندنا ئەوی پارەیێ كۆمپانی سالانە ددەت ل ماوەیێ 10 سالان، پاشی بهایێ وێ دەربینە.

53 **میوزیك** لەرەلەرێن هندەك نوتێن میوزیكێ دبنە ئێك ل دویڤ ئێكەكا ئەندازەیی دەمێ C_0 دبیتە لاوازترین نوتە.

أ نوتەیا C_4 دبیتە نوتەیا ناڤەند بۆ ڤی جۆرەی. لەرەلەرا وێ چەندە؟

ب ئێك ل دویڤ ئێكەكا ئەندازەیی بنڤیسە كۆ لەرەلەرا ئەڤان نوتەیان ژڤی جۆری بنوێنێت، دانە $a_1 = C_1$.

ج گوهێن مرۆڤی نەشێن گول نوتێن لەرەلەرێن وان زێدەترین ژ 20 000 هیرتزان. خانەیا نوتەیا ئێكێ ژ ڤی جوری ئەوا گوهێن مرۆڤی گولێ نەبیت چەندە؟

پیڤانێن نۆتەیان	
نۆتە	لەرەلەرە (ب هێرتز)
C_0	16.35
C_1	32.7
C_2	65.4
C_3	130.8
C_4	■

54 **نوژداری** نەخۆشخانەكێ ل دەمێ بەلاڤبوونا ئەنفلوەنزادا 16 نەخۆش د حەفتیا ئێكێدا تۆمارکرن و 56 نەخوش د حەفتیا دوویدا، و196 د حەفتیا سێیێدا.

أ ئێك ل دویڤ ئێكەكا ئەندازەیی بنڤیسە كو ژمارەیا نەخۆشان ب ئەنفلەوەنزێ بنوێنیت.

ب هەكەر ژمارەیا نەخوشان زێدە ببیت لسەر ڤی شێوەی، د كیژ حەفتیێدا سەرجەمێ نەخۆشان دێ گەهیتە 10000 نەخۆشان؟

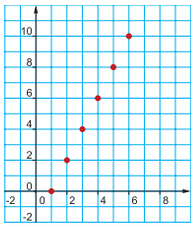
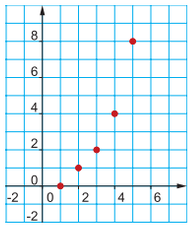
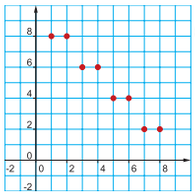
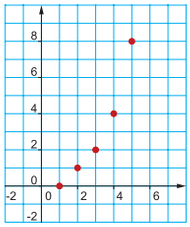
55 **هزركرنا ڕەخنەگر** هەكەر بنچینە r مەزنتربیت ژ 1ێ. دێ چ كارتێكرن هەبیت لسەر ئێك لدویڤ ئێكەكا ئەندازەیی؟ دێ چ كارتێكرن هەبیت هەكەر $0 < r < 1$؟

56 **بنڤیسە** دێ ڕادەیێن ئێك ل دویڤ ئێكا ئەندازەی چ لێهێن هەكەر ڕادەیێ ئێكێ سێ جاران بكەن؟ دێ چ بسەر سەرجەمێ ڕادەیێن ئێكێ هێت؟

57 کێژ ڤان دبیتە سەرجەمێ شەش ڕادەیێن ئێکێ د ئەڤێ ئێك لدویڤ ئێکا ئەندازەییدا ...+36+18+9+4.5؟

أ) 67.5 ب) 144 ج) 283.5 د) 445.5

58 کێژ وێنەیێ روونکرنێ وەسا دیاردکەت کۆ ئێك ل دویڤ ئێکا ئەندازەییە؟

أ) 
ب) 
ج) 
د) 

59 کێژ ڤان دبنە هەر سێ ڕادەیێن ئێکێ د ئێك ل دویڤ ئێکەکا ئەندازەییدا دەمێ $a_7=-192$ و $a_9=-768$ ؟

أ) 3, −6, 12
ب) −3, 12, −48, ...
ج) −3, 6, −12 یان −3, −6, −12
د) 3, −12, 48 یان −3, −12, −48

60 کێژ ڤان بهایێ ئەڤێ زنجیرەیێیە 50.625 − 33.75 + 22.5 − 15 + 10 ؟

أ) $\sum_{k=1}^{5} 10\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$ ب) $\sum_{k=1}^{5} -10\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$ ج) $\sum_{k=1}^{5} 10\left(-\frac{3}{2}\right)^{k-1}$ د) $\sum_{k=1}^{5} -10\left(-\frac{3}{2}\right)^{k}$

بەرهنگاری و بەرفرەهکرن

بژمێرا ڕوونکرنێ د هەر ئێك ل دویڤ ئێکەکا ئەندازەییدا ڕادەیێ ئێکێ کو بهایێ وی ژ ملیونێ زێدەتر بیت چەندە؟

61 $a_1=10$ ، $r=2$

62 $a_1=\frac{1}{4}$ ، $r=4$

63 $a_1=0.01$ ، $r=3.2$

64 سەرجەمێ سێ ڕادەیێن ل دویڤ ئێك ل دویڤ ئێکەکا ئەندازەی دبیتە 73.5 . ئەڤ ڕادەنە چنە، دەمێ بزانی کو ئەنجامێ لێکدانا وان 2744 ؟ ئەڤێ ڕوونبکە.

65 ئێك ل دویڤ ئێکا ئەندازەیی ئەوا ڕادەیێ ئێکی 55 ، و بنچینەیێ وێ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ بیت بکاربینە.

أ هەر پێنج ڕادەیێن ل دویڤ ڕادەیێ ئێکێ دهێن بهەژمێرە، ب نێزیککرنێ بۆ نێزیکترین ژمارەیا تەمام.

ب سەرجەمێ هەردوو ڕادەیێن ل دویڤ ئێك دهێن بهەژمێرە، دێ چ بینی؟

ج دەستەواژەیەکا تایبەت بۆ ڤێ ئێك ل دویڤ ئێکێ دارێژە.

پێداچوونا لوولپێچی

سفرێن هەر نەخشەیەکێ و دەرکنارێن وێ دەربینە. (پولێن پێشتر)

66 $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x+1}$

67 $f(x)=\frac{x+5}{x^2-x-6}$

68 $f(x)=\frac{x^2-16}{4x}$

69 **بازار** مارکێتەکا مەزن داشکاندنەك ب ڕێژەیا 20% ێ دانا سەر کەل و پەلێن خۆ، بۆماوێ هەیڤەکێ. زێدەباری داشکاندنەکا دی د ڕۆژێن دووشەمبێدا ب ڕێژەیا10% . (وانەیا 5–3)

أ نەخشەیەکا ئاوێتە بنڤیسە کو بهایێ متایەکێ ل ڕۆژا دووشەمبێ ل دویڤ بهایێ وێ یێ بنەڕەت xبنوێنیت.

ب جیهانێ ل ڕۆژا دووشەمبی کراسەك کری. چەند پارە دان، هەکەر بزانی کو بهایێ کراسی یێ بنەڕەت 275000 دینارن؟

دەھ ڕادەیێن ئێکێ ل هەر ئێك ل دویڤ ئێکەکا ژمارەیی بهەژمێرە. (وانەیا 6–3)

70 78, 65, 52, 39, 26, ...

71 1.7, 7.3, 12.9, 18.5, 24.1, ...

72 9.42, 9.23, 9.04, 8.85, 8.66, ...

73 16.4, 26.2, 36, 45.8, 55.6, ...

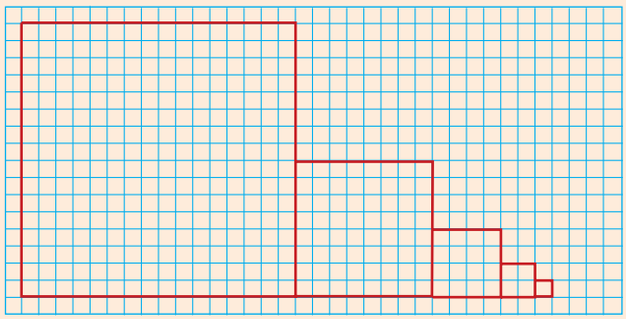
بەریەرێ تەکنۆلۆژیا

قەدیتنا زنجیرەییێن ئەندازەیی ییێن بدوماهیك نەهاتین (بێدوماهیك)

تو دشێی ئێك ل دویڤ ئێکێن ئەندازەیی ییێن بدوماهیك نەهاتین بکارئینانا ئێك ل دویڤ ئێکەکا چوارگۆشەیان ببینی.

چالاکی 1

1. لسەر کاغەزا هێلی یا ڕوونکرنێ، چوارگۆشەیەکێ دریژایا لایەکێ وێ 16 یەکەییێن دریژیێ بن بکێشە. بەرێ خۆ بدێ چێوەیێ وێ دبیتە 64 یەکە.
2. ژ تەنیشت وێ چوارگۆشەیا تە دروستکری هندەك چوارگۆشەییێن دی بکێشە کو دریژیا لاییێن وان ئێك ل دویڤ ئێك 8 و 4 و 2 و 1 بن.



3. خشتەیێ بەرامبەر کۆپی بکە. و هەر شەش ڕێزێن ئێکێ تەمامبکە ئەو ژی ب تۆمارکرنا چێوەی چوار گۆشەیان د ستوونا دووێدا، و سەرجەمێ کەلۆکی یێ ڤان چێوەیان د ستوونا سێیێدا تۆماربکە.

دریژیا لایێ چوارگۆشەیێ	چێوە	سەرجەمێ کەلوکی
16	64	64
8	32	96
4		
2		
1		
$\frac{1}{2}$		

4. هێمایێ سەرجەمێ بکاربینە بۆ نڤیسینا زنجیرەکا ئەندازەیی کو دبیتە سەرجەمێ چێوەیان.
5. بژمێرا ڕوونکرنێ بکاربینە بۆ دەرئینانا سەرجەمێ بیست ڕادەییێن ئێکێ.
6. **دەستەواژەیەکێ بنڤیسە** دەربارەی سەرجەمێ کەلۆکی یێ چێوەیان هەکەر تو یێ بەردەوام بی ل دروستکرنا چوارگۆشەیان بێدوماهیك.
7. بهایێ بڕ $\frac{64}{1-\frac{1}{2}}$ بهەژمێرە، پەیوەندی چییە ل ناڤبەرا ئەوێ تە هەژمارتی و بەرسڤا پرسیارا 6 یێ؟

هەولبدە

1. خشتەیێ بەرامبەر دروستبکە، ب هەژمارتنا ڕووبەرێ چوارگۆشەیان و سەرجەمێ کەلۆکی بۆ ڕووبەرێن وان تەمامبکە.
2. هێمایێ سەرجەمێ ڕووبەرێن وان ب زنجیرەیا ئەندازەی بنڤیسە.
3. بژمێرا ڕوونکرنێ بکاربینە بۆ هەژمارتنا سەرجەمێ دەھ ڕادەییێن ئێکێ.
4. **دەستەواژەیەکێ بنڤیسە** دەربارەی سەرجەمێ کەلۆکی یێ ڕووبەران هەکەر یێ بەردەوامبی لسەر دروستکرنا چوارگۆشەیان بێدوماهیك.

دریژیا لایێ چوارگۆشەیێ	ڕووبەر	سەرجەم
16		
8		
4		
2		
1		
$\frac{1}{2}$		

5. بهایێ ڤێ بڕەیێ $\frac{256}{1-\frac{1}{4}}$ بهەژمێرە، چ پەیوەندی دێ هەبیت ل ناڤبەرا ئەوا تە دەرئینای و بەرسڤا پرسیارا 4 یێ؟
6. **ئەنجامی پوختەبکە** یاسایەکێ بنڤیسە بۆ هەژمارتنا بهایێ زنجیرەکا ئەندازەیا بێدوماهیك، بهایێ ڕووتێ بنچینەی r ژ (1)یێ کێمتربیت و ژ سفرێ مەزنتر بیت.

بەشێ 6 ئێك ل دویڤ ئێك و زنجیرە

5-6 دەرئەنجامێ بیرکاری

Mathematical Induction

ئارمانج

- هەژمارتنا بهایێ زنجیرەیا ئەندازەی یا بێدماهیك.
- دەرئەنجامێ بیرکاری بۆ سەلماندنا دەستەواژەیان بکاردئینن.

بۆچی ئەم فێری ئەڤێ دبین؟

تو دشێی زنجیرەیێن ئەندازەیێن بێدماهیك بکاربینی بۆ ڤەدیتنا شێوازێن دووبارەبوویێن (پرسیارا 58).

زاراڤ
Vocabulary

زنجیرەیا ئەندازەیی یا بێدوماهیك
Infinite geometric series

لێکنێزیکبوون (توافقية، تقاربية)
Convergent

ئارمانج
Limit

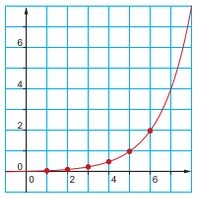
ژێکدویربوون (تخالفية، تباعدية)
Divergent

دەرئەنجامێ بیرکاری
Mathematical Induction

د وانەیێن بۆریدا تۆ فێربووی کا چاوا سەرجەمێ بەشەکی د زنجیرەیەکا ئەندازەییدا بهەژمێری. د ئەڤێ وانەیێدا دێ فێری هەژمارتنا سەرجەمی زنجیرەیێن ئەندازەیێن بێ دوماهیك بی. زنجیرەیا ئەندازەیا بێدوماهیك **Infinite geometric series** پێکدهێت ژ ژمارەکا بێدوماهیك یا ڕادەیان. بەرێ خو بدە ئەڤان هەردوو زنجیرەیێن بێدوماهیك ئەوێن لخوارێ.

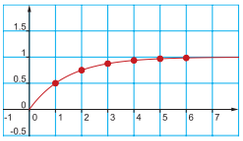
$$R_n = \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \dots$$

سەرجەمێ بەشان						
n	1	2	3	4	5	6
R_n	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{31}{32}$	$\frac{63}{32}$



$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$$

سەرجەمێ بەشان						
n	1	2	3	4	5	6
S_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{31}{32}$	$\frac{63}{64}$



بەرێ خو بدێ کو ل زنجیرەیا ئەندازەی S_n بنچینە یەکسانە $\frac{1}{2}$ و سەرجەمێ ڕادەیان بۆ 1 نێزیك دبیت هەر چەند بهایێن n مەزن ببن. ل دەمێ $|r|<1$ سەرجەمێ بەشان ل زنجیرەیا ئەندازەی بۆ ژمارەیەکا دیارکری نێزیك دبیت هەر چەند بهایێ n زێدەدبین. دڤی باریدا دێ بێژی کۆ ئەڤ زنجیرەیا **لێکنێزیکبوونە Convergent** و ئەڤ ژمارە **ئارمانجا Limit** ڤێ زنجیرێیە.

ئەڤ چەندە یا جودایە دگەل زنجیرەیا R_n . دەمێ $|r|\geq 1$ ، و بهایێن n زێدەببن، بهایێن سەرجەمێن بەشەیان دێ زێدەبن و دێ ژ هەر ڕادەکی بۆرن. د ڤی باریدا دێ بێژی کو ئەڤ زنجیرە یا **ژێکدویربوونە Divergent**.

نموونـــــە 1 ژێکجوداکرنا زنجیرەیێن ئەندازەیێن لێکنێزیکبوون و ژێکدوبربوون

دیاربکە ئەڤ زنجیرا ئەندازەی یا لێکنێزیکبوونە یان ژێکدویربوونە.

أ $20 + 24 + 28.8 + 34.56 + \dots$

$r = \frac{24}{20} = 1.2$ ؛ $|r| \geq 1$

ئەڤ زنجیرەیا ژێکدویربوونە و سەرجەم نینە

ب $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots$

$r = \frac{1}{3}$ $|r| < 1$

ئەڤ زنجیرەیا لێکنێزیکبوونە و سەرجەمێ هەی

خالا چاڤدێریێ

1. دیاربکە ئەرێ ئەڤ زنجیرەیا ئەندازی یا لێکنێزیکبوونە یان ژێکدویربوونە.

أ $\frac{2}{3} + 1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{27}{8} + \dots$

ب $32 + 16 + 8 + 4 + 2 + \dots$

هەکەر زنجیرەیا ئەندازەیی یا لێکنێزیکبوون بیت، دێ شێی سەرجەمێ وێ هەژماربکەی. ب زۆرە بۆ زنجیرەیا $S_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\dots$ یاسایا سەرجەمێ زنجیرەیا ئەندازەی بکاربینە کو $a_1=\frac{1}{2}$ و $r=\frac{1}{2}$.

$$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{2\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ب وێنەیێ ڕوونکرنێ ئەڤێ نەخشەیێ $S(n)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$ بنوێنە. ببینە کو بهایێ $S(n)$ دێ نێزیکێ 1 ێ بیت هەر چەند بهایێ n زێدەبیت، هەتا n نیزیك بیت بۆ بێدوماهیا موجەب $+\infty$ دی $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ نێزیکی سفرێ بیت. ئەڤە وێ چەندێ دیاردکەت کو سەرجەمێ ئەوێ زنجیرەیێ دبیتە 1، یا دشیاندایە کۆ ئەڤێ تێگەهێ بۆ گشت زنجیرەیێن ئەندازەیێن لێکنێزیکبوون بکاربینن، بکارئینانا هەژمارتنا جیاکاری و تەواو کاریێ.

فێربە و شرۆڤە بکە

سەرجەمێ زنجیرەییێن ئەندازەییێن بێدوماهیك

هەکەر بنجینەیێ ئێك ل دویڤ ئێکەکا ئەندازەی یا بێدوماهیك r بیت و ئەڤی مەرجی ساخبکەت $|r|<1$، دێ ئەو زنجیرە لێکنێزیکبوون بیت و سەرجەمێ وێ دبیتە $S=\frac{a_1}{1-r}$

دەمێ a_1 رادەیێ ئێکێ و r بنجینە بیت.

نموونـــــە 2 هەژمارتنا سەرجەمێ زنجیرەکا ئەندازەیا بێدوماهیك

سەرجەمێ ڤێ زنجیرەیا ئەندازەیا بێدوماهیك بینەدەر، هەکەر سەرجەم هەبیت.

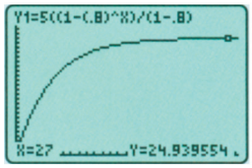
أ $5+4+3.2+2.65+\dots$

$r=0.8$ زنجیرەیا لێکنێزیکبوونە چونکی $|r|<1$

$S=\frac{a_1}{1-r}$ یاسا

$S=\frac{5}{1-0.8}=\frac{5}{0.2}=25$ لجهێ وێ دانە

ساخبکە وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ ڤێ نەخشەیێ $y=5\left(\frac{1-(0.8)^x}{1-0.8}\right)$ بکێشە بکارئینانا بژمێرا ڕوونکرنێ. یا دیارە کو بهایێ y بەرەڤ 25 دچیت.



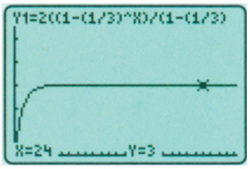
ب $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{3^{k-1}}$

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{3^{k-1}}=\frac{2}{1}+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\dots$

$r=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ زنجیرە یا لێکنێزیکبوونە چونکی $|r|<1$

$S=\frac{a_1}{1-r}=\frac{2}{1-\frac{1}{3}}=\frac{2}{\frac{2}{3}}=\frac{6}{2}=3$ یاسا

ساخبکە وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ ڤێ نەخشەیێ $y=2\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^x}{1-\frac{1}{3}}\right)$ بکێشە بکارئینانا بژمێرا ڕوونکرنێ. یا دیارە کو بهایێ y نێزیکی 3 دبیت.



ڕوونکرنەك

تو دشێی ئێك لدویڤ ئێکەکا ئەندازەیی ب وێنەیێ ڕوونکرنێ بنوێنی بکارئینانا یاسایا سەرجەمێ وێ، هەر وەکی د وانەیا بووریدا هاتی $S=a\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$، ب دانانا y لجهێ S و x لجهێ n، و لجهـ دانانا بهایێن a_1 و r.

خالا چاڤدێریێ

2. سەرجەمێ ڤێ زنجیرەیا ئەندازەیا بێدوماهیك بهەژمێرە، هەکەر سەرجەم هەبیت.

أ $25-5+1-\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\dots$ ب $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^k$

تو دشێی زنجیرەیێن ئەندازەیێن بێدوماهیك بکاربینی بۆ نڤێسینا ژمارەیەکا ڕێژەیی دەوری لسەر شێوەیێ کەرتێ.

نموونـــــە 3 نڤیسینا ژمارەیەکا ڕێژەیی دەوری لسەر شێوەیێ کەرتێ

قێ ژمارێ ...0.232323 وەك کەرت و بسادەترین شێوە بنڤیسە.

پێنگاڤا (1)ێ: قێ ژمارێ وەك زنجیرەکا ئەندازەیا بێدوماهیك بنڤیسە.

$0.232323... = 0.23 + 0.0023 + 0.000023 + ...$ شێوازەکی بکاربینە بۆ نڤێسینا زنجیرەیێ

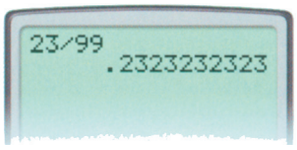
پێنگاڤا (2)ێ: بنچینەیێ بهەژمێرە.

$r = \frac{0.0023}{0.23} = \frac{1}{100} = 0.01$ زنجیرە لیکنێزیکبوونە چونکی $|r|<1$

پێنگاڤا (3)ێ: سەرجەمی بهەژمێرە.

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{0.23}{1-0.01} = \frac{0.23}{0.99} = \frac{23}{99}$$

ساخبکە: بژمێرێ بکاربین بۆ دابەشکرنا 23 لسەر 99 ێ.



√

لبیرا تە بیت

لبیراتەبێت کۆ هەر ژمارەیەکا دەوری وەك ...0.232323 یان $0.\overline{23}$ ژمارەیەکا ڕێژەییە و دشێی لسەر شێوەیێ کەرتێ بنڤیسی.

خالا چاڤدێریێ

3. قێ ژمارێ ...0.111 وەك کەرت بنڤیسە و لسەر سادەترین شێوە.

تە زنجیرە بکارئینان بۆ هەژمارتنا سەرجەمان، وەکی سەرجەمێ ژمارەیێن تەواو ژ 1 هەتا 100. تو دشێی ئەوان یاسایێن بکارهاتین بۆ هەژمارتنا ڤان جورێن سەرجەمان بسەلمینی ب ڕێیەکێ ژ ڕێکێن سەلماندنێن بیرکاری دبێژنێ دەرئەنجامێ بیرکاری **Mathematical induction**

فێربە و بڕێبکە

سەلماندن ب دەرئەنجامێ بیرکاری

بۆ سەلماندنا دروستیا دەستەواژەیەکێ بۆ هەر بهایەکی سروشتی n ، ئەڤان پێنگاڤان پەیرەوبکە:

پێنگاڤا (1)ێ: بارەیێ ئێکێ ساخبکە: دیاربکە کۆ ئەڤ دەستەواژە یا دروستە دەمێ $n=1$.

پێنگاڤا (2)ێ: وەسا دانە کو ئەڤ دەستەواژە یا دروستە دەمێ $n=k$.

پێنگاڤا (3)ێ: بسەلمینە کو ئەڤ دەستەواژە یا دروستە دەمێ $n=k+1$.

نموونـــــە 4 سەلماندن ب دەرئەنجامێ بیرکاری

دەرئەنجامێ بیرکاری بکاربینە بۆ سەلماندنا $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

پێنگاڤا (1)ێ: بارەیێ ئێکێ ساخبکە، دیاربکە کو ئەڤ دەستەواژە یا دروستە دەمێ $n=1$.

$1=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1(1+1)}{2}=1$ دەستەواژە یا دروستە دەمێ $n=1$

پێنگاڤا (2)ێ: وەسا دانە کۆ ئەڤ دەستەواژە یا دروستە دەمێ $n=k$.

$1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$ لجهێ n ، k دانە

پێنگافا (3)ێ: بیسەلمێنە کۆ ئەڤ دەستەواژە یا دروستە دەمێ $n=k+1$.

$$1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

$1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$	ڕادەیی $k+1$ ل هەردوو لایان زێدە بکە.
$=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2}$	ژێرەیا هاوبەش بینەدەر
$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$	هەردوو سەران کومبکە
$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$	پێ $(k+1)$ شیتەل بکە
$=\frac{(k+1)\left[(k+1)+1\right]}{2}$	پێ $k+1$ بنڤیسە

ئەڤ دەستەواژە $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ یا دروستە بۆ هەموو بهایێن سروشتی n .

4. دەرئەنجامێ بیرکاری بکاربینە بۆ سەلماندنا سەرجەمێ ژمارەیێن سروشتی یێن کت کو $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$.

خالا چاڤدێریێ

چێدبیت هندەك دەستەواژەیێن بیرکاری وەسا دیاربن کۆ ددروستن بۆ گەلەك باران. بەلێ ئەڤ چەندە بەس نینە کو بێژین ئەڤە یا دروستە بۆ گشت باران. بۆ سەلماندنا نە دروستیا دەستەواژەێ، دژە نموونەیەکێ بینە وەسا دیاربکەت کو دەستەواژە نەیا دروستە د ئێك باریدا.

نموونـــــە 5 هەژمارتنا سەرجەمێ زنجیرەیەکا ئەندازەیی

دژە نموونەکێ بینە کو دروستیا $2^n \geq n^2$ دیار بکەت، دەمێ n ژمارەکا ڕاستی بیت.

ڕۆناهیەك

لبیرا تە بیت کو هەژمارتنا زۆربەیا دژە نموونەیان بکارئینانا ژمارەیێن تایبەت وەك 0 و 1 ژمارەیێن سالب یان کەرتان بخۆڤەدگریت.

$2^0 \geq (0)^2$	$2^1 \geq (1)^2$	$2^4 \geq (4)^2$	$2^{-1} \geq (-1)^2$
$1 \geq 0$ √	$2 \geq 1$ √	$16 \geq 16$ √	$\frac{1}{2} \geq 1$ ✗

لەورا $2^n \geq n^2$ نەیا دروستە، دەمێ $n=-1$ ، ئەڤە وێ چەندێ دسەلمینیت کو دەستەواژە نەیا دروستە هەکەر بهایێ n هەر ژمارەیەکا راستی بیت.

خالا چاڤدێریێ

5. دژە نموونەیەکێ بینە کو نە دروستیا $\frac{a^2}{2} \leq 2a+1$ دیاربکەت، دەمێ a ژمارەکا ڕاستی بیت.

هزربکە و گەنگەشێ بکە

1. دێ چەوا دیارکەی کو زنجیرەیا ئەندازەیا بێدوماهیك یا لێکنێزیکبوونە یان ژێکدویربوونە؟
2. چەوا ژمارەیا ڕێژەیا دەوری $0.\overline{83}$ دێ گوهۆڕی بۆ زنجیرەیەکا ئەندازەیا بێدوماهیك.
3. ڕێکخەربە ئەڤێ خشتەیا ل خوارێ کۆبی بکە و پاشی تەمامبکە. جۆرێن جیاوازێن زنجیرەیێن ئەندازەیێن بێدوماهیك پوختە بکە.

فێربە و جەربکە

	نموونە	بنچینە	سەرجەم
زنجیرەیا لێکنێزیکبوون			
زنجیرەیا ژێکدویربوون			

5–6 ڕاهێنان

ڕاهێنانێن ئاراستەکری

1 **زاڕاف** ئەو زنجیرەیا ئەندازەیا بێدوماهیك کو بهایێن ڕادەیێن وێ نێزیکی ژمارەیەکا دیارکری بیت دگەل زێدەبوونا بهایێ n دبیتە زنجیرەیەکا ـــــــــ؟
(لێکنێزیکبوون یان ژیکدویربوون)

بەرێ خۆ بدە نموونە 1

دیاربکە ئەرێ ئەڤ زنجیرە یا لێکنێزیکبوونە یان ژێکدویربوونە.

2 $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots$ **3** $1-5+25-125+\ldots$ **4** $27+18+12+8+\ldots$

بەرێ خۆ بدە نموونە 2

سەرجەمێ زنجیرەیا ئەندازەیا بێدوماهیك بهەژمێرە، هەکەر سەرجەم هەبیت.

5 $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\ldots$ **6** $\sum_{k=1}^{\infty}4(0.25)^k$ **7** $800+200+50+\ldots$

بەرێ خۆ بدە نموونە 3

ژمارەیا دەوری وەك کەرت و لسەر سادەترین شێوە بنڤیسە:

8 $0.888\ldots$ **9** $0.\overline{56}$ **10** $0.131313\ldots$

بەرێ خۆ بدە نموونە 4

11 دەرئەنجامێ بیرکاری بکاربینە بۆ سەلماندنا سەرجەمێ ژمارەیێن سروشتی یێن جووت
$2+4+6+8+\ldots+2n=n(n+1)$.

بەرێ خۆ بدە نموونە 5

دژە نموونەیەکێ دیاربکە کۆ نەدروستیا دەستەواژەیێ بسەلمینیت هەکەر ژمارەیا ڕاستی n هەر چەند بیت.

12 $n^4 \geq 1$ **13** $\log n > 0$ **14** $n^3 \leq 3n^2$

ڕاهێنان و شیکارکرنا پرسیاران

دیاربکە ئەرێ ئەڤ زنجیرەیا ئەندازەیی یا لێکنێزیکبوونە یان ژێکدویربوونە.

15 $3+\frac{3}{5}+\frac{3}{25}+\frac{3}{125}+\ldots$ **16** $5+10+20+40+\ldots$ **17** $2-4+8-16+\ldots$

سەرجەمێ زنجیرەیا ئەندازەیا بێدوماهیك بهەژمێرە، هەکەر سەجەم هەبیت.

18 $\sum_{k=1}^{\infty}60\left(\frac{1}{10}\right)^k$ **19** $\frac{8}{5}-\frac{4}{5}+\frac{2}{5}-\frac{1}{5}+\ldots$ **20** $\sum_{k=1}^{\infty}(3.5)^k$

ژمارەیا دەوری وەك کەرت لسەر سادەترین شێوە بنڤیسە.

21 $0.\overline{6}$ **22** $0.90909\ldots$ **23** $0.541541541\ldots$

24 دەرئەنجامێ بیرکاری بکاربینە بۆ سەلماندنا $\frac{1}{1(2)}+\frac{1}{2(3)}+\frac{1}{3(4)}+\frac{1}{4(5)}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

دژە نموونەیەکێ دیاربکە کو دروستیا دەستەواژەیێ دەربێخیت هەکەر ژمارەیا راستی n هەر چەند بیت.

25 $n^3 \neq -n^2$ **26** $n^4 > 0$ **27** $5n^2 > 2^n$

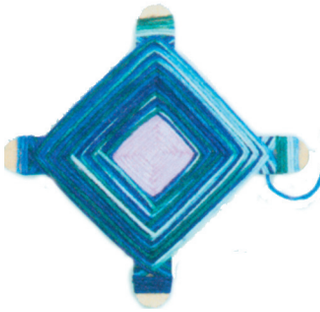
28 **شاشی د شیکارکرنێ دا** ئەڤە دوو بەرسڤن بۆ هەژمارتنا سەرجەمێ زنجیرەیا ئەندازەیا بێدوماهیك $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{4}{5}+\ldots$. کیژ وان نەیا دروستە؟

أ
$S=\frac{\frac{1}{5}}{1-2}=-\frac{1}{5}$

ب
سەرجەم بۆ ڤی زنجیرەیێ نینە.

ڕاهێنانی ئازاد

بۆ شیکارکرنا پرسیاران	بەرێ خو بدە نموونە
17-15	1
20-18	2
23-21	3
24	4
27-25	5



29 **هونەر** هونەرمەندەکی تابلویەکا مەزن دروستکر کو ژ چەند چوارگۆشەیێن ئێك دناف ئێکێدا پێکهاتبوو. داڤەکا دەزی بکارئینانا بۆ دروستکرنا چوارگۆشەیان. درێژیا لایێ چوارگوشەیا ژ هەمیان مەزنتر 8m و درێژاهیا لایێ هەر چوارگوشەکا ژ ناڤدا یەکسانە 90% ژ درێژیا لایێ چوارگۆشەیا ئەو دناڤدا. وەسا دانە کو هونەرمەند دشێت چوارگۆشەیان زێدە بکەت کو ئێك دناف یا دیدا هەتا بێدوماهیکێ دروست بکەت هونەرمەند دێ پێدڤی چەند مێترێن دەزی بیت؟ (ئەڤێ شیوازێ بهاریکاریا زنجیرەکا ئەندازەیی یا بێدوماهیك بنوێنە).

سەرجەمێ زنجیرەیا ئەندازە یا بێدوماهیك بهەژمێرە، هەکەر سەرجەم هەبیت.

30 $215-86+34.4-13.76+\ldots$

31 $500+400+320+\ldots$

32 $8-10+12.5-15.625+\ldots$

33 $\sum_{k=1}^{\infty}-5\left(\frac{1}{8}\right)^{k-1}$

34 $\sum_{k=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$

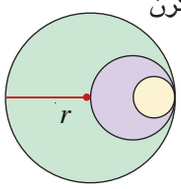
35 $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^{k-1}$

36 $-25-30-36-43.2-\ldots$

37 $\sum_{k=1}^{\infty}200(0.6)^{k-1}$

38 **ئەندازە** بەرێ خۆ بدە شێوازێ بەرامبەر، کو هەر بازنەك دناڤ بازنەکێدا هاتیە وێنەکرن

ب جۆرەکی نیڤتیرەیێ هەر بازنەکێ یەکسانە نیڤا نیڤتیرەیێ بازنەیا ئەو دناڤدا.



أ زنجیرەیەکا ئەندازەییا بێدوماهیك پێ r بنڤیسە چێوەیێن وان بازنان بنوێنیت.

ب سەرجەمێ چێوەیێن ڤان بازنان بهەژمێرە، هەکەر نیڤتیرەێ بازنا ژ هەمووان مەزنتر 3 cm بیت.

ژمارەیا دەوری وەك کەرت بسادەترین شێوە بنڤیسە.

39 $0.\overline{4}$

40 $0.\overline{9}$

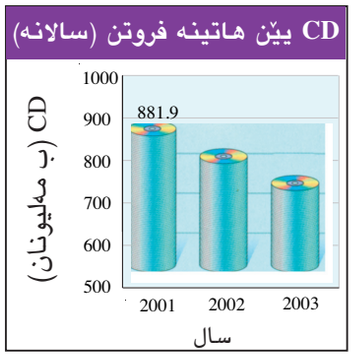
41 $0.\overline{123}$

42 $0.\overline{18}$

43 $0.\overline{5}$

44 $0.\overline{054}$

45 **میوزیك** فرۆتنا CD یێن میوزیکێ د ئەڤان سالێن دوماهیکێدا کێم بوو ژبەر زێدەبوونا دوسەیێن میوزیکێ د ئنتەرنێتێدا. دشێین ژمارەیا CD یێن هاتینە فرۆتن ل سالا 2001 بنوێنین ب هۆیێ ئێك ل دویڤ ئێکەکا ئەندازەیی.



أ ژمارەیا CD یێن دێ هێنە فرۆتن ل سالا 2010 بخەملینە.

ب ژمارەیا CD یێن هاتینە فرۆتن ژ 2001 هەتا 2010 بخەملینە.

ج وەسا دانە کو ئێك ل دویڤ ئێکا ئەندازەیی یا بەردەوام هەتا بێدوماهیکێ. دێ ژمارەیا CD یێن هاتینە فرۆتن ژ دەستپێکا سالا 2001 ێ چەند بن؟

دەرئەنجامێ بیرکاری بکاربینە بۆ سەلماندنا هەر دەستەواژەیەکێ.

46 $1+2+4+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$

47 $1+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

48 $1(2)+2(3)+3(4)+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

49 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

50 **سینەما** داهاتیێ فیلمەکێ سینەمایی د حەفتیا ئێکێدا ژ نمایشکرنا وی گەهشتە 80 ملیار دیناران، لە حەفتیێن ل دویڤدا ئەڤ داهاتیە کێمبوو ب ڕێژەیا 40% .

أ ئێك ل دویڤ ئێکەکا ئەندازەی بۆ نواندنا داهاتیێ د حەفتەیەکێدا بنڤیسە.

ب سەرجەمێ داهاتیێ فیلمی ل شەش حەفتیێن ئێکێ ژ نمایشکرنێ چەندە؟

ج هەکەر نمایشکرنا فیلمی بۆ بێدوماهیك یا بەردەوامبوو، سەرجەمێ داهاتی دێ چەند بیت.

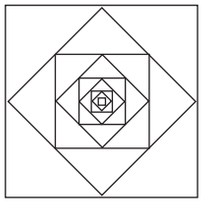
51 **قارەمانیا لەش جوانیێ** کەسەکی خەلاتێ هەری مەزن بدەستخۆڤەئینا ل قەرەمانیەکا لەش جوانیێ، دوو ڕێك دانانە بەر وی کەسی بۆ وەرگرتنا خەلاتی: کۆ ل مەها ئێکێ مەلیون دیناران وەربگریت، ل گەل هەیڤانە کو نیڤا پارەیێ ل هەیڤا پیشبیا وی وەربگریت، یان 100 000 دیناران هەیڤانە وەربگریت بدرێژاهیا 20 هەیڤان. کیژ ڕێکێ دێ هەلبژێریت؟

دژە نموونەیەکێ بۆ هەر دەستەواژەکێ بینە، دەمێ x ژمارەکا ڕاستی بیت.

52 $\frac{x^4}{x^3} \le 2x$ **53** $x^4 - 1 \ge 0$ **54** $\ln x^5 > \ln x$

55 $2x^2 \le 3x^3$ **56** $2x^2 - x \ge 0$ **57** $12x - x^2 > 25$

58 **ئەندازە** درێژیا لایێ چوارگۆشەیا مەزن 12 m ، و سەرێن هەر چوارگۆشەیەکا ژناڤدا دکەڤنە سەر ناڤەڕاستێ لایێن چارگۆشەیا بەری وێ. وەسا دانە کو کردارا دروستکرنا ئەڤان چوارگۆشەیان هەتا بێدوماهیکێ یا بەردەوامە.



أ چێوەیێ چوارگۆشەیا دووێ بهەژمێرە.

ب سەرجەمێ چێوەیێن گشت چوارگۆشەیان بهەژمێرە.

ج سەرجەمێ ڕووبەرێ هەموو چوارگۆشەیان بهەژمێرە.

د هەکەر درێژیا لایەکێ چوارگۆشەیێ s بیت سەرجەمێ چێوەیان بکارئینانا هێمایێ سەرجەمی بنڤیسە، ئەڤی کاری ل گەل سەرجەمێ ڕووبەران دووبارەبکە.

هـ کیژ هەردوو زنجیرەیان ب لەزتر کێمدبیت، سەرجەمێ چێوەیان یان سەرجەمێ ڕووبەران؟ تە چەوا ئەڤە زانی؟

59 **هزرکرنا ڕەخنەگر** بەراوردیێ ل ناڤبەرا سەرجەمێ بەشی S_n یێ زنجیرەیەکا ئەندازەیی یا بێدوماهیك و سەرجەمێ گشتی بکە دەمێ $a_1 > 0$ و $r = \frac{4}{5}$ ، کیژ وان مەزنترە. ئەرێ گۆهۆڕین دێ چێبیت هەکەر $a_1 < 0$ ؟ ئەڤێ ڕوونبکە.

60 **بنڤیسە** چ جودایی هەیە ل ناڤبەرا نڤیسینا سەرجەمێ بەشی S_n بۆ زنجیرا ئەندازەی یا بێدوماهیك و سەرجەمێ گشتی؟

ئامادەکرن بۆ ئەزموونێ

61 کیژ زنجیرەیا ئەندازەی یا بێدوماهیك لێکنێزیکبوونە؟

أ $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^k$ ب $\sum_{k=1}^{\infty} 5\left(\frac{1}{4}\right)^k$ ج $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4}(5)^k$ د $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k (5)^k$

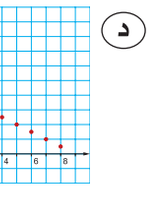
62 سەرجەمێ زنجیرەیا ئەندازەی یا بێدوماهیك چەندە؟ $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots$

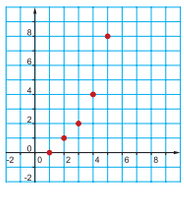
أ 2 ب $\frac{2}{3}$ ج $\frac{1}{2}$ د $\frac{1}{3}$

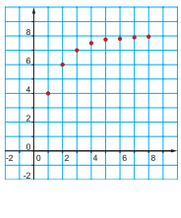
63 سەرجەمێ زنجیرەیەکا ئەندازەی یا بێدوماهیك 180 یە، و بنچینەیێ وێ $r = \frac{2}{3}$ ڕادەیێ ئێکێ چەندە؟

أ 60 ب 120 ج 270 د 540

64 کیژ ئەڤان وێنەیێن ڕوونکرنێ زنجیرەیا ئەندازەی یا بێدوماهیك یا لێکنێزیکبوون دنوێنیت؟

أ 

ب 

ج 

د

65 **بەرسڤەکا دریژ** دەرئەنجامێ بیرکاری بکاربینە بۆ سەلماندنا $3+5+...+(2n+1)=n(n+2)$ هەر چیا تو پێ ڕادبی دیاربکە.

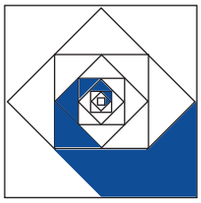
بەرهنگاری و بەرفرەهکرن

ژمارەیا دەوری وەك کەرت و بسادەترین شێوە بنڤیسە.

66 $0.1\overline{6}$ **67** $0.41\overline{6}$ **68** $0.52\overline{86}$

69 **هزرکرنا ڕەخنەگر** ئەرێ دێ چێبیت سەرجەمێ زنجیرەیەکا ژمارەیی یا بێدوماهیك نێزیك بیت بۆ دوماهییەکا دیارکری، وەکی هندەك زنجیرەیێن ئەندازەی یێن بێدوماهیك؟ بەرسڤا خۆ ڕوونبکە.

70 **ئەندازە** دریژیا لایێ چوارگۆشەیا مەزن 12 m، و سەرێن هەر چوارگۆشەکا ژناڤدا دکەڤنە سەر ناڤەڕاستێن لایێن چارگۆشەیا ئەو دکەڤتە دناڤدا. وەسادانە ئەڤ کرارە یا بەردەوامە هەتا بێدوماهیکێ. بەرێ خوبدێ کو وێنەیێ وێ هێلەکا لوولپێچی یا سپی دیاردکەت و ڕووبەرەکی لوولپێچی شین دیاردکەت.



أ سەرجەمێ زنجیرەیەکا ئەندازەی یا بێدوماهیك بکاربینە بۆ هەژمارتنا دریژیا هێلێن سپی.

ب سەرجەمێ زنجیرەیەکا ئەندازەی یا بێدوماهیك بکاربینە بۆ هەژمارتنا ڕووبەرێ دەڤەرا شین.

ج ئەرێ بەرسڤا پسیارا لقێ ب ئەوا بدەستەکەفتی یا گونجایە؟ بەرسڤا خۆ ڕوونبکە.

پێداچوونا لوولپێچی

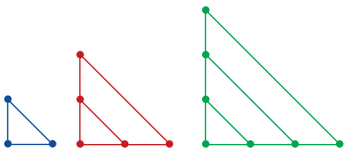
71 **تەپا پێ** گولگەرێ یانەیا پێشمەرگەیاتەیا پێ 80% ژ لێدانێن ڕاستەخۆ گۆل دکەت. ئەڤ گولکەرە پێنج لێدانێن ڕاستەوخۆ دێ لێدەت. ئەگەر چەندە کو بکێماسی 4 لێدان گۆل بن؟ (پۆلێن پێشتر)

72 **ئەندازە** شێوازێ بەرامبەر بکاربینە. (وانەیا 6–3)

أ ژمارا خالان بۆ سێ وێنەیێن ل دویڤ ڤان بهەژمێرە.

ب ڕێسایەکێ بنڤیسە بۆ هەژمارتنا ژمارا خالێن وێنەیێ (n) بیت.

ج ژمارا خالان د وێنەیێ بیست و دوویدا چەندە؟



دیاربکە ئەڤ ئێك ل دویڤ ئێکە یا ژمارەییە یان ئەندازەییە. بنچینەیێ ژمارەیی و بنچینەیێ ئەندازەیی بهەژمێرە، دەمێ ئەو دشیاندا بیت. (وانەیا 4 –6)

73 297, 99, 33, 11, ... **74** $\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, 4, \frac{16}{3}, ...$

75 25, 100, 250, 1000, ... **76** 4, 4.8, 5.76, 6.912, ...

بەشی 6

ڕێبەرێ خواندنێ: پێداچوون

پێنج ڕادەیێن ئێکێ ل هەر ئێك ل دویڤ ئێکەکێ بهەژمێرە.

1. $a_n = n - 9$
2. $a_n = \frac{1}{2}n^2$
3. $a_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$
4. $a_1 = 55$ و $a_n = a_{n-1} - 2$
5. $a_1 = 200$ و $a_n = \frac{1}{5}a_{n-1}$
6. $a_1 = -3$ و $a_n = -3a_{n-1} + 1$

ڕێسایا ڕادەیێ (n)ی ل هەر ئێك ل دویڤ ئێکەکێ بنڤیسە.

7. $-4, -8, -12, \ldots$
8. $5, 20, 80, 320, \ldots$
9. $-24, -19, -14, -9, \ldots$
10. $27, 18, 12, 8, \frac{16}{3}, \ldots$
11. **وەرزش** یاریزانەکی تەپە ژ بلندایا 3.2 m هاڤێت. تەپە ڤەژەنی پشتی ب ئەردێ کەتی و بلندبووڤە ب بلندایا 70% ژ بلندایا بەرێ وێ. ل جارا چوارێ بلندایا تەپێ دێ گەهیتە چەندێ، دەمێ ئەڤ کارە دووبارە دبیت ب ڤی شێوازی؟ بلندایا تەبێ دێ گەهیتە چەندێ ل جارا نەهێ؟

ئەڤێ زنجیرەیێ ڤەکە و سەرجەمی بهەژمێرە.

12. $\sum_{k=1}^{k=4} k^2(-1)^k$
13. $\sum_{k=1}^{k=5} (0.5k + 4)$
14. $\sum_{k=1}^{k=5} (-1)^{k+1}(2k - 1)$
15. $\sum_{k=1}^{k=4} \frac{5k}{k^2}$

سەرجەمێ زنجیرەیێ بهەژمێرە.

16. $\sum_{k=1}^{k=8} (-5)$
17. $\sum_{k=1}^{k=10} k^2$
18. $\sum_{k=1}^{k=12} k$
19. **پارەدان** سەرداری خانیەك ب قست کری، کو 1150 000 دیناران هەیڤانە بدەت. دێ چەندێ دەت پشتی بورینا دوو سالان؟ پشتی 15 سالان؟

ڕادەیێ یازدێ دەربینە د هەر ئێك ل دویڤ ئێکەکا ژمارەیدا.

20. $23, 19, 15, 11, \ldots$
21. $\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1, \frac{7}{5}, \frac{9}{5}, \ldots$
22. $-9.2, -8.4, -7.6, -6.8, \ldots$
23. $a_3 = 1.5$ و $a_4 = 5$
24. $a_6 = 47$ و $a_8 = 21$
25. $a_5 = -7$ و $a_9 = 13$

سەرجەمێ داخوازکری بهەژمێرە ل هەر زنجیرەکا ژمارەی:

26. S_{18} د زنجیرەیا $-1 - 5 - 9 - 13 - \ldots$
27. S_{12} د زنجیرەیا $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{6} - \ldots$
28. $\sum_{k=1}^{k=15} (-14 + 3k)$
29. $\sum_{k=1}^{k=15} \left(\frac{3}{2}k + 10\right)$
30. **پاشئێخستنا پارەی** لیندایێ 50 000 دینار لدەستپێکا سالێ هەبوون. بابێ وێ بریاردا کو حەفتیانە 8 000 دیناران بۆ مەزاختنێ بدەتێ. لیندایێ ژ لایێ خۆڤە بریاردا کو هەموو پارەی بۆ خۆ پاشبێخت دا ساکۆیەکی بکرێت ب بهایێ 499 000 دیناران. ئێك ل دویڤ ئێکەکا ژمارەیی بۆ نواندنا ئەڤی بارەی بنڤیسە. ئەرێ لیندا دێ شێت ئەڤی ساکوی ل دوماهیا سالێ بکرێت؟

ڕادەیێ هەشتێ ل هەر ئێك ل دویڤ ئێکەکا ئەندازەیی بهەژمێرە.

31. $40, 4, 0.4, 0.04, \ldots$
32. $\frac{1}{18}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$
33. $-16, -8, -4, -2, \ldots$
34. $-6, -12, -24, -48, \ldots$

ڕادەیێ نەهێ د هەر ئێك ل دویڤ ئێکەکا ئەندازەیی دا بهەژمێرە.

35 $a_3 = 24$ و $a_4 = 96$

36 $a_1 = \frac{2}{3}$ و $a_2 = -\frac{4}{3}$

37 $a_4 = -1$ و $a_6 = -4$

38 $a_3 = 4$ و $a_6 = 500$

ناڤەندێ ئەندازەیی بۆ هەردوو ژمارەیان دیاربکە.

39 10 و 2.5

40 8 و $\frac{1}{2}$

41 $\frac{\sqrt{3}}{96}$ و $\frac{\sqrt{3}}{6}$

42 $\frac{5}{12}$ و $\frac{125}{108}$

سەرجەمێ داخوازکری ل هەر ئێك ل دویڤ ئێکەکا ئەندازەیی بهەژمێرە.

43 S_5 ل زنجیرەیا $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots$

44 S_6 ل زنجیرەیا $-\frac{4}{5}+8-80+\ldots$

45 $\sum_{k=1}^{k=8}(4)^{k-1}$

46 $\sum_{k=1}^{k=7}-2(5)^{k-1}$

47 $\sum_{k=1}^{k=6}60\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

48 $\sum_{k=1}^{k=5}18\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

49 **کەلوپەل** بهایێ ئامیرەکێ کۆپی کرنێ دگەهیتە 9 ملیون دیناران. دێ بهایێ ئەڤێ ئامیرەی د سالا شەشێدا بیتە چەند، هەکەر تو بزانی کو بهایێ وی ل هەر سالەکێ 65% ژ بهایێ سالا بەری وێ کێم بیت.

50 **کری** کرێیا خانیەکی 650 000 دینارن د هەیڤەکێدا، و 6% سالانە زێدەدبیت.

أ کرێیا سالانە یا ڤی خانی د سالا شەشێدا دێ بیتە چەند؟

ب سەرجەمێ پارەیێ کرێدار بدەت د پێنج سالێن ئێکێدا دێ بیتە چەند؟

سەرجەمێ زنجیرەیا ئەندازەی یا بێدوماهیك چەندە؟

51 $-2\,700+900-300+\ldots$

52 $-1.2-0.12-0.012+\ldots$

53 $-49-42-36-\frac{216}{7}-\ldots$

54 $4+\frac{4}{5}+\frac{4}{25}+\frac{4}{125}+\ldots$

55 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{9}{3^k}$

56 $\sum_{k=1}^{\infty}-7\left(\frac{3}{5}\right)^k$

57 $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^k$

دەرئەنجامێ بیرکاری بکاربینە بۆ سەلماندنا هەر ئێك ژ ڤان:-

58 $2+4+8+\ldots+2^n=2^{n+1}-2$

59 $1+5+25+\ldots+5^{n-1}=\frac{5^n-1}{4}$

60 $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\ldots+\frac{1}{4n^2-1}=\frac{n}{2n+1}$

61 **بۆ خۆشیێ** کچەك سیاری هێسکێ بوو. ئەو دووریا بڕی د هاتن و چوونا ئێکێدا گەهشتە 9m .

أ زنجیرەیەکا ئەندازەی یا بێدوماهیك بۆ نواندنا ئەوی دووریێ بنڤیسە، هەکەر بزانێ دووریا ل هەر جارەکێ 85% ژ دووریا بەرێ وێ بوو.

ب بەری ڕاوەستیانا هێسکێ ئەو دووریا کچێ بڕی چەندبوو؟

بەشێ 6

ئەزموونا بەشی

پێنج ڕادەیێن ئێکێ بۆ هەر ئێك ل دویڤ ئێکەکێ بهەژمێرە.

1. $a_n = n^2 - 4$
2. $a_1 = 48$ و $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} - 8$

ڕێسایەکێ بۆ هەر ئێك ل دویڤ ئێکەکێ بنڤیسە.

3. $-4, -2, 0, 2, 4, \ldots$
4. $54, 18, 6, 2, \frac{2}{3}, \ldots$

ئێك ل دویڤ ئێکێ ڤەکە و سەرجەمێ وێ بهەژمێرە.

5. $\sum_{k=1}^{k=4} 5k^3$
6. $\sum_{k=1}^{k=7} (-1)^{k+1}(k)$

ڕادەیێ نەهێ دهەر ئێك لدویڤ ئێکەکا ژمارەیی دا بهەژمێر.

7. $-19, -13, -7, -1, \ldots$
8. $a_2 = 11.6$ ﻭ $a_5 = 5$
9. هەردوو ڕادەیێن نەدیار دڤێ ئێك ل دویڤ ئێکا ژمارەیی 65 , $\square$, $\square$, 125

سەرجەمێ داخوازکری د هەر زنجیرەیەکا ژمارەییدا بهەژمێرە.

10. S_{20} د زنجیرەیا $4 + 7 + 10 + 13 + \ldots$
11. $\sum_{k=1}^{k=12} (-9k + 8)$
12. ڕێزا ئێکێ د شانویەکێدا ژ 16 کورسیکان پێکدهێت، و ژ دەستپێکا ڕێزا دووێ دوو کورسیك زێدە دبن ژ ڕێزا بەری وێ. دێ ژمارەیا کورسیکان ل ڕێزا دوازدێ بیتە چەند؟ ژمارەیا کورسیکان دڤان دوازدە ڕێزێن ئێکێدا دێ بیتە چەند؟

ڕادەیێ دەهێ دهەر ئێك ل دویڤ ئێکەکا ئەندازەیدا بهەژمێرە.

13. $\frac{3}{256}, \frac{3}{64}, \frac{3}{16}, \frac{3}{4}, \ldots$
14. $a_4 = 2$ و $a_5 = 8$
15. ناڤەندێ ئەندازەیی بۆ هەردوو ژمارەیان 4 و 25 دیاربکە.

سەرجەمێ داخوازکری د هەر زنجیرەیەکا ئەندازەیدا بهەژمێرە.

16. S_6 د زنجیرەیا $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$
17. $\sum_{k=1}^{k=12} 250\left(-\frac{1}{5}\right)^{k-1}$
18. هەکەر هەموو سالاً تە ئێك مەلیون دینار د بەنقەکێدا دانان بۆ ماوەیا 10 سالان. و ڕێژەیا قازانجی یا سالانە 5% بیت. مەلیونا ئێکێ دێ بیتە چەند ل دوماهیا سالا دهەێ؟ هەموو پارەیێ ل دوماهیا سالا دهەێ دێ بیتە چەند؟

سەرجەمێ زنجیرەیا ئەندازەی یا بێدوماهیك بهەژمێرە، هەکەر سەرجەم هەبیت.

19. $200 - 100 + 50 - 25 + \ldots$
20. $\sum_{k=1}^{\infty} 2\left(\frac{7}{8}\right)^k$

دەرئەنجامێ بیرکاری بکاربینە بۆ سەلماندنا.

$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \ldots + \frac{2n-1}{2} = \frac{n^2}{2}$.

21. پێنگاڤا (1)یێ:
22. پێنگاڤا (2)یێ:
23. پێنگاڤا (3)یێ:

بەشێ 6

ئەزموونا کەلۆکی

1 کیژ ئەڤان دبیتە ئەف ئێك لدویڤ ئێکە 4، 6، 4، 6، 4 ، کو ب هیما بێ سەرجەمێ یا هاتیە نڤیسین؟

أ) $\sum 24$
ب) $\sum_{n=1}^{n=4}(-1)^n+5$
ج) $\sum_{n=0}^{n=5}(-1)^n+5$
د) $\sum_{n=1}^{n=5}(-1)^n+5$

2 کیژ ئەڤان دبیتە ڤەکریێ دوو ڕادەداریێ $(2x-y)^3$ ؟

أ) $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$
ب) $8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$
ج) $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
د) $8x^3+12x^2y+3xy^2+y^3$

3 $f(x)=x^3+2x^2-5x-9$ کیژ ڤان نەخشەیان دبیتە وێنەیێ نەخشەیا $f(x)$ ب وێنەدانەوە ل دۆر تەوەرێ دووێ؟

أ) $g(x)=-x^3-2x^2+5x+9$
ب) $g(x)=-x^3+2x^2+5x-9$
ج) $g(x)=2x^3+4x^2-10x-18$
د) $g(x)=x^3+2x^2-5x-5$

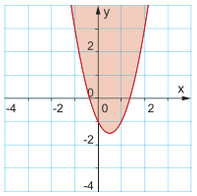
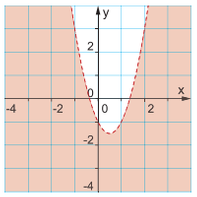
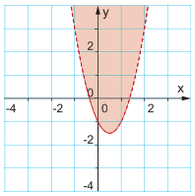
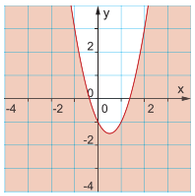
4 کیژ ئەڤان دبیتە نەخشەیا نزمبوونا توانی؟

أ) $f(x)=-5x$
ب) $f(x)=2.3(6.7)^x$
ج) $f(x)=0.49(7.9)^x$
د) $f(x)=5.13(0.32)^x$

5 تەپەك هاتە هاڤێتن ژ بلندایا 10 m ، تەپە ڤەژەنی پشتی ب ئەردێ کەتی و بلندبووڤە ب بلندایا 60% ژ بلندایا بەری وێ. کیژ ڤان بلندایا تەپێ ب میتەران ل n جاران دنوێنت؟

أ) $10(0.6n)$
ب) $10(0.6)^{n-1}$
ج) $\frac{10-n}{0.6}$
د) $10(0.6)^n$

6 کیژ وێنە دبیتە شیکارێ وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ لاسەنگەیا دووجایێ $6x+3y\geq 6x^2-3$ ؟

أ)

ب)

ج)

د)


7 فەرەسەتی سەر تراشخانەك ڤەکر. قازانجێن وی د هەر چوار حەفتیێن ئێکێدا گەهشتنە 2 000 000 دیناران، 2 400 000 دیناران، 2 880 000 دیناران، 3 456 000 دیناران لدویڤ ئێك، قازانجێ وی د حەتیا شەشێدا دێ بیتە چەند هەکەر لسەر ڤی شێوازی یێ بەرداوامبوو؟

أ) 3 856 000 دینار
ب) 4 032 000 دینار
ج) 4 147 000 دینار
د) 4 980 000 دینار

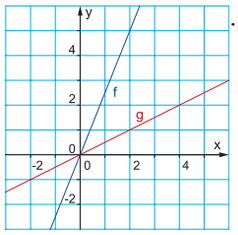
8 ڕادەیێ نەهێ دڤێ ئێك ل دویڤ ئێکێدا $a_n=\frac{1}{2}\left(2^{n-1}\right)+4$ چەندە؟

أ) 36
ب) 68
ج) 132
د) 260

9 بەرۆڤاژیا ئەڤێ نەخشەیێ $f(x)=4x-5$ کیژ وانە؟

أ) $f^{-1}(x)=-4x+5$
ب) $f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x+5$
ج) $f^{-1}(x)=\frac{x+5}{4}$
د) $f^{-1}(x)=5x-4$

10 نەخشەیا $f(x)$ ب چ جهگوهۆڕکێ دێ هێتە گوهۆڕین بۆ نەخشەیا $g(x)$.



أ تێکچوونا ئاسۆیی ب هاوکولکەیێ $\frac{1}{5}$.

ب ڕاکێشانا ئاسوویێ ب هاوکولکەیێ 5.

ج تێکچوونا ئاسووی ب هاوکولکەیێ $\frac{1}{3}$.

د ڕاکیشان ستوونی ب هاوکولکەیێ 3.

11 کیژ ئەقان دبنە هەر دوو سفرێن نەخشەیا $f(x)=2x^2+5x-12$

أ -4 و $\frac{3}{2}$

ب -2 و 3

ج $-\frac{3}{2}$ و 4

د $\frac{3}{2}$ و 2

بەرسڤەکا کورت

12 بنچینەیێ ئێك ل دویڤ ئێکا ئەندازەیی $125, 50, 20, 8, \ldots$ چەندە؟

13 پەرکەك ژ پەرکێن یاریێ هاتە ڕاکێشان. ئەگەر دێ چەند بیت کو ئەڤ پەرکە 10 بیت یان یا سۆر بیت.

14 سەرجەمێ ئەڤێ زنجیرەیا ژمارەیی $\sum_{k=1}^{k=8}(7k-3)$ چەندە؟

15 پۆتانێ دووێ یێ ئەوێ خالا دبیتە شیکار بو ڤێ سیستەمی $\begin{cases}2y-2=4x\\6-x=8y\end{cases}$ چەندە؟

16 ڤێ نەخشەیێ $f(x)=\sqrt[3]{5x}$ بکاربینە.

أ بوار چەندە؟ مەودا چەندە؟

ب نەخشەیا بەرۆڤاژیا $f(x)$ دیاربکە؟

ج بوارێ نەخشەیا بەرۆڤاژی چەندە؟

د وێنەیێ روونکرنێ بۆ نەخشەیێ و نەخشەیا بەرۆڤاژی بکێشە دئێك. ڕووتەختێ پۆتانیدا.

17 ڤێ زنجیرەیا ئەندازەی یا بێدوماهیێك $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5}{4^{n-1}}$ بکاربینە.

أ دیاربکە کا ئەڤ زنجیرەیا لێکنێزیکبوونە یان ژێکدویربوونە.

ب سەرجەمێ زنجیرەیی بهەژمێرە، هەکەر سەرجەم هەبیت.

18 مارکێتەکا مەزن پاکیتێن تەزیاتیان لسەر شێوەیێ سێگوشەیێ نمایش دکەت 3 پاکت ل ڕێزا سەری بوون و ئەڤ ژمارە ب ئێکێ زێدە دبوو هەر چەند بەرەڤ خوارێ بهێن.

أ ئەرێ دێ ئێك لدویڤ ئێك یان زنجیرە بۆ نواندنا ژمارا پاکیتان ل ڕێزا (n)ی بکارهێت؟

ب ژمارەیا پاکیتان ل ڕێزا (12) ێ چەندە؟

ج ئەڤ زنجیرەیا $\sum_{k=1}^{k=n}(k+2)$ چ دنوێنیت؟ ڕوونبکە.

بەرسڤەکا درێژ

19 کاندێدەکی وەرگرتنێ ل کولیژا ئەفسەران ب دوو تاقیکرنەیان دەربازدبن. 60% ژ کاندیدان ل تاقیکرنا ئێکێ دێ دەرباز بن و 20% ژ کاندیدان ل تاقیکرنا دووێ دێ دەرباز بن.

أ هێلکارەکی دارێ دروستبکە ئەگەرا دشیاندا بۆ هەر کاندێدەکی دیاربکەت.

ب هەکەر ماڤ بۆ کاندێدان هەبیت کو ل هەردوو تاقیکرنان بەشداربن. ئەگەر چەندە کو کاندیدەك ل هەردوو تاقیکرنان بسەرکەفتنێ دەربازببیت؟ چەند کاندید چاڤەرێنە کۆ بسەرکەڤن د هەردوو تاقیکرناندا هەکەر هەژمارا کاندێدان 50 بن.

ج کیژ مەزنترە: کو کاندێد ل هەردوو تاقیکرنان بسەرکەڤیت یان ل هەردوویان بکەڤیت؟ ئەوێ چەندێ ڕوونبکە.

بەشێ

7

سێگۆشەزانی

Trigonometry

بەشێ حەفتێ

وانە

7–1 یاسایا sine و cosine

7–2 نەخشەیێن سێگۆشەی.

لاپەڕەیێ تەکنۆلۆژیا: هاوئەنجامێن سیگۆشەی ب وێنەیێ روونکرنێ

7–3 هاوئەنجامێن سێگۆشەیی یێن بنەڕەت

ئەزموونا نیڤا بەشی

7–4 هاوئەنجامێن سەرجەم و جیاوازیێ

7–5 هاوئەنجامێن دووجاران و نیڤا گۆشەی.

گێژەکەر (دویخە)

تو دشێی وێنەیێن روونکرنێ یێن نەخشەیێن سیگۆشەی و هاوئەنجامێن سێگۆشەی بکاربینی، بۆ دروستکرنا سامپلان بۆ لڤینێن بازنەی و ڕێڤەچوونا تایران د بارێن جیاوازدا.

ئەرێ تو یێ ئامادەی؟

زاراڤ

هەر زاراڤەکی دگەل پێناسا وی ل ڕەخێ چەپێ هاتی گرێدە؟

1. Sin یێ گۆشەیێ
2. Cosin یێ گۆشەیێ
3. ژێیێ سێگۆشەیا وەستاو
4. tan یێ گۆشەیێ

أ ڕێژەیا درێژیا لایێ بەرامبەری گۆشەیێ بۆ درێژیا لایێ تەنێشتێ.

ب ڕێژەیا درێژیا لایێ تەنیشتا گۆشەیێ بۆ درێژیا ژێێ.

ج ڕێژەیا درێژیا ژێی بۆ درێژیا لایێ بەرامبەری گۆشەیێ.

د ڕێژەیا درژیا لایێ بەرامبەری گۆشەی بۆ درێژیا ژێێ سێگۆشەیێ.

هـ ئەو لایێ بەرامبەری گۆشەیا وەستاو.

دابەشکرنا کەرتان

دابەشبکە

5. $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{5}{2}}$
6. $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}$
7. $\frac{-\frac{3}{8}}{\frac{1}{8}}$
8. $\frac{\frac{2}{3}}{-\frac{7}{4}}$

سادەکردنا بڕێن ڕەگدار

هەر بڕەکی ب سادەترین شێوە بنڤیسە.

9. $\sqrt{6}\times\sqrt{2}$
10. $\sqrt{100-64}$
11. $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{36}}$
12. $\sqrt{\frac{4}{25}}$

لێکدانا ڕادەدارێن دووانی

لێکبدە

13. $(x+11)(x+7)$
14. $(y-4)(y-9)$
15. $(2x-3)(x+5)$
16. $(k+3)(3k-3)$
17. $(4z-4)(z+1)$
18. $(y+0.5)(y-1)$

هاوئەنجامێن تایبەت

لێکبدە

19. $(2x+5)^2$
20. $(3y-2)^2$
21. $(4x-6)(4x+6)$
22. $(2m+1)(2m-1)$
23. $(s+7)^2$
24. $(-p+4)(-p-4)$

بەشێ 7

ڕێبەرێ خواندنێ: لێنێرینەك بۆ بەشی

ل دەمێ بۆری

تە ئەڤە خواندبوون:

- شیکارکرنا وان پرسیارێن سێگۆشە و ڕێژەیێن سێگۆشەی بخۆڤە دگرن
- بکارئینانا شێتەلکرنێ بۆ شیکارکرنا هاوکێشە یێن دووجای
- بکارئینانا وان نخشەیێن سامپلان پێکدئینن بۆ شیکارکرنا پرسیارێن ژیانا ڕۆژانە
- شیکارکرنا هاوکێشەیان ب جەبرێ و ب وێنەیێ ڕوونکرنێ.

د ڤی بەشیدا

دێ فێری ڤان بی:

- شیکارکرنا وان پرسیارێن نەخشەیێن سێگۆشەی بخۆڤە دگرن.
- بکارئینانا نەخشەیێن سێگۆشەی بۆ دروستکرنا سامپلان، کو بارێن ژیانا ڕۆژانە بنوێنن.

د دئایندەدا

تو دشیی شارەزاییێن ڤی بەشی بکاربینی:

- ل قۆناغێن بلندتر، ل دەمێ خواندنا جیاکاری و تەواوکاری.
- د خواندنا وانەیێن بابەتێن دی دا وەك فیزیا، زێندەزانی و ئابووریێ.
- ژ دەرڤەی قوتابخانێ، بۆ خواندنا دیاردێن دووبارەدبن (الظواهر الدورية).

زاراڤ — Vocabulary

Amplitude	فرەهی
Cycle	خۆل
Frequency	دووبارەبوون – لەرلەر
Period	دەمێ دووبارەبوونێ (دەمێ خۆلێ)
Periodic functions	نەخشەیێن دووبارەبووین
Phase shift	لادانا ڕوو
Rotation matrix	ڕێزکریێ دەوردانێ (زڤڕاندنێ)

ڕۆناهیەك لسەر زاراڤان

بۆ ڕوونکرنا هندەك زاراڤێن دڤی بەشی دا هاتین، ڤان پێنگاڤان پەیرەوبکە:

1. ڕامانا پەیڤا **فرەهی** دژیانا ڕۆژانەدا چییە؟ مەبەست ژ فرەهیا بەندۆلێ دەمژمێرێ چییە؟
2. ڕامانا پەیڤا **خۆل** دژیانا ڕۆژانەدا چییە؟ نموونەیان لسەر دیاردێن دووبارە دبن بینە.
3. نموونەیەکێ لسەر کارەکی بینە دووبارەبوون تێداهەبیت. وەکو پاقژکرنا دانە ڕۆژانە. تو دشێی ڕۆژێ دووجاران دانێ خو پاقژبکەی. بەحسێ دووبارەبونێ بکە دڤێ نموونەیێ دا.
4. هندەك جاران دەستەواژەیا دەمێ **خۆلێ** د ژیانا ڕۆژانەدا بکاردئێت، ئەڤ دەربڕینە لنك تە چ دگەهینت؟ رامانا نەخشەیا دووبارەبووی چەوا تێدگەهی؟
5. دەمێ تو **ڕیزکریێ دەوردانێ** بکاردئینی، ئەو ئەنجامێن پیشبینی دکەی چنە؟

بەشی 7

بیرکاری
ب خواندن و نڤیسین

ستراتیژیا وانێ: ئامادەکرن بۆ ئەزموونا دوماهیێ.

بیرکاری بابەتەکی کەلۆکییە، لەورا چێدبیت ئەزموونا دوماهیا سالێ هەموو وی بابەتێ تو فێربوویێ ژ دەستپێکا سالێ بخوڤە بگرت. ڤێجا باشترە تو پلانەکێ ب شێوەیێ ل خوارێ دانی بۆ خۆ ئامادەکرنێ بۆ ئەزموونا دوماهیا سالێ:

دووحەفتیان بەری ئەزموونێ

- پێداچوونەکێ لسەر ئەزموونێن پێشتر و پرسیارێن ئەرکێ مال ئەنجامبدە بۆ دەستنیشانکرنا وان بابەتێن پێدڤی گرنگییێ پێ بدەی. و وان پرسیارێن نە بدروستی هاتینە شیکارکرن یان شیکارێن وان دکێمبوون سەر ژ نوو شیکار بکە.
- لیستەیەکێ دروستبکە ژ وان یاسا و سەلمێنراوێن دڤێت توبزانیێ بەری ئەزموونێ.
- ئەزموونەکێ بۆ خو ئەنجامبدە لسەر وان پرسیارێن ب شێوەیێ پرسیارێن ئەزموونێن پێشتر.

حەفتیەکێ بەری ئەزموونێ

- پرسیارێن ئەزموونا تە بخو ئەنجام دای شیکاربکە، و پشترِاستبە ژ بەرسڤێن خۆ، هەکەر شاشی د هندەك بەرسڤان دا هەبوو، راهێنانێ لسەر شیکارکرنا هندەك پرسیارێن هاوشێوەی وان بکە.
- دگەل هەڤالەکێ خۆ یێ پۆلێ، پێداچوونەکێ ئەنجام بدە لسەر وان یاسا و سەلمینراوێن تە پێشتر د لیستێدا نڤیسین.

ڕۆژا بەری ئەزموونێ

- پشترِاستبە ژ ئامادەکرنا پێدڤیێن ئەزموونێ، وەکی پێنڤیس و راستە و بژمێرێ (پشترِاستبە ژ دروستا پاترییێن بژمێرێ).

ڕۆژا ئەزموونێ

هەولبدە

خشتەیەکی خۆ ئامادەکرنێ بۆ ئەزموونا دوماهیا ساڵێ دروستبکە تێدا دەم یێ دابەشکری بیت.

1-7

یاسایا ساین Sine و یاسایا کۆساین Cosine

Law of sines and Low of cosines

ئارمانج

یاسایا ساین و یاسایا کۆساین بکاردئێن بۆ شیکارکرنا سێگۆشەیان.

کی ئەقێ بکاردئینیت؟

ئەندازیار یاسایا ساین و کۆساین بکاردئینن بۆ شیکارکرنا پرسیارێن چێکرنا ئاڤاهیان.

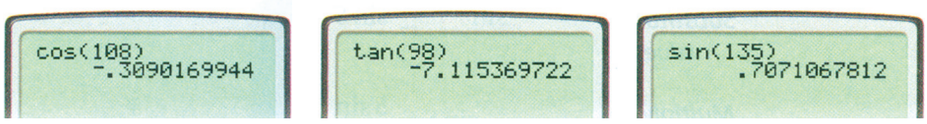
ژ دەمێ بورجێ پیزا ل سالا 1370 ز لەئیتالیا هاتیە ئاڤاکرن، ئەندازیار پێشنیاران پێشکێش دکەن بۆ کێمکرنا لاریێ وێ ئەو گۆشەیا ڤێ بورجێ ل گەل ئەردێ دروستکری نەیارا وەستاوە، وەکو شێوەیێ گشتی ل هەموو ئاڤاهیان. لەورا دڤیا ئەندازیار لسەر سێگۆشەیێن نە وەستاو کاربکەن.

ل پۆلا دەهێ تو فێری بکارئینانا ریژەیێن سێگۆشەی بوویی بۆ هەژمارتنا پیڤانێن گۆشەیێن سێگۆشەیا وەستاو، هەروەسا تو فێری هەژمارتنا دریژترین لایێن سێگۆشەیێ بوویی، دبێژنە ڤان کرداران **شیکارکرنا سێگۆشەیا وەستیاو** . د ڤێ وانەیێدا دێ فێری شیکارکرنا سێگۆشەی بی هەر لسەر چ شێوەی بیت، و بۆ ڤێ چەندێ تە پێدڤی بهەژمارتنا ریژەیێن سێگۆشەی هەیە، بۆ وان گۆشەیێن پیڤانێن وان دگەهنە 180°, تو دشێی بژمێریێ بکاربینی بۆ هەژمارتنا وان بهایان.

نموونـــــه 1 هەژمارتنا ریژەیێن سێگۆشەی بۆ گۆشەیێن ڤەکری.

بژمێرێ بکاربینە بۆ هەژمارتنا هەر ڕێژەیەکا سێگۆشەی، بەرسڤا خۆ بۆ نێزیکترین بەش ژ سەدێ نێزیکبکە.

أ $\sin 120^\circ$ **ب** $\cos 150^\circ$ **ج** $\tan 135^\circ$



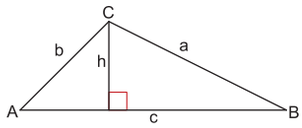
$\sin 135^\circ \approx 0.71$ $\tan 98^\circ \approx -7.12$ $\cos 108^\circ \approx -0.31$

خالا چاڤدێریێ

1. بژمێرێ بکاربینە بۆ هەژمارتنا هەر ڕێژەیەکا سێگۆشەی، بەرسڤا خۆ بۆ نێزیکترین بەش ژ سەدێ نێزیکبکە.

أ $\cos 120^\circ$ ب $\sin(-150^\circ)$ ج $\tan 120^\circ$

تو دشێی بلنداهیا سێگۆشەیێ بکاربینی بۆ دیارکرنا پەیوەندیەکێ، کو لایێن سێگۆشەیێ پێکڤە گرێدەت. بلنداهیا سێگۆشەیێ لسەر $\overline{AB}$ بکێشە کو دخالا (C) را ببوێریت، پێ وێنەیێ بەرامبەر، تو دشێی بنڤیسی:



$\sin\hat{A} = \frac{h}{b}$ $\sin\hat{B} = \frac{h}{a}$

$h = b \sin\hat{A}$ $h = a \sin\hat{B}$

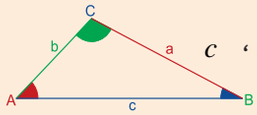
ژ ڤێ دیاردبیت $a \sin\hat{B} = b \sin\hat{A}$

ژ ڤێ دیاردبیت $\frac{\sin\hat{A}}{a} = \frac{\sin\hat{B}}{b}$

هەروەسا تو دشێی بلنداهیەکا دی بکاربینی بۆ دیارکرنا $\frac{\sin\hat{A}}{a} = \frac{\sin\hat{B}}{b} = \frac{\sin\hat{C}}{c}$.

فێربە

سەلمینراوا 1-7 یاسایا ساین Sin



هەکەر ABC هەر جۆرەکی سێگۆشەیێ بیت، و د ڕێژەیا لایێن وێ a ، b ، c بن، دێ $\frac{\sin\hat{A}}{a}=\frac{\sin\hat{B}}{b}=\frac{\sin\hat{C}}{c}$

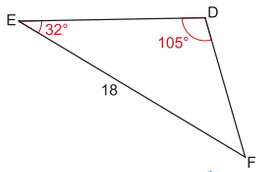
تو دشێی یاسایا Sin بۆ شیکارکرنا سێگۆشەیێ بکاربینی، هەکەر:-

- پیڤانێن دووگۆشەیان و درێژیا لایەکێ وێ بزانی.
- درێژییێن دوولایێن وێ و پیڤانا گۆشەیەکا نە دناڤبەرا واندا بزانی.

نموونـــــە 2 بکارئینانا یاسایا Sin

پیڤانا داخوازکری بهەژمێرە، درێژیێ بۆ نێزیکترین دەهئیک نێزیکبکە، و پیڤانا گۆشەیێ بۆ نێزیکترین پلە نێزیکبکە.

أ ***DF***



یاسایا Sin

$\frac{\sin\hat{D}}{EF}=\frac{\sin\hat{E}}{DF}$

ل جهـ دانێ بکاربینە

$\frac{\sin 105^\circ}{18}=\frac{\sin 32^\circ}{DF}$

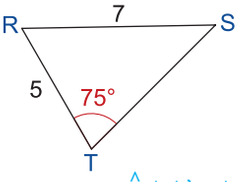
خاسیەتا لێکدانا تیرەیی

$DF\times\sin 105^\circ=18\times\sin 32^\circ$

هەردوو لایان لسەر sin105 دابەشبکە

$DF=\frac{18\times\sin 32^\circ}{\sin 105^\circ}\approx 9.9$

ب $m\hat{S}$



یاسایا Sin

$\frac{\sin\hat{T}}{RS}=\frac{\sin\hat{S}}{RT}$

ل جهـ دانێ بکاربینە

$\frac{\sin 75^\circ}{7}=\frac{\sin\hat{S}}{5}$

هەردوولایان ل (5) ێ بدە

$\sin\hat{S}=\frac{5\times\sin 75^\circ}{7}$

دوگمێ $\sin^{-1}$ کلیکبکە بۆ هەژمارتنا پیڤانا $\hat{S}$

$m\hat{S}=\sin^{-1}\left(\frac{5\times\sin 75^\circ}{7}\right)\simeq 44^\circ$

بژمێرا ڕوونکرنێ بۆ هەژمارتنا پیڤانا $\hat{S}$ بکاربینە، پشتی گوهۆڕینا بژمێرێ دا لسەر شێوەیێ شیستی (پلە) کار بکەت لجهـ گۆشەیا نیڤتیرەی (بازنەی) دوگما MODE کلیکبکە، پاشی بێخە سەر Degree پاشی دوگما ENTER کلیکبکە. بۆ هەژمارتنا $m\hat{S}$ ڤان دوگمان ئێك ل دووف ئێکێ کلیکبکە 2^{nd} ، SIN ، 5 ، x ، SIN ، 5 ، 7 ، (، ÷ ، 7 ،) Enter).

تێبینی

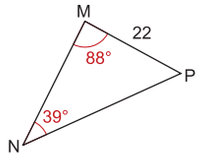
هەکەر تە بژمێر نەبیت

sin 105° ≈ 0.96
sin 32° ≈ 0.53
sin 44° ≈ 0.69

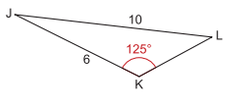
خالا چاڤدێریێ

2. پیڤانا داخوازکری بهەژمێرە، هەر درێژیەکێ بۆ نێزیکترین دەهئیک نێزیکبکە، و پیڤانا هەرگۆشەکێ بۆ نێزیکترین پلە نێزیکبکە.

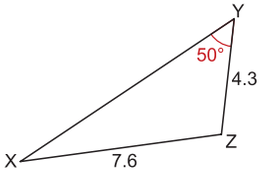
أ NP



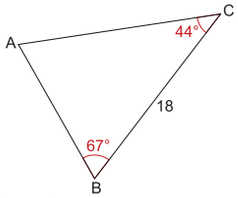
ب $m\hat{L}$



ج $m\hat{X}$



د AC



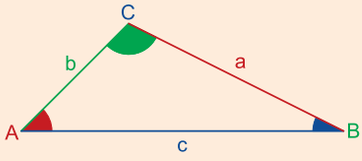
تێبینی

هەکەر تە بژمێر نەبیت

sin 88° ≈ 0.99
sin 39° ≈ 0.63
sin 127° ≈ 0.8
sin 125° ≈ 0.82
sin 50° ≈ 0.76
sin 67° ≈ 0.92

پێ یاسایا Sin هەموو سێگۆشە ناهێنە شیکارکرن. بۆ نموونە هەکەر دوولا و پیڤانا گۆشا لناڤبەراوان بزانی، یان هەکەر درێژیا هەموو لایان بزانی، دڤان باران دا دڤێت یاسایا Cos (کۆساین) بهێتە بکارئینان.

سەلمێنراوا 1-7 یاسایا کۆساین cosine



هەکەر ABC هەر جۆرەکێ سێگۆشەیێ بیت، و درێژیا لایێن وێ a ، b ، c بن دێ

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\hat{B}$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C}$$

تو دشێی یاسایا Cosine بۆ شیکارکرنا سێگۆشێ بکاربینی، هەکەر:-

- درێژیا دوو لایان و گۆشا دناڤبەرا وان دا بزانی.
- درێژیا هەرسێ لایان بزانی.

فێربە و بڕێبکە

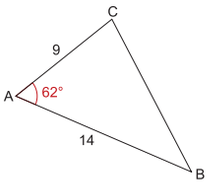
هاریکاری

ل یاسایا Cos ، گۆشەیا بکارهاتی دهەموو یەکسانبوونادا دبیتە ئەو گۆشەیا بەرامبەری لایێ درەخێ ئێکێ دا بکارهاتی.

نموونـــــە 3 بکارئینانا یاسایا Cosine

پێڤانا داخوازکری بهەژمێرە. هەردرێژەیەکێ بۆ نێزیکترین دەهئێك نێزیکبکە، و پێڤانا هەرگۆشەکێ بۆ نێزیکترین پلە نێزیکبکە.

أ BC



یاسایا Cos $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2(AB)(AC)\cos\hat{A}$

ل جهـ دانان $=14^2 + 9^2 - 2(14)(9)\cos 62°$

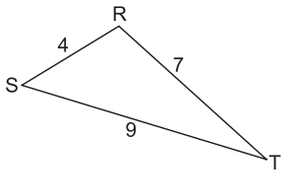
سادەبکە $BC^2 \approx 158.6932$

$BC \approx 12.6$

رەگی دووجای وەربگرە

درێژیا $\overline{BC} \approx 12.6$ بنێزیکی

ب $m\hat{R}$



یاسایا Cos $ST^2 = RS^2 + RT^2 - 2(RS)(RT)\cos\hat{R}$

ل جهـ دانان $9^2 = 4^2 + 7^2 - 2(4)(7)\cos\hat{R}$

سادەبکە $81 = 65 - 56\cos\hat{R}$

$16 = -56\cos\hat{R}$

شیکاربکە $\cos\hat{R} = -\frac{16}{56}$

$m\hat{R} = \cos^{-1}\left(-\frac{16}{56}\right) \approx 107°$

پێڤانا $\hat{R}$ دبیتە $107°$ بنێزیکی.

تێبینی

هەکەر تە بژمێر نەبیت

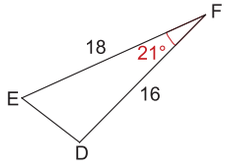
$\cos 62° \approx 0.47$

$\cos 107° \approx 0.29$

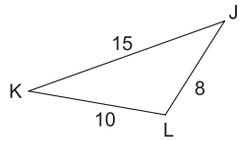
خالا چاقدێریێ

3. پێڤانا داخوازکری بهەژمێرە، هەر درێژەیەکێ بۆ نێزیکترین دەهئێك نێزیکبکە، هەر پێڤانەکێ بۆ نێزیکترین پلە نێزیکبکە.

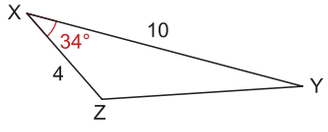
أ DE



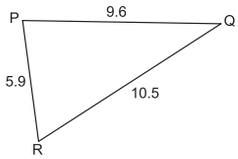
ب $m\hat{K}$



ج YZ



د $m\hat{R}$



تێبینی

هەکەر تە بژمێر نەبیت

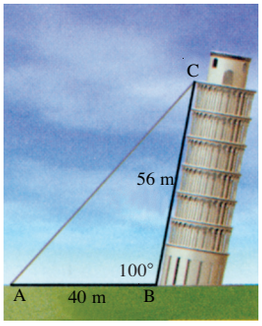
$\cos 21° \approx 0.93$

$\cos 29° \approx 0.87$

$\cos 34° \approx 0.83$

$\cos 64° \approx 0.43$

نموونـــــه 4 بجهئینان لسەر ئەندازەیا شارەوانیێ



بلنداهیا بورجێ بیزا ل ئیتالیا **56*m***، ل ساڵا 1999 ز گۆشەیا قێ بورجێ گەهشتە **100°**، دا بورج نەکەڤیت، ئەندازیارەکی پێشنیارکر سەرێ بورجێ ب تێلەکا کانزای ل گەل خالەکێ لسەر ئەردی گرێدەت، کو ب **40*m*** ژ بنکێ وێ یا دووربیت.دریژیا تێلێ و پیڤانا گۆشا ل گەل رووتەختێ ئەردی دروست دبیت چەندە؟ دریژیێ بۆ نێزیکترین دەهئیك ژ مەتری و پیڤانا گۆشەی بۆ نێزیکترین پلە نێزیکبکە.

ئاگەهداری!

بەرسڤان نێزیك نەکە هەتا نەگەهیە ئەنجامێ دوماهیێ. هەکەر پرسیار ژ چەند پێنگاڤان پێکهاتبیت، بەرسڤێن سەرەتای د هزرا بژمێرەدا بپارێزە.

پێنگاڤا (1)ێ: دریژیا تێلێ بهەژمێرە.

یاسایا Cos
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2(AB)(BC)\cos\hat{B}$$
لجهـ دانانی
$$= 40^2 + 56^2 - 2(40)(56)\cos 100°$$
سادەبکە
$$AC^2 = 5513.9438$$
رەگێ دووجای وەربگرە
$$AC = 74.3$$

پێنگاڤا (2)ێ: پیڤانا ئەوێ گۆشا تێلێ ل گەل رووێ ئەردی دروستکری بهەژمێرە.

یاسایا Sin
$$\frac{\sin\hat{A}}{BC} = \frac{\sin\hat{B}}{AC}$$
لجهـ دانانی
$$\frac{\sin\hat{A}}{56} = \frac{\sin 100°}{74.2559}$$
سادەبکە
$$\sin\hat{A} = \frac{56\times\sin 100}{74.2559}$$
بژمێرێ بکاربینە بۆ هەژمارتنا $m\hat{A}$
$$m\hat{A} = \sin^{-1}\left(\frac{56\times\sin 100°}{74.2559}\right) \approx 48°$$

گۆشەیا تێلێ ل گەل رووێ ئەردێ دروستکری دبیتە°48 بنێزیکی.

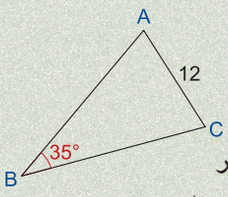
تێبینی

هەکەر تە بژمێر نەبیت
$\cos 100° \approx -0.1736$
$\sin 100° \approx 0.9848$

خالا چاڤدێریێ

4. دێ چ بیت هەکەر ... ؟ ئەندازیارەکی دی پێشنیارکر، سەرێ بورجی ب تێلەکێ ل گەل خالەکێ لسەر ئەردی گرێدەت، کو ب 31m یا دووربیت ژ بنکێ بورجی، دریژیا قێ تێلێ دێ چەندبیت، پیڤانا گۆشەیا ئەڤ تێلە ل گەل ئەردی دروست دکەت دێ چەندبیت؟ دریژیا تێلێ بۆ نێزیکترین دەهئیك ژ مەترێ و پیڤانا گۆشەیێ بۆ نێزیکترین پلە نێزیکبکە.

هزربکە و گەنگەشێ بکە



1. بۆ هەژمارتنا BC ب یاسایا Sin ، ئەرێ تە پێدڤی ب زانیارییێن زێدەتر هەیە؟ هەکەر بەرسڤا تە بەلێ بوو، ئەو چنە؟
2. رێکخەربە، خشتەیێ ل خوارێ دووبارە بنقیسە و تەمام بکە، بۆ شیکارکرنا هەر سێگۆشەیەکێ کیژ یاسا بکاردهێت، دیاربکە، پاشی نموونەیەکێ ب وێنەی بنقیسە.

فێربە و جەربکە

پێدایێن سیگۆشێ	یاسا	نموونە
پیڤانێن دوو گۆشەیان و دریژیا لایەکی		
دریژیا دوولایان و پیڤانا گۆشەیەکی دناڤبەرا وان دا نەبیت.		
دریژیێن دوولایان و پیڤانا گۆشەیەکی دناڤبەرا وان دا بیت.		
دریژیا هەرسێ لایان		

1-7 ڕاهێنان

ڕاهێنانێن ئاراستەکری

بەرێ خۆ بدە نموونە 1

بژمێرێ بکاربینە بۆ هەژمارتنا هەر ڕێژەیەکا سێگۆشەیی، بەرسڤا خۆ بۆ نێزیکترین بەش ژ سەدێ نێزیکبکە.

1 $\sin 100°$ 2 $\sin 167°$ 3 $\tan 92°$

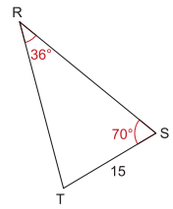
4 $\tan 141°$ 5 $\cos 133°$ 6 $\sin 150°$

7 $\sin 147°$ 8 $\tan 164°$ 9 $\cos 156°$

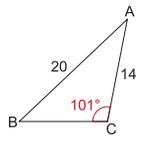
بەرێ خۆ بدە نموونە 2

پێڤانا داخوازکری بهەژمێرە، دریژیێ بۆ نێزیکترین دەهئیك، و پێڤانا گۆشەیێ بۆ نێزیکترین پلە نێزیکبکە.

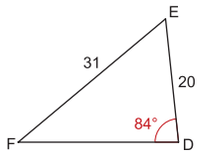
10 RT



11 $m\hat{B}$



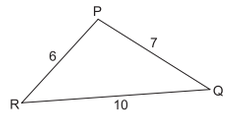
12 $m\hat{F}$



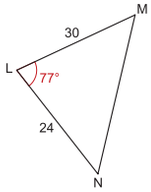
بەرێ خۆ بدە نموونە 3

پێڤانا داخوازکری بهەژمێرە، دریژیێ بۆ نێزیکترین دەهئیك و پێڤانا گۆشەیێ بۆ نێزیکترین پلە نێزیکبکە.

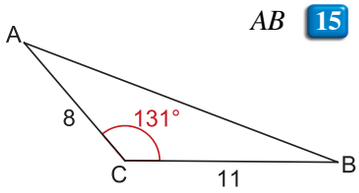
13 $m\hat{Q}$



14 MN



15 AB



بەرێ خۆ بدە نموونە 4

16 **دارتراش:** دارتراشەکی چوار چێوەیەك ژ 3 پارچەیێن داری دروستکر، دریژییێن وان $20cm$ و $24cm$ و $30cm$ بوون پێڤانا هەرگۆشەیەکا سێگۆشێ چەندە؟ پەیڤا خو بۆ نێزیکترین پلە نێزیکبکە.

ڕاهێنان و شیکارکرنا پرسیاران

بکارئینانا بژمێرێ ئەڤێن ل خوارێ بهەژمێرە و بۆ نێزیکترین بەش ژ سەدی نێزیکبکە:

17 $\cos 180°$ 18 $\tan(-150°)$ 19 $\tan 150°$

20 $\sin 150°$ 21 $\sin(-120°)$ 22 $\cos 90°$

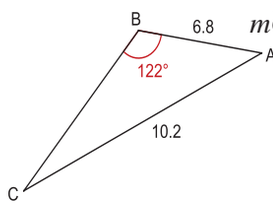
23 $\tan 270°$ 24 $\cos(-135°)$ 25 $\sin 90°$

ڕاهێنانێن ئازاد

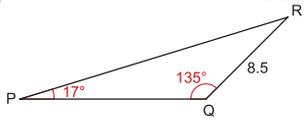
بۆ شیکارکرنا پرسیاران	بەرێ خۆ بدە نموونە
25–17	1
31–26	2
37–32	3
38	4

پێڤانا داخوازکری بهەژمێرە، دریژیێ بۆ نێزیکترین دەهئیك و پێڤانا گۆشەیێ بۆ نێزیکترین پلە نێزیکبکە.

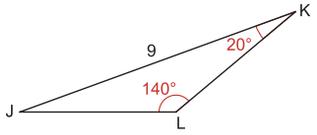
26 $m\hat{C}$



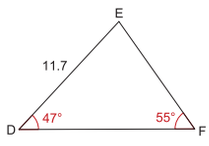
27 PR



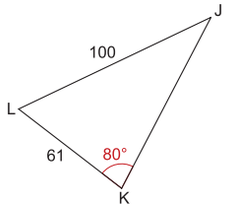
28 JL



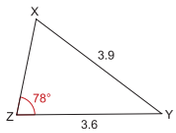
29 EF



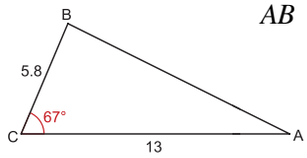
30 $m\hat{J}$



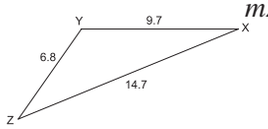
31 $m\hat{X}$



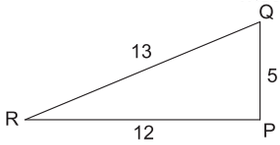
32 AB



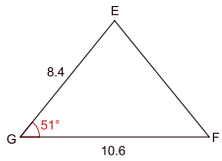
33 $m\hat{Z}$



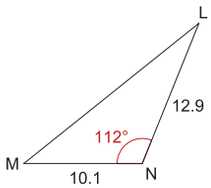
34 $m\hat{R}$



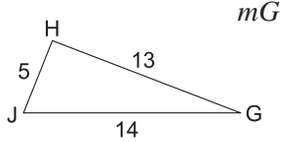
35 EF



36 LM



37 $m\hat{G}$

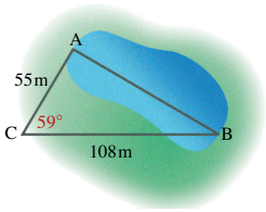


ده‌روازده‌یه‌ك

لسه‌ر سسته‌مێ چاڤدێرێ

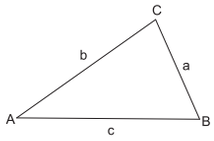
زۆربه‌ی كرداریّن چاڤدێریێ ب هۆیێ سیسته‌مێ جیهانی GPS دئێته ئه‌نجام دان. ئه‌ڤ سیسته‌مه چه‌ند هه‌یڤێن ده‌ستگرد بكاردئینن بۆ دیاركرنا جهان

38 **چاڤدێری:** دا چاڤدێرەك درێژیا دەریاچەیەكێ بزانت، ئەوی 3 خال A و B و C دیاركرن وەك ل وێنەیێ بەرامبەر درێژیا $\overline{AB}$ بهەژمێرە و نێزیكبكە بۆ نێزیكترین دەهئێك ژ مەتری، پیڤانا $\hat{B}$ چەندە؟ نیزیكبكە بۆ نێزیكترین پلە.



بۆ شیكاركرنا پرسیارێن 39-42 سێگۆشەیا بەرامبەر بكاربینە. درێژیان بۆ نیزیكترین دەهئێك و گۆشەیان بۆ نێزیكترین پلە نێزیكبكە.

39 $a \cdot b = 3.2$ cm ، $m\hat{B} = 22°$ ، $m\hat{A} = 74°$ بدۆزەوە



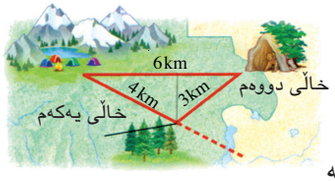
40 $c.b = 7.1$ m، $a = 9.5$m ، $m\hat{C} = 100°$ بدۆزەوە

41 $m\hat{B}$. $c = 4$m ، $b = 3.1$m ، $a = 2.2$m بدۆزەوە.

42 $m\hat{C} \cdot m\hat{A} = 45°$ ، $c = 8.4$cm ، $a = 10.3$cm بدۆزەوە.

43 **هزركرنا ڕەخنەگر:** وەسا دانە، كو تو پیڤانێن هەرسێ گۆشەیێن سێگۆشەیێ دزانی، و تە دڤێت درێژیا هەرسێ لایێن وێ بهەژمێری. ئەرێ تو دشێی یاسایا Sin یان Cos بكاربینی بۆ هەژمارتنا لایان.

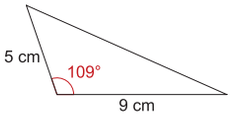
44 **دێ چ بیت هەكەر ...؟** ئەگەر گۆشەیا وەستاوبیت، دێ گوهۆڕین لسەر یاسایا Cos هێنە ئەنجام دان؟



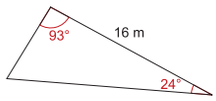
45 **پێشبركی:** وێنەیێ بەرامبەر نەخشەیێ بەریكانەكا غاردانێ دیار دكەت. دڤێت بەریكانكەرەك چەند پلەیان خو بزڤرت پشتی بگەهیتە خالا چاڤدێریا ئێكێ دا بەرێ خۆ بدەتە خالا دووێ؟ بەرسڤا خۆ بۆ نێزیكترین پلە نێزیكبكە.

پێنگاڤێن جۆراوجۆر: چێوەیێ هەر سێگۆشەیەكێ بهەژمێرە. بەرسڤا خو بۆ نێزیكترین دەهئێك نێزیكبكە:

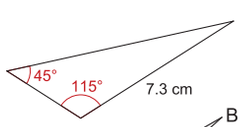
46



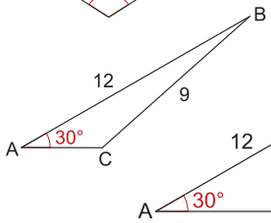
47

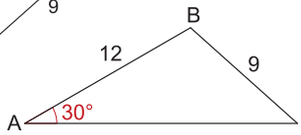


48



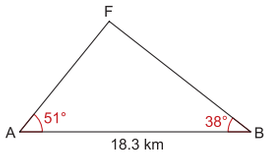
49 ل ڤێرێ بارەكی تێكچوویی هەیە ژ بارێن بجهئینانا یاسایا Sin. ئەڤە ئەو بارەیە كو دسێگۆشەیەكێ دا پیڤانا گۆشەیەكی و درێژیا لایێ بەرامبەری وێ و درێژیا لایەكی دی بزانی، لێ درێژیا لایێ بەرامبەر كێمتر بوو ژ درێژیا لایێ دی. دووحالەت هەنە بۆ ڤی جۆرێ سێگۆشەیان.





دوو بەهایێن گونجای بۆ $m\hat{C}$ بهەژمێرە، و بەرسڤێ بۆ نێزیكترین پلە نێزیكبكە. (هاریكاری: دەمێ تو بژمێرا روونكرنێ بكاربینی بۆ هەژمارتنا پیڤانا گۆشەكێ sin یا وێ یا زانراوبیت. ئەڤێ گۆشەیا تیژ و گۆشەیا پركەراوێ بەرچاڤ وەربگرە).

50 دوو تیمێن بەرەڤانیا باژێرڤانیێ د هەردووخالێن A ، B دابوون، ئاگەهداریەك بۆ وان هات کو ئاگرەك ل خالا F هەلبوو.



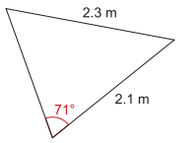
أ $m\widehat{CBD}$ بهەژمێرە.

ب دووریێ ل ناڤبەرا هەرتیمەکێ و جهێ ئاگری بهەژمێرە بەرسڤا خو بۆ نێزیکترین کیلومەتر نێزیکبکە.

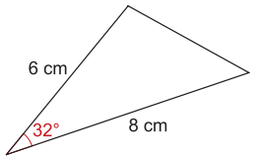
ج هێلیکۆپتەرەکا ئاگرڤەمراندنێ ب لەزا $150\,km/h$ دفڕت. ئەو دەمە چەندە کو تیمە قازانج دکەت هەکەر ژ خالا A بفڕیت ل جهێ خالا B .

دیاربکە ئەرێ تو دشێی یاسایا Sin یان یاسایا Cos وەك پێنگاڤا ئێکێ بۆ شیکارکرنا هەر سێگۆشەکێ بکاربینی.

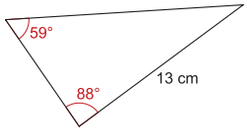
51



52



53



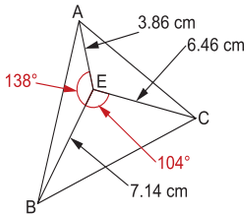
54 پۆتانێن سەرێن سێگۆشەیا ABC ئەڤەنە $A(0,3)$ ، $B(3,1)$ ، $C(-3,-1)$.

أ AB ، BC ، CA بهەژمێرە.

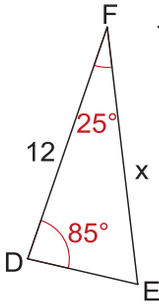
ب کیژ گۆشە ژ گۆشەیێن سیگۆشێ مەزنترین پیڤان هەیە؟

ج پیڤانا وێ گۆشێ بهەژمێرە.

55 **هۆنەر:** کلاری شێوازەك پێکئینا بۆ رەنگکرنا شووشەی وەك وێنەیێ بەرامبەر. BC و AB بهەژمێرە، پاشی $m\widehat{ABC}$ بهەژمێرە، دریژیان بۆ نێزیکترین بەش ژ سەدی و پیڤانێن گۆشەیان بۆ نێزیکترین پلە نێزیکبکە.



56 **شاشی د شیکارکرنێ دا** داخوازی ژ قوتابیان هاتەکرن، دریژیا x د سێگۆشەیا بەرامبەردا بهەژمێرن. کیژ ڤان هەردوو شیکاران نەیا دروستە؟ ئەوێ شاشیێ ڕوونبکە.



پێ یاسایا sin

$$\frac{\sin 85}{x}=\frac{\sin 25}{12}$$

$$x\sin 25 = 12\sin 85$$

$$x=\frac{12\times\sin 85^{o}}{\sin 25^{o}}\approx 28.3$$

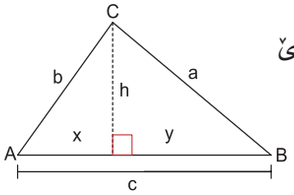
پێ یاسایا sin

$$\frac{\sin 85}{x}=\frac{\sin 70}{12}$$

$$x\sin 70 = 12\sin 85$$

$$x=\frac{12\times\sin 85^{o}}{\sin 70^{o}}\approx 12.7$$

57 سەلماندنا یاسایا Cos د سێگۆشەیا تیژدا.



پێدایی: ABC سێگۆشەیەکە هەموو گۆشەیێن وێ دتیژن و دریژیا لایێن وێ a ، b ، c

داخوازی : $a^2=b^2+c^2-2bc\ x\ \cos\hat{A}$

سەلماندن: ژ خالا C ستوونەکێ بۆ سەر $\overline{AB}$ بکێشە. و سێگۆشە دێ بیتە دوو سێگۆشەیێن وەستاو **1** و **2** . هێمایێ h بۆ بلنداهیێ دانە، و دریژیا لایێ $\overline{AB}$ دکەتە دوو بەش، x و y. پێ سەلمینراوا ڤیساگۆرس

د سێگۆشەیا (1) دا $a^2=h^2+y^2$ ... (1)

د سێگۆشەیا (2) دا $b^2=h^2+x^2$ ... (2)

ل جهێ y ل هاوکێشا (1): ($c-x$) دانە

$a^2=h^2+(c-x)^2$ ... (3)

$a^2=(h^2+x^2)+c^2-2cx$

ل جهێ h^2+x^2 دانە b^2

$a^2=b^2+c^2-2cx$ ... (4)

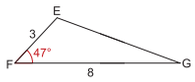
د سێگۆشەیا 2 دا: $\cos\hat{A}=\frac{x}{b}$

$x=b\cos\hat{A}$

ل هاوکێشا 4 ل جهێ y دانە bcosA

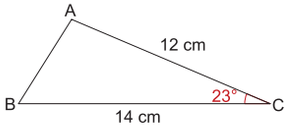
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$

58 **بنڤیسە:** ئەرێ تو دشێی یاسایا Sin بکاربینی بۆ شیکارکرنا سێگۆشەیا بەرامبەر؟ بەرسڤا خۆ ب بەلگەیان ڕوونبکە



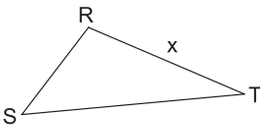
ئامادەکرن بۆ ئەزموونێ

59 کێژ ڤانێن ل خوارێ نێزیکترین بهایە بۆ درێژیا $\overline{AB}$ ؟



أ) 5.5cm ب) 14.4cm ج) 7.5cm د) 22.2cm

60 کێژ کۆمەلا زانیاریان وەسا دکەت کو هەژمارتنا بەهایێ x بکارئینانا یاسایا sin ئەنجام بدەت؟



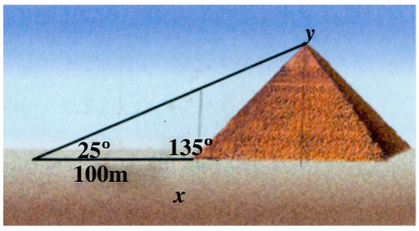
أ) $ST=15.3$ ، $RS=8.1$ ، $m\hat{T}=38^\circ$

ب) $ST=9$ ، $m\hat{S}=40^\circ$ ، $RS=4$

ج) $ST=7$ ، $m\hat{S}=34^\circ$ ، $m\hat{R}=92^\circ$

د) $m\hat{T}=31^\circ$ ، $m\hat{S}=44^\circ$ ، $m\hat{R}=105^\circ$

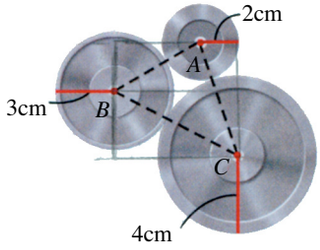
61 ئەندازیارەکی دیت، ڕوویێ هەرەمەکێ گۆشەیەك ل گەل ڕوویێ ئەردی دروستکر، پێڤانا وێ 135° بوو، هەروەسا دیت، پێڤانا بەرزەگۆشەیا سەری هەرەمێ ژ خالەکێ 100m ب مەتران یا دوور ژ بنکێ وێ دبیتە 25°، درێژیا لایێ $\overline{xy}$ چەندە؟



أ) 48m ب) 81m ج) 124m د) 160m

بەرهنگاری و بەرفرەهکرن

62 **پێنگاڤێن جۆراوجۆر:** 3 پەپك پێکڤە هاتبوونە دانان، وەکو دیار ل وێنەیێ بەرامبەر، نیڤتیرێ وان 2cm ، 3cm ، 4cm بوو $\overset{\frown}{mACB}$ د سێگۆشەیا ABC دا بهەژمێرە. بەرسڤا خۆ بۆ نێزیکترین پلە نێزیکبکە.



63 ڕاستەهێلی ℓ د هەردوو خالێن $(-1,1)$ ، $(1,3)$ ڕا دبۆرێت، ڕاستەهێلێ m د هەردووخالێن $(-1,1)$ و$(3,2)$ ڕا دبۆریت. پێڤانا وێ گۆشەیا تیژ ئەوا هەردوو ڕاستەهێل دروستدکەن بهەژمێرە، بەرسڤا خۆ بۆ نێزیکترین پلە نێزیکبکە.

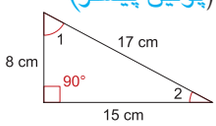
64 **دەریاڤانی:** بەندەرێ B ب دووریا 5km دکەڤیتە باشووری بەندەرێ A، گەشتەك ژ بەندەرێ A دەرکەفت ب ئاراستەیێ باکوور $-32^\circ-$ ڕۆژهەلات لەزا وێ 6km/h بوو. ئەڤ گەشتە ب چەندێ یا دووربوو ژ بەندەرێ B پشتی بۆرینا 45 خولەکان. بەرسڤا خۆ بۆ نێزیکترین دەهئێك ژ کیلومەترێ نێزیکبکە.

پێداچوونا لوولپێچی

ل هەر شێوازەکی، ئەوێ ژمارا پلا وێ n بیت بنڤیسە. (پۆلێن پێشتر)

65 $3,6,9,12,15,\ldots$ **66** $3,5,7,9,11,\ldots$ **67** $4,6,8,10,12,\ldots$

ل هەر حالەتەکی، ڕێژەیێن سێگۆشەیی بکاربینە بۆ دیارکرنا پێڤانا گۆشەیا تیژ $\hat{A}$. (پۆلێن پێشتر)



68 $\cos\hat{A}=\frac{15}{17}$ **69** $\sin\hat{A}=\frac{15}{17}$ **70** $\tan\hat{A}=1.875$

ل هەر پرسیارەکێ، بژمێرا ڕوونکرنێ بکاربینە بۆ هەژمارتنا پێڤانا گۆشەیا تیژ A، بەرسڤا خۆ بۆ نێزیکترین بەش ژ هەزاری نێزیکبکە.

71 $\sin\hat{A}=0.89$ **72** $\cos\hat{A}=0.89$ **73** $\tan\hat{A}=2.05$

2-7 نەخشەیێن سێگۆشەی

Trigonometric Functions

ئارمانج:

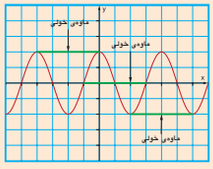
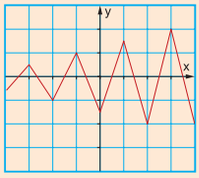
جوداکرنا نەخشەیێن دووبارەبووی، جوداکرنا نەخشەیێن سێگۆشەی و وێنەکرنا چەماوەیێ وان.

بۆچی ئەم فێری قێ دبین؟

ئەم دشێین دیاردێن دووبارەدبن بکارئینانا نەخشەیێن سێگۆشەی بنوێنین. وەکو پێلێن دەنگی [شەپۆلێن دەنگی] (نموونە 3).

نەخشەیا سێگۆشەی: Trigonometric function نەخشەیەکە ڕێسایا وێ بڕەکێ سێگۆشەییە. نەخشەیێن سێگۆشەی یێن بنەڕەت ئەڤەنە: **نەخشەیا ساین Sine function** $f(x)=\sin x$ و **نەخشەیا کۆساین** Cosine Function $f(x)=\cos x$ و **نەخشەیا تان Tangent function** $f(x)=\tan x$ دەمێ x پێڤانا گۆشێ بیت ب گۆشەیێن نیڤتیرەی (ڕادیان). radian نەخشەیێن سێگۆشەی ئەڤ سیفەتە هەنە کو بەهایێن وان بشێوەیەکی دەوری دووبارەدبن. نەخشەیا ساین Sine پاسەدانا $\sin(x+2\pi)=\sin x$ دکەت، ئەڤە وێ چەندێ دگەهینیت، کو ئەڤ نەخشە هەمان بەهایان وەردگریت دەمێ x د ماوەیێن $[0,2\pi]$، $[2\pi,4\pi]$ دا بیت. ئەم دشێین ئەڤێ ب ڤی شێوەی دەربڕین، نەخشەیا Sinx نەخشەیەکا دووبارەبوویە، و دەمێ خولا وێ (دەوراوێ) دبیتە 2π .

نەخشەیا دووبارەبووی Periodic function ئەو نەخشەیە بەهایێن وێ دماوەیێن ڕێك دا دووبارەدبن، و دبێژنە وان ماوەیێن ڕێك **خول Cycles** . هەموو وان خولان ئێك درێژی هەنە دبێژنێ **دەمێ خولێ Period** . بەرێ خو بدە ڤان وێنەیێن ڕوونکرنێ، ئێك ژ وان یی دووبارەبوویە و یێ دی نەی دووبارەبوویە. چێدبیت خول ژ هەرخالەکا وێنەیێ ڕوونکرنێ دەستپێبکەت

نەخشەیا دووبارەبوویە	نەخشە نەیا دووبارەبوویە
	

زاراڤ
Vocabulary

نەخشەیا دووبارەبووی (الدالة الدورية)
Periodic function

نەخشەیا سێگۆشەی
Trigonometric function

خول
Cycle

دەمێ دووبارەبوونێ (الزمن الدوري)
Period

فرەهی
Amplitude

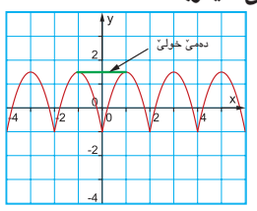
لەرلەر
Frequency

لادانا ڕوویی [انحراف الطور]
Phase shift

نموونـــــە 1 دیارکرنا نەخشەیێن دووبارەبووی

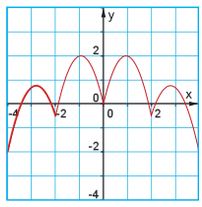
دیاربکە ئەرێ نەخشەیا دووبارەبوویە یان نە، هەکەر نەخشەیا دووبارەبووی بوو دەمێ خولێ دیاربکە.

أ



شێواز ب شێوەکێ ڕێك و پێك دووبارە دبیت، و دیاردکەت کو نەخشە یا دووبارەبوویە و دەمێ خولێ (2) یە

ب

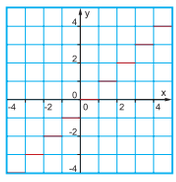


شێوازەك نینە ب شێوەیەکێ ڕێك و پێك دووبارەبیت، هەر چەندە وێنەیی هندەك هاوچی بوون هەنە. نەخشە نەیا دووبارەبوویە

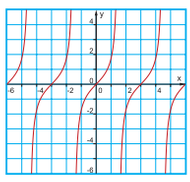
خالا چاڤدێریێ

1. **دیاربکە ئەرێ نەخشەیا دووبارەبوویە یان نە؟ هەکەر یا دووبارەبووی بوو، دەمێ خولێ دیاربکە.**

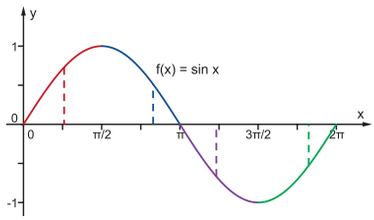
أ



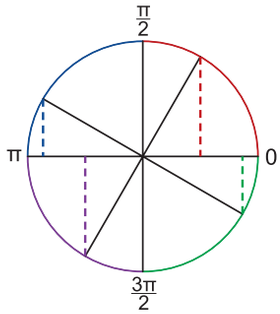
ب



نەخشەیێن سێگۆشەیێن بنەڕەت د دووبارەبوویینە: تو دشێی چەماوەیێ نەخشەیا $f(x)=\sin x$ د ڕووتەختێ پۆتانێدا بکێشی بکارئینانا پۆتانێ دووێ (y) بۆ وان خالێن دکەڤنە سەر بازنایەکێ، دەمێ x گۆشەیا θ دبارێ پیوانەی دا بنوێنت.

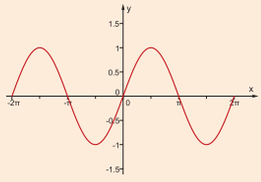
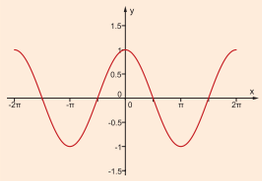
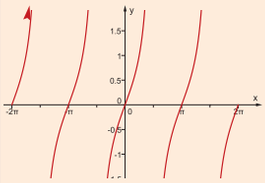


y	$x(=\theta)$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{4\pi}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$



تو دشێی چەماوەیێ نەخشەیا $f(x)=\cos x$ بکێشی بکارئینانا پۆیێ x بۆ وان خالێن دکەڤنە سەر بازنا یەکەیێ. **فرەهیا Amplitude** نەخشەیا دووبارەبووی: دبیتە نیڤا جیاوازیێ ل ناڤبەرا مەزنترین بەها و بچووکترین بەهایێ وێ. فرەهی هەردەم ژمارەکا موجەبە. فرەهیا هەرئێك ژ هەردوو نەخشەیێن Sin و Cos دبیتە $1=\frac{1-(-1)}{2}$ ، لێ فرەهیا نەخشەیا tangent نەیا پێناسەکرییە.

سیفەتێن چەماوەیێن نەخشەیێن سێگۆشەیی

نەخشە	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
چەماوەیێ نەخشەی			
بوار	R	R	$\{x/x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in I\}$
مەودا	$[-1,1]$	$[-1,1]$	R
دەمێ خولێ	2π	2π	π
فرەهی	1	1	پێناسە نەکرییە

فێربە و شرۆڤەبکە

ڕۆناهییەك

هەردوو چەماوەیێن هەردوو نەخشەیێن Sin و tan دخالا بنەڕەت را دبۆرن، لێ چەماوەیێ نەخشەیا Cos تەوەرێ y ل (1) یێ دبڕیت.

تو دشێی چەماوەیێن نەخشەیێن بنەڕەت بۆ کێشانا نەخشەیێن $y=a\sin bx$ ، $y=a\cos bx$ ، $y=a\tan bx$ بکاربینی. ل بیراتەبت کو a راکێشانا ستوونی دنوێنت هەکەر ($|a|>1$) و تێکچوونا ستوونی دنوێنیت هەکەر ($0<|a|<1$) و ئەڤە دبیتە هۆیێ گوهۆڕینا فرەهیێ.

هەکەر a یێ سالب بیت، دڤێت چەماوە بهێتە جهگۆڕێن ب وێنەدانەوە لدۆر تەوەرێ ئێکێ. b نیشانا راکێشانا ئاسۆیی یان تێکچوونا ئاسۆیی دنوێنیت و دەمێ خولێ دگوهۆڕیت.

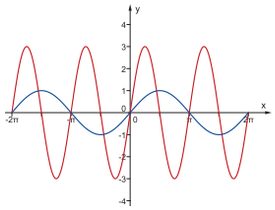
جهگوهۆڕکێن چەماوەیێن نەخشەییێن سێگۆشەی

ل نەخشەیێن سێگۆشەی $y=a\sin bx$ $y=a\cos bx$ $y=a\tan bx$

نەخشە	فرەهی	دەمێ خولێ	دەرکنار
$y=a\sin bx$	$\lvert a\rvert$	$\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$	دەرکنار نینە
$y=a\cos bx$	$\lvert a\rvert$	$\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$	دەرکنار نینە
$y=a\tan bx$	پێناسە نەکرییە	$\frac{\pi}{\lvert b\rvert}$	دەرکنارین ستوونی لنك $x=\frac{\pi}{2\lvert b\rvert}+\frac{k\pi}{\lvert b\rvert}$ دەمێ $k\in I$

نموونـــــه 2 جهگوهۆڕکیا نەخشەییێن سێگۆشەیی

أ چەماوەیێ نەخشەیا Sin بکاربینە بۆ ویێنەکێشانا نەخشەیا $g(x)=3\sin 2x$.
فرەهی و مەودایێ نەخشێ دیاربکە.



پێنگاڤا (1)ێ: فرەهی و دەمێ خۆلێ دیاربکە.

چونکی $a=3$ ڤێجا فرەهی دبیتە $|a|=|3|=3$

چونکی $b=2$ ڤێجا دەمێ خۆلێ دبیتە $\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{|2|}=\pi$

پێنگاڤا (2)ێ: ویێنەیێ ڕوونکرنێ (چەماوەی) بکێشە

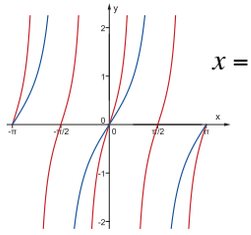
دڤێت چەماوەیێ نەخشەیا بنەڕەت ب هاوکۆلکێ 3 ب ستوونی بێتە راکێشان و ب تێکچوونا ئاسۆیی ب هاوکولکێ $\frac{1}{2}$ بێتە ئەنجامدان. چەماوەیێ نەخشەیا بنەڕەت تەوەرێ ئێکێ لنك چەند جارانێن π دبڕت، هەروەسا چەماوەیێ نەخشەیا g ، تەوەرێ ئێکێ لنك چەندجارانێن $\frac{\pi}{2}$ دبڕن. مەزنترین بەهایێ نەخشەیا g یەکسانە 3 و بچووکترین بەها یەکسانە -3 .

ب چەماوەیێ نەخشەیا *tan* بکاربینە بۆ ویێنەکێشانا چەماوەیێ نەخشەیا $h(x)=\tan 2x$
. دەمێ خۆلێ و ئێکودووبڕینێن ئاسۆیی و دەرکناران دیاربکە.

پێنگاڤا (1)ێ: دەمێ خۆلێ دیاربکە.

دەمێ خۆلێ دبیتە $b=2$ $\frac{\pi}{|b|}=\frac{\pi}{|2|}=\frac{\pi}{2}$

پێنگاڤا (2)ێ: ئێکودووبڕینێن ئاسۆیی دیاربکە، ئێکدووبڕینا ئاسۆیێ یا ئێکێ لنك $x=0$ دبیت. چونکی دەمێ خۆلێ بۆ نەخشەیێ $\frac{\pi}{2}$ ، لەورا ئێکودووبڕینێن ئاسۆی دێ ئەنجام دەن لنك $x=k\frac{\pi}{2}$ ، کو $k\in \mathbb{Z}$ I .



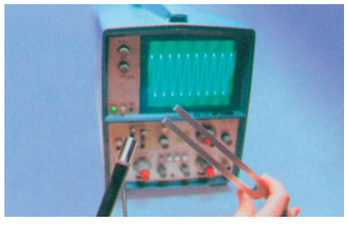
پێنگاڤا (3)ێ: دەرکناران دیاربکە

$b=2$ ، دەرکناریێن ستوونێ دێ بنە $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$ $x=\frac{\pi}{2|2|}+\frac{k\pi}{|2|}$

پێنگاڤا (4)ێ: چەماوەیێ نەخشەیا h بکێشە بکارئینانا زانیاریێن ل سەری.

2. **أ** چەماوەیێ نەخشەیا Cos بکاربینە بۆ ویێنەکێشانا چەماوەیێ نەخشەیا $g(x)=\frac{1}{3}\cos 2x$. فرەهی و دەمێ خۆلێ بۆ ڤێ نەخشێ دیاربکە.

ب چەماوەیێ نەخشەیا tan بکاربینە بۆ ویێنەکێشانا چەماوەیێ نەخشەیا $h(x)=3\tan\frac{1}{2}x$ ، و دەمێ خۆلێ و ئێکدووبڕینێن ئاسۆیی و دەرکناران دیاربکە.

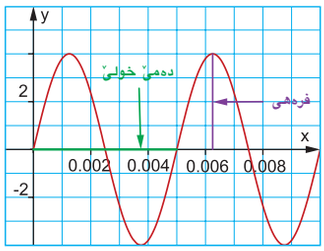


تو دشێی هەردوو نەخشەیان Sin و Cos بکاربینی وەك سامپل بۆ لێکۆلینێن دیاردێن سرووشتی، وەك پێلێن دەنگی. دەنگێن جیاواز پێلێن جۆداجۆدا پەیدادکەن. لەرەلەران بکاردئینن بۆ ناسینا دەنگان. لەرەلەر **Frequency** ژمارا خۆلانە د یەکەیەکیەکا دەمی دا، و ئەو دبیتە هەلگراوێ دەمێ خۆلێ، هێرتز Hz بۆ پیڤانا لەرەلەران بکاردئێت، هێرتز ڕامانا وێ ئەوە پێلا دەنگی 440 جاران دچرکەکێدا دووبارە دبیت.

نموونـــــه 3 بجهئینان لسەر زانستێ دەنگان

نەخشەیا Sin بکاربینە بۆ ویّنەکێشانا پێلەکا دەنگی، هەکەر دەمێ وێ یێ خۆلێ 0.005 S و فرەهی 4 cm بیت. لەرە لەرا قێ پێلێ بهەژمێرە.

تەوەرێ ئاسۆیی ب چەند یەکەیان رەنووس بکە، کو هەر ئێك ژ وان 0.001 چرکە بنوێنت. خۆلەکا تەمام دروست دبیت ل ماوەیێ 0.005 چرکە. هەردوو بهایێن مەزن و بچووك دێ ب فرەهیێ ئێنە دیارکرن. لەرلەرە یەکسانە هەلگەڕاوێ دەمێ خۆلێ. بەهایێ وێ دێ بیتە $\frac{1}{0.005} = 200\,Hz$ لەرلەرا قی دەنگی 200 هێرتز.



3. نەخشەیا Sin بکاربینە بۆ ویّنەکێشانا پێلەکا دەنگی هەکەر دەمێ خۆلێ 0.004 S و فرەهی 3.0 m بیت. لەرلەرا پێلێ بهەژمێرە.

چێدبیت جهگوهۆڕکیا هەردوو نەخشەیان Sin و Cos ئەنجام بدەن، ب ڕاکێشانێ بۆ دەستکەفتنا $y=\sin(x-h)+k$ یان $y=\cos(x-h)+k$. ل بیرا تە بیت، راکێشانا چەماوەی ب k یەکە ب ستوونی، دێ بەرەڤ ژۆر بیت هەکەر k یێ مووجەب بیت و دێ بەرەڤ ژێرەی بیت هەکەر k یێ سالب بیت.

لادانا ڕوویی (انحراف الطور) Phase Shitf بۆ نەخشەیەکا دووبارەبووی: ڕاکێشانەکا ئاسۆییە بۆ چەماوەیێ نەخشێ. لادانا ڕوویی h یەکە، دێ چەماوەی بۆ ڕەخێ ڕاستێ ڕاکێشیت هەکەر h یێ مووجەب بیت، و چەوماەی بۆ ڕەخێ چەپێ ڕاکێشیت هەکەر h یێ سالب بیت.

نموونـــــه 4 دیارکرنا لادانا ڕوویی بۆ هەردوو نەخشەیان Sin و Cos

چەماوەیێ نەخشەیا $f(x)=\sin x$ بکاربینە بۆ ویّنەکێشانا چەماوەیێ نەخشەیا $g(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. ئێکودووبڕینێن ئاسۆیی و لادانا ڕوویی دیاربکە.

پێنگاڤا (1)یێ: فرەهیێ و دەمێ خۆلێ دیاربکە

$a=1$ ، فرەهی دی بیتە $|a|=|1|=1$

$b=1$ ، دەمێ خۆلێ $\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{|1|}=2\pi$

پێنگاڤا (2)یێ: لادانا ڕوویی دیاربکە.

$x+\frac{\pi}{2}=x-\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ ، h دیاربکە

$h=-\frac{\pi}{2}$ ، لادانا ڕوویی دبیتە $\frac{\pi}{2}$ بەرەڤ رەخێ چەپێ. ژ قێ دیاردبیت، هەموو ئێکودووبڕینێن ئاسۆیی یێن چەماوەیی ب $\frac{\pi}{2}$ یەکە بەرەڤ ڕەخێ چەپێ دێ هێنە ڕاکێشان.

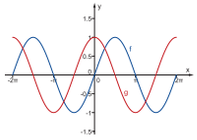
پێنگاڤا (3)یێ: ئێکودوو بڕینێن ئاسۆیی دیاربکە.

ئێکودووبڕینێن ئاسۆیێ بۆ نەخشەیا بنەڕەت دکەڤنە نك $x=k\pi$ کو $k\in I$ کو $x=-\frac{\pi}{2}+k\pi$ دێ ئێکودووبڕینێن ئاسۆیێ بۆ ئەڤێ نەخشەێ کەڤنە نك .

پێنگاڤا (4)یێ: مەزنترین بەها و بچووکترین بەها دیاربکە:

نەخشە مەزنترین یان بچووکترین بەها وەردگرت دەمێ x بکەڤیتە ناڤەندێ دوو ئێکودوو بڕینێن ئاسۆیی، نەخشە مەزنترین بەها وەردگرت لنك $x=2k\pi$ ، $k\in I$ و ئەڤ بەهایە یەکسانە (1) و نەخشە بچووکترین بەها وەردگرت لنك $x=\pi+2k\pi$ ، $k\in I$ و ئەڤ بەهایە یەکسانە (-1).

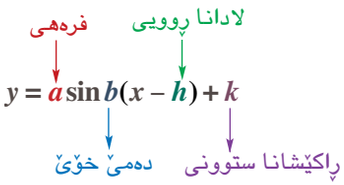
پێنگاڤا (5)یێ: چەماوەیێ نەخشەێ بکێشە بکارئینانا زانیاریێن ل سەری.



خالا چاڤدێریێ

4. چەماوەیێ نەخشەیا $f(x)=\cos x$ بکاربینە بۆ وێنەکێشانا چەماوەیێ $g(x)=\cos(x-\pi)$. ئێکودوو بڕینێن ئاسۆیی و لادانا ڕووی دیاربکە.

تو دشێی جهگوهۆڕکان پێکڤە ئەنجام بدەی بۆ هەردوو نەخشەیان Sin و Cos. بهایێن a، b، h، k بکاربینە بۆ دیارکرنا سیفەتێن نەخشەیێن Sin یان Cos .

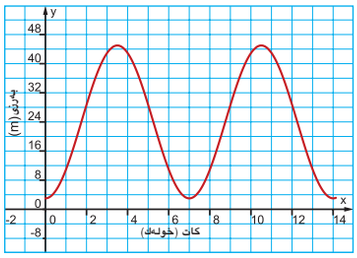


نموونـــــە 5 بجهئینان

چەرخ و فەلکێ مەزن ئێك خۆلی د 7 خۆلەکاندا تەمامدکەت.
نەخشەیا $H(t)=21\sin\frac{2\pi}{7}(t-1.75)+24$ سامپلەکە بۆ هەژمارتنا بلنداهیا هەر کۆرسییەکی ژ سەر ئەردی ب (مەتران) پێ دەمی ب (چرکەیان).

أ **وێنەیێ چەماوەیێ نەخشەیێ بۆ بلنداهیا کورسییەکێ د دەمێ دوو خولەکاندا بکێشە.**

$H(t)=21\sin\frac{2\pi}{7}(t-1.75)+24$ $\quad a=21$ ، $b=\frac{2\pi}{7}$ ، $h=1.75$ ، $k=24$



پێنگاڤا (1)ێ: جوداکەرێن سەرەکی بۆ نەخشێ دیاربکە
فرەهی 21 ، دەمێ خولێ $\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{\left|\frac{2\pi}{7}\right|}=7$

دەمێ خۆلێ ئەو دەمەیە کو چەرخ و فەلەك ئێك خۆلی تەمام دکەت، و دبیتە 7 خۆلەك.

لادانا ڕوویی: 1.75 خۆلەك بۆ ڕەخێ ڕاستێ.

ڕاکێشانا ستوونی: 24 m بەرەڤ ژۆرێ. چەماوە تەوەرێ ئاسۆیی نابڕیت.

مەزنترین بەها: $21+24=45$ کو نەخشە وەردگریت لنك $t=3.5$ و $t=10.5$.
بچووکترین بەها: $24-21=3$ کو نەخشە وەردگرێت لنك $t=0$، $t=7$، $t=14$.

ب **مەزنترین بلنداهیا کورسییەك دگەهتێ چەندە؟**

مەزنترین بلنداهیا کورسییەك دگەهتێ دبیتە $45\text{m}=(21+24)$.

خالا چاڤدێریێ

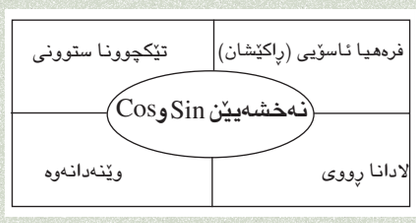
5. **دێ چ بیت هەکەر ...؟** نموونەیەك $H(t)=-5\cos\frac{\pi}{45}t+7$ بیت پێ t (ب چرکە).

أ وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ بلنداهیا کورسییەکی د ماوەیێ دوو خۆلەکاندا وێنەبکە.

ب مەزنترین بلنداهیا کورسییەك دگەهتێ چەندە؟

هزربکە و گەنگەشێ بکە

1. پەیوەندی ل ناڤبەرا لەرەلەرا نەخشەیا دووبارەبووی و دەمێ خۆلی چییە؟ ئەڤە چەوا لسەر نەخشەیا Cos دهێتە بجهئینان.
2. ئەو پەیوەندیا مەزنترین و بچووکترین بها و فرەهی و دەمێ خۆلێ یێن هەردوو نەخشان Sin و Cos پێکڤە گرێددەت چییە؟
3. ڕێکخەربە، هێلکاریێ بەرامبەر کۆپیبکە و تەمام بکە. لسەر هەر جهگۆهۆرکەکێ نموونەکێ بینە. و دەمێ خۆلی دیاربکە.



فێربە و هزربکە

2-7 ڕاهێنان

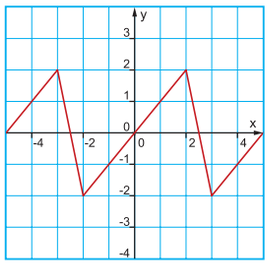
ڕاهێنانێن ئاراستەکری

1 **زاراف:** بهاییێن نەخشەیا دووبارەبووی دماوەییێن ریێك دا دووبارەدبن، دبێژنێ ؟ (خول یان دەمێ خولێ).

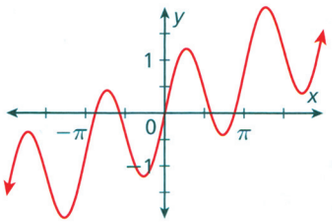
بەرێ خوّبدە نموونە 1

دیاربکە، ئەرێ نەخشە یا دووباربوویە یان نە. دەمێ خولێ دیاربکە هەکەر یا دووبارەبووی بیت.

2



3



بەرێ خوّبدە نموونە 2

چەماوەیێ نەخشەیا بنەڕەت بکاربینە بۆ وێنەکێشانا هەر نەخشەیەکێ، فرەهیێ و دەمێ خولێ دیاربکە:

4 $f(x)=\sin\frac{1}{2}x$ **5** $h(x)=\frac{1}{4}\cos x$ **6** $k(x)=\sin\pi x$

چەماوەیێ نەخشەیا بنەڕەت بکاربینە بۆ وێنەکێشانا هەر نەخشەیەکێ. دەمێ دووبارەبوونێ و ئێکودووبڕینێن ئاسۆیی و دەرکناران دیاربکە:

7 $f(x)=2\tan 3x$ **8** $h(x)=\tan\frac{1}{4}x$ **9** $k(x)=\tan 2\pi x$

بەرێ خوّبدە نموونە 3

10 **دەنگ:** نەخشەیا Sine بکاربینە بۆ وێنەکێشانا پێلەکا دەنگی، هەکەر و دەمێ خولێ 0.01S چرکە و فرەهی 6 cm بیت. لەرە لەرا پێلێ بهەژمێرە.

بەرێ خوّبدە نموونە 4

چەماوەیێ نەخشەیا بنەڕەت بکاربینە بۆ وێنەکێشانا هەر نەخشەیەکێ. ئێکودووبڕینێن ئاسۆیی و لادانا ڕوویی دیاربکە:

11 $f(x)=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$ **12** $h(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ **13** $k(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

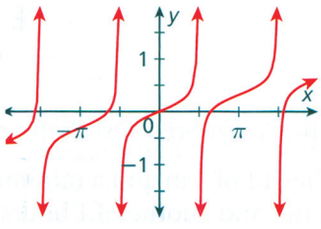
بەرێ خوّبدە نموونە 5

14 **بۆ خوّشیێ:** چێدبیت نەخشەیا $H(\theta)=-4\cos\theta+6$ بهێتە بکارئینان بۆ هەژمارتنا بلنداهیا مرۆڤەکی ل هێسکەکێ سواربوویی ب (پێیان) پێ گۆشەیا θ ، ئەو گۆشەیە کو هێسك ل گەل ڕاستەهێلی ستوون و سەری وێ هێسکێ ڕادبۆریت دروست دکەت. وێنەیەکی ڕوونکرنێ بکێشە بلنداهیا مرۆڤی ژ ئەردی بنوێنیت $0^\circ\le\theta\le 90^\circ$. بلنداهیا مرۆڤێ چەندە هەکەر $\theta=60^\circ$ ؟

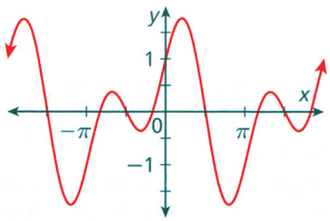
ڕاهێنان و شیکارکرنا پرسیاران

دیاربکە، ئەرێ نەخشەیا دووبارەبوویە یان نە دەمێ خوّلی بینەدەر هەکەر یا دووبارەبووی بوو:

15



16



چەماوەیێ نەخشەیا بنەڕەت بکاربینە بۆ وێنەکێشانا هەر نەخشەیەکێ. فرەهیێ و دەمێ خوّلی بهەژمێرە:-

17 $f(x)=4\cos x$ **18** $h(x)=\frac{3}{2}\sin x$ **19** $k(x)=-\cos 4x$ **20** $(x)=6\sin\frac{1}{3}x$

21 **دەنگ:** نەخشەیا Sin بکاربینە بۆ وێنەکێشانا پوّلا دەنگەکی. هەکەر دەمێ خولێ 0.025 S (چرکە) و فرەهی 50 cm بیت. پاشی لەرەلەرا قێ پێلێ بینەدەر.

ڕاهێنانێن نازاد	
بۆ شیکارکرنا پرسیاران	بەرێ خوّ بدە نموونە
16–15	1
20–17	2
21	3
28–22	4
29	5

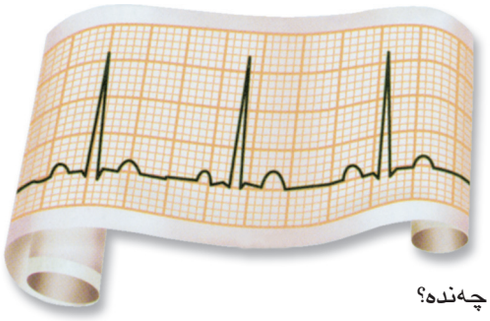
چەماوەیێ نەخشەیا بنەڕەت بۆ وێنەکێشانا هەر نەخشەیەکێ بکاربینە، دەمێ خولێ و خالێن ئێکودووبڕینێ ل گەل تەوەرێ ئاسۆیی و دەرکناران دیاربکە:

22 $f(x)=\tan\frac{3}{2}x$ 23 $h(x)=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 24 $k(x)=-2\tan\frac{\pi}{2}x$

25 $f(x)=\sin(x+\pi)$ 26 $h(x)=\cos(x-3\pi)$

27 $k(x)=\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$ 28 $g(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

29 **زانستێ دەریایان:** تو دشێی نەخشەیا $d(t)=\frac{3}{2}\sin\left(\frac{5\pi}{31}t\right)+23$ وەك سامپلەك بنوێنی بۆ هەژمارتنا کووراتیا ئاڤا کەنداڤەکی ب متران پێ دەمی ب دەمژمێران. چەماوەیێ ڤێ نەخشەیێ بکێشە و پترترین و کێمترین کووراتیێ بهەژمێرە.



30 **نۆژداری:** وێنەیێ بەرامبەر هێلکاریێ دلێ مرۆڤەکی ئاسایی دیاردکەت. هەر خولەك لێدانەکا دلی دنوێنیت.

أ دەمێ خولێ بۆ لێدانێن دلی چەندە؟

ب تێکڕایێ لێدانێن دلی، ئانکو ژمارا لێدانان دخولەکەکێدا. تێکڕایێ لێدانان دهێلکاری بەرامبەردا چەندە؟

ج لەرە لەرا ڤێ هێلکاریێ چەندە؟

د پەیوەندی ل ناڤبەرا ڤی هێلکاری و تێکڕایێ لێدانێن دلی چەندە؟

دەروازەیەك

لسەر نۆژداریێ

ئامیرێ هێلکاریێ دلی بکاردئینت بۆ پیڤانا ئەوێ تەزوویا کارەبێ ئەوا لێدانێن دلێ مرۆڤی ڕێکدئێخیت ژ بۆ دەستنیشانکرنا نەخۆشیێن دلی.

پەیوەندی ل ناڤبەرا فرەهی و دەمێ خولێ بۆ هەر ئێك ژ ڤان نەخشەیان بهەژمێرە، پاشی وان جهگوهۆڕکێن بسەر نەخشەیێن بنەڕەت دا هاتینە ئەنجام دان دیاربکە هەتا بگەهنە ڤان نەخشان:

31 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1$ 32 $g(x)=\frac{3}{4}\cos\frac{\pi}{4}x$

33 $k(x)=\cos(2\pi x)-2$ 34 $(x)=-3\sin 3x$

خەملاندن: چەماوەیێ نەخشەیێن Sin و Cos بۆ خەملاندنا بهایێ هەر بڕەکی بکاربینە:

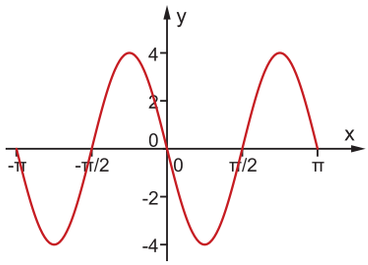
35 $\sin 160^\circ$ 36 $\cos 50^\circ$ 37 $\sin 15^\circ$ 38 $\cos 95^\circ$

نەخشەیا Sine و نەخشەیا Cosine بۆ نواندنا وان پێداییان بنڤیسە:

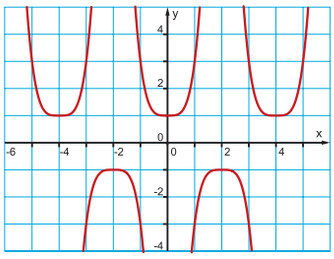
39 فرەهی 6 و دەمێ خولێ π 40 فرەهی $\frac{1}{4}$ و لادانا رووی $\frac{3}{2}\pi$ بۆ لایێ چەپێ.

نەخشەیا Sine و Cosine بۆ نواندنا ڤان وێنەیێن ڕوونکرنێ بنڤیسە.

41



42



43 بلندترین ئاستێ هەلکشانا کەنداڤەکی دگەهتە 3m ، و ئاستێ راکێشانێ دگەهیتە 0. هەلکشان 6.1 دەمژمێران بەردەوام دبیت هەتا داکێشیت، و پشتی بۆرینا 6.1 دەمژمێران جارەکێ ڤەدگەڕێت. چێدبیت بلنداهیا هەلکێشانێ ب (h) پێ دەمی (t) بهێتە نواندن:-

أ فرەهیا ڤێ نەخشێ و دەمێ خولی چەندە؟ بلندترین بها و نزمترین بها چەندە؟

ب مگرتی هەلکشان گەهشتە بلندترین بها دەمێ $t=0$ بهایێ $h(0)$ چەندە؟ و بهایێ $h(6.1)$ چەندە؟

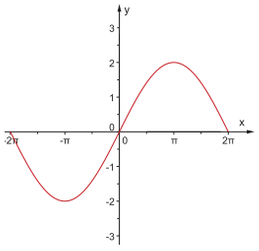
ج نەخشەیا h لسەر شێوەیێ $h(t)=a\cos bt+k$ بنڤیسە؟

44 **هزرکرنا ڕەخنەگر:** هەکەر فرەهیا نەخشەیا Sin و دەمێ خۆلی بزانی، ئەرێ تو دشێی مەزنترین بها و بچووکترین بها بۆ نەخشێ بهەژمێری؟ وان بهایێن x دیاربکە بۆ هەژمارتنا مەزنترین و بچووکترین بها. چەوا بکاردئینی؟

45 **بنڤیسە:** چ ب سەر خولێ ئەنجام ددەت بۆ نەخشەیا $f(x)=\sin bx$ هەکەر $b>1$ ؟ و هەکەر $b<1$ ؟

ئامادەکرن بۆ ئەزموونێ

46 کیژ نەخشەیا سێگۆشەی یا گونجاییە بۆ وێنەیێ روونکرنێ یێ بەرامبەر؟



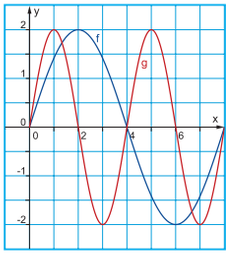
أ) $f(x)=\frac{1}{2}\sin x$ ب) $f(x)=2\sin x$

ج) $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$ د) $f(x)=2\sin\frac{1}{2}x$

47 فرەهیا نەخشەیا $f(x)=-4\cos 3\pi x$ چەندە؟

أ) -4 ب) 3 ج) 4 د) 3π

48 وێنەیێ روونکرنێ یێ بەرامبەر بکاربینە بۆ دیارکرنا پەیوەندیێ لناڤبەرا f و g .



أ) فرەهیا f دوو جارانی فرەهیا g یە.

ب) لەرەلەرا f دوو جارانی لەرە لەرا g یە.

ج) دەمێ خۆلێ یێ f دوو جارانی دەمێ خولێ g یە.

د) خۆلا f دوو جارانی خۆلا g یە.

49 **بەرسڤەکا کورت:** چەماوەیێ نەخشەیا $f(x)=\sin x$ بکاربینە بۆ وێنەکێشانا $g(x)=-4\sin 2(x-\pi)$ د ماوەیێ $[0,\ 2\pi]$ دا، و جهگوهۆڕکان دیاربکە.

بەرهنگاری و بەرفرەهکرن

هەردوو نەخشەیان بکاربینە $f(\theta)=\frac{1}{2}\sin\theta$ و $g(\theta)=2\cos\theta$ کو $0^\circ\le\theta\le360^\circ$

50 وێنەیێ چەماوەیێ هەردوو نەخشەیان د ئێك ڕووتەختێ پۆتانی دا وێنەبکە.

51 پۆتانێ هەر خالەکا ئێکودوو بڕینێن هەردوو چەماوەیان بنێزیکی بهەژمێرە.

52 کەنگی لاسەنگەیا $f(\theta)>g(\theta)$ دێ یا دروست بیت؟

پێداچوونا لوولپێچی

هەر کۆمەڵەکا ژمارەیان بشێوەیێ ماوەی بنڤیسە. (پۆلێن پێشتر)

53 $-7<x\le5$ **54** $-2\le x$ یان $1\le x\le13$ **55** $0\le x\le9$

56 **گوڵ:** لاڤینێ 100 000 دینار هەنە بۆ کڕینا کۆمەڵەکا دەستکێن گولان ژ جۆرێن گوڵێن باغان و زنبەق و قەرەنفلان. بهایێ دەستکێ گوڵێن باغان 6000 دینارن و بهایێ دەستکێ زنبەقان 2000 دینارن و بهایێ دەستکێ قەرەنفلان 4000 دینارن (وانەیا 2)

گولە باغ	6		3	7
میّلاقە		8	5	
میّخەك	11	15		13

أ هاوکێشەیەکا هێلی ب سێ نەزانراوان بنڤیسە بۆ نواندنا پارەی.

ب خشتێ بەرامبەر تەمانبکە:

پێداییان بکاربینە بۆ شیکارکرنا سێگۆشەیان ABC . (وانەیا 7-1)

57 $b=2$ ، $c=11$ ، $m\hat{A}=165^\circ$ **58** $a=9.2$ ، $b=11.4$ ، $c=20.2$

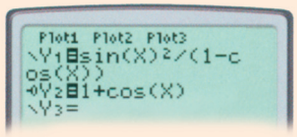
هاوئەنجامێن سێگۆشەی ب وێنەیێ ڕوونکرنێ

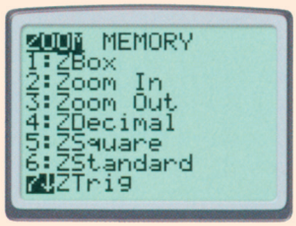
بەرپەرێ تەکنۆلۆژیا

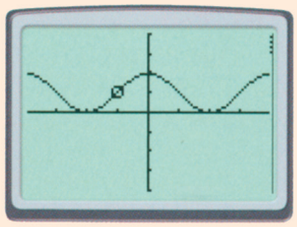
چێدبیت تو بژمێرا ڕوونکرنێ بکاربینی بۆ بەراوردکرنا وێنەیێن ڕوونکرنێ و دارشتنا دەستەواژەیان لسەر هاوئەنجامێن سێگۆشەی.

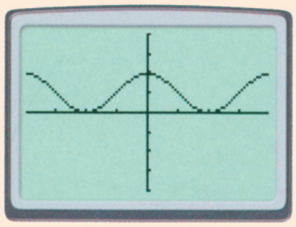
چالاکی

دیاربکە ئەرێ هاوکێشەیا $\frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = 1+\cos x$ هاوئەنجامەکا سێگۆشەییە یان نە؟









هەکەر هاوکێشە هاوئەنجامەکا سێگۆشەی بیت، هیچ جیاوازیەك نابیت ل ناڤبەرا چەماوەیێ ڕێسایا ڕەخێ ئێکێ و چەماوەیێ ڕێسایا ڕەخێ دووێ.

1. $\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$ بەرامبەر **Y1** و $1+\cos x$ بەرامبەر **Y2** تۆماربکە. ڕێیان 0 بۆ کێشانا وێنەیێ دووێ هەلبژێرە ل گەل هێلەکی کو تێرا ببۆریت. ئەڤە دێ هاریکاریا تەکەت، ل دویڤ چوونێ بکەی لسەر وێنەیێ ڕوونکرنێ.

2. شاشەیا وێنەی دیاربکە بکارئینانا ZTrig:7 ژ هەلبژارتنێن zoom .

3. چاڤدێریا شاشەیا بژمێرێ بکە ل دەمێ ئەو چەماوەیێ دووێ دکێشێت، دێ بازنەکا بچووك بینی کو لسەر چەماوەیێ ئێکێ دلڤیت. ئەڤە وێ ڕامانێ ددەت کو چەماوەیێ نەخشەیا ئێکێ لسەر چەماوەیێ نەخشەیا دووێ دهێتە وێنەکرن.

4. دەمێ ئەو بازنا بچووك وێنەکێشانا چەماوەیێ دووێ تەمام دکەت، دێ پشتڕاستبی کو هەردوو چەماوە جووتن. ئەڤە وێ دگەهینیت کو ئەو هاوکێشە هاوئەنجامە، پاشی ب جەبرێ ساخبکە.

هەولبدە

1. **دەستەواژەیەکێ بنڤیسە:** دیاربکە ئەرێ هاوکێشەیا $\cos x \sin x - \tan x = \frac{1}{\cos x}$ هاوئەنجامەکا سێگۆشەییە یان نە.

2. ب جەبرێ دروستی یان نەدروستیا بەرسڤا خۆ ل پرسیارا پێشتر بسەلمینە.

3. **دەستەواژەیەکێ بنڤیسە:** دیاربکە ئەرێ هاوکێشەیا $\tan x = \frac{1+\tan x}{1+\frac{1}{\tan x}}$ هاوئەنجامەکا سێگۆشەییە یان نە.

4. ب جەبرێ دروستی یان نەدروستیا بەرسڤا خۆ ل پرسیارا پێشتر بسەلمینە.

3-7

هاوئەنجامێن سێگۆشەی یێن بنەڕەت
Fundamental Trigonometric Identities

ئارمانج

- هاوئەنجامێن سێگۆشەی یێن بنەڕەت بکاردئینن بۆ سادەکرنا برێن سێگۆشەی، و نقیسینا وان سەر ژ نوو، و ساخکرنا راستیا هاوئەنجامێن سێگۆشەی.

کی ئەقێ بکاردئینت؟

کارگەهێن چێکرنا پێدڤیێن خەلیساندنێ هاوئەنجامێن سێگۆشەیی بکاردئینن، بۆ دیارکرنا وی جۆرێ شەمایێ ئەوا دڤێن تەختێ خلیساندنێ پێ شەما بکەن (نموونە 3).

تو دشێی هاوئەنجامێن سێگۆشەی بکاربینی بۆ سادەکرنا برێن سێگۆشەی. ل بیرا تە بیت هاوئەنجام د بیرکاریێ دا پەیوەندییەکە دێ یا دروست بیت بۆ هەموو وان بەهایێن گۆڕاوێن پەیوەندیێ وەردگرن. هاوئەنجامێن ل خوارێ یێن هاتینە پۆختەکرن بکارئینانا سەلمێنراوا فیساگۆرس.

$x^2 + y^2 = r^2$ سەلمێنراوا فیساگۆرس

$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$ هەردوو ڕەخان دابەشبکە لسەر r^2.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ $\cos\theta$ ل جهێ $\frac{x}{r}$ و $\sin\theta$ ل جهێ $\frac{y}{r}$ دانە.

هاوئەنجامێن سێگۆشەی یێن بنەڕەت		
هاوئەنجاما *tan*	هاوئەنجامێن فیساگۆرسی	هاوئەنجامێن دژی
$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ $1 + \frac{1}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ $\cos(-\theta) = \cos\theta$ $\tan(-\theta) = -\tan\theta$

فێربە و ژبەربکە

بۆ سەلماندنا ئەوێ چەندێ، کو هاوکێشەیەك هاوئەنجامە، لایەکێ هاوکێشێ چەند جاران بگوهۆڕە هەتا وەك لایێ دی لێبیت، و هاوئەنجامێن بنەڕەت د پێنگاڤێن خۆدا بکاربینە.

نموونە 1 سەلماندنا هاوئەنجامێن سێگۆشەی

هاوئەنجاما سێگۆشەی بسەلمینە.

أ $\frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta}\tan\theta$

$\frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta}\tan\theta$ ئەوی لایێ تە بڤێت بگوهۆڕی وەربگرە.

$= \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$ هاوئەنجاما *tan* بکاربینە.

$= \frac{1}{\cos\theta}$ سادەبکە

ب $\frac{1}{\sin(-\theta)} = -\frac{1}{\sin\theta}$

$\frac{1}{\sin(-\theta)} =$ ئەوی لایێ تە بڤێت بگوهۆڕی وەربگرە

$\frac{1}{-\sin\theta}$ هاوئەنجاما دژی بکاربینە

$-\frac{1}{\sin\theta} = -\frac{1}{\sin\theta}$ سادەبکە

ڕۆناهیەك

چێدبیت هەر لایەکی بگوهۆڕی،لێ باشترە ئەوی لایێ ئالوزتر بگوهۆڕی و سادەبکەی بۆ دەستکەفتنا لایێ دی.

1. هاوئەنجاما سێگۆشەی بسەلمینە.

خالا چاڤدێریێ

أ $\sin\theta\frac{1}{\tan\theta}=\cos\theta$

ب $1-\frac{1}{\cos(-\theta)}=\frac{\cos\theta-1}{\cos\theta}$

تو دشێی هاوئەنجامێن سێگۆشەیی بۆ سادەکرنا بڕین سێگۆشەی بکاربینی.

نموونـــــە 2 بکارئینانا هاوئەنجامێن سێگۆشەی ییێن بنەڕەت بۆ سادەکرنا بریێن سێگۆشەی

بڕێ سێگۆشەی بتنێ پێ $\cos\theta$ و ب سادەترین شێوە بنڤیسە:

أ $\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$

$\frac{1-\cos^2\theta}{1-\cos\theta}$ هاوئەنجاما فیساگۆرس

$\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{1-\cos\theta}$ شێتەلکرنا جیاوازیا دوو دووجاییان

$1+\cos\theta$ سادەبکە

ب $\frac{1}{\cos\theta}-\tan\theta\sin\theta$

$\frac{1}{\cos\theta}-\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\sin\theta$ ل جهی دانە کەرتان دەربکە.

$\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$ هاوئەنجاما فیساگۆرس

$\frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta}$ بکاربینە

$\frac{\cos^2\theta}{\cos\theta}$ سادەبکە

$\cos\theta$

ڕوناهیەك

هەکەر تە نزانی بڕێ سێگۆشەی سادەبکەی، هەولبدە هەر ڕێژەیەکا سێگۆشەی بگوهۆڕە بۆ Sin یان Cos .

2. بڕێ سێگۆشە بتنێ پێ $\sin\theta$ و ب سادەترین شێوە بنڤیسە.

خالا چاڤدێریێ

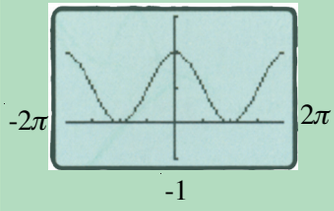
أ $\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta}$

ب $\frac{1}{\tan^2\theta}$

ژ قوتابی بۆ قوتابی

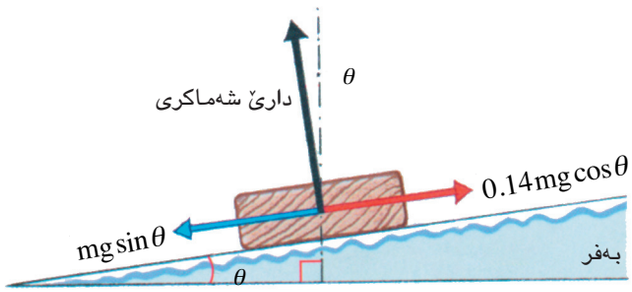
هاوتابوونا بڕان ب وێنەیێ ڕوونکرنێ ساخبکە.

تە دڤێت بژمێرا ڕوونکرنێ بکاربینی بۆ ساخکرنا هاوتابوونا دوو بڕان: بۆ ساخکرنا هاوتابوونا هەردوو بڕان $\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$ و $1+\cos\theta$، بژمێرا ڕوونکرنێ بکاربینە بۆ وێنەکێشانا چەماوەیێ هەردوو نەخشەیان $y=\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$ و $y=1+\cos\theta$ لسەر ئێك، شاشەیێ چونکی هەردوو چەماوە لسەر ئێکودوو جووتن، ڕامانا وێ ئەوە هەردوو بڕ دهاوتانە.



نموونـــــە 3 بجهئینانا پیشەسازی

کارگەهەکا چێکرنا پێڤڤیێن خلیساندنێ، لێکخشاندنا جۆرەکی نوویێ شەمایێ تاقیدکەت، ب شەماکرنا لاکێشە تەریبەکا داری ب ئەوی جۆرێ شەمایێ و دانانا وێ لسەر ڕوویەکی لێژەی یێ بەفرێ. ئاستێ ڕوویێ لارێ بەفرێ هێدی هێدی بلند دکەن، هەتا پارچەیا لاکێشە تەریبا داریێ شەماکری دەست ب خلیساندنێ بکەت.



خواندن

پیتا یۆنانی μ بخوینە میو

دەمێ پارچا داری دەست بخلیساندنێ دکەت، پێکهاتێ بارستایێ تەریب ل گەل رووێ بەفرێ $mg\sin\theta$ یەکسانە ل گەل بەرگرێ خلیساندنێ $\mu mg\cos\theta$ ئەوێ ژ لێکخشاندنێ پەیدا دبیت کو μ هاوکۆلکێ لێکخشاندنێ دنوێنت. گۆشەیا لێکخشاندنێ θ دیاربکە، ئانکو ئەو گۆشەیا ئاستێ رووتەختێ بەفرێ ل گەل ئاستێ ئاسۆیی دروستدکەت ل دەستپێکا خلیساندنێ، هەکەر $\mu=0.14$.

$mg\sin\theta=\mu mg\cos\theta$ هەردوو رەخان لسەر mg دابەشبکە

$\sin\theta=\mu\cos\theta$ ل جهێ μ 0.14 دان

$\sin\theta=0.14\cos\theta$ هەردوو رەخان لسەر $\cos\theta$ دابەشبکە.

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=0.14$ هاوئەنجاما tan .

$\tan\theta=0.14$

$\theta\approx 8°$ $\tan^{-1}$ بکاربینە.

پارچا داری دەست ب خلیساندنێ دکەت دەمێ پیڤانا گۆشا θ دبیتە 8 پلە بنێزیکی.

خالا چاڤدێریێ

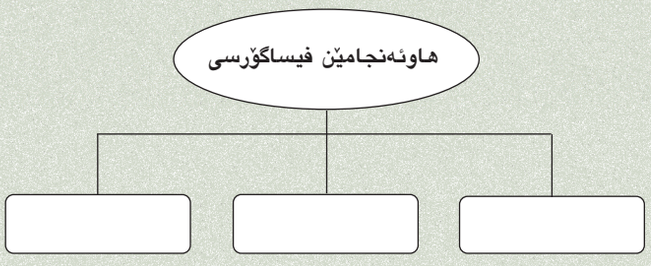
3. هاوکێشا $mg\sin\theta=\mu mg\cos\theta$ بکاربینە بۆ هەژمارتنا گۆشەیا خلیساندنێ، هەکەر $\mu=0.4$.

فێربە

ژبەرکە

هزربکە و گەنگەشێ بکە

1. بەحسبکە چەوا دسەلمینی هاوکێشەیەك هاوئەنجامە
2. ڕۆنبکە کیژ هاوئەنجام بکاردهێت بۆ سەلماندنا $(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)=\sin^2\theta$.
3. ڕێکخەربە، خشتەیێ دووبارە بنقیسە پاشی تەمامبکە ب نقیسینا هاوئەنجامێن فیساگۆرسی.



3-7 ڕاهێنان

ڕاهێنانێن ئاراستەکری

نموونە 1 هاوئەنجاما سێگۆشەیی بسەلمینە.

1. $\sin\theta\frac{1}{\cos\theta}=\tan\theta$
2. $\frac{1}{\tan(-\theta)}=-\frac{1}{\tan\theta}$
3. $\cos^2\theta\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)=\sin^2\theta$

نموونە 2 هەر بڕەکی پێ $\cos\theta$ ب سادەترین شێوە بنقیسە.

4. $\frac{1}{\sin\theta}\tan\theta$
5. $\left(1+\frac{1}{\cos^2\theta}\right)(1-\sin^2\theta)$
6. $\sin^2\theta+\cos^2\theta+\tan^2\theta$

نموونە 3

7 **فیزیا:** هاوکێشەیا $mg\sin\theta=\mu mg\cos\theta$ بکاربینە بۆ دیارکرنا گۆشەیا خلیساندنا لاکێشە تەریبەکا شووشەی لسەر مێزەکا شووشەی هاتیە دانان. دەمێ رووییێ مێزێ خواردکەن، لاکێشە تەریب دەست ب خلیساندنێ دکەت. هەکەر هاوکۆلکێ لێکخشاندنێ $\mu=0.94$ بیت.

ڕاهێنان و شیکارکرنا پرسیاران

هاوئەنجاما سێگۆشەیی بسەلمینە.

8 $\frac{1}{\cos\theta}\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\sin\theta}$

9 $\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta}=1-\frac{1}{\tan\theta}$

10 $\tan\theta\sin\theta=\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta$

11 $\frac{1}{\cos^2\theta}(1-\cos^2\theta)=\tan^2\theta$

هەر بڕەکی پێ $\sin\theta$ و ب سادەترین شێوە بنڤیسە.

12 $\frac{\cos^2\theta}{1+\sin\theta}$

13 $\tan^2\theta$

14 $\cos\theta\frac{1}{\tan\theta}+\sin\theta$

15 $\frac{\frac{1}{\cos^2\theta}-1}{1+\tan^2\theta}$

16 **فیزیا:** هاوکێشەیا $mg\sin\theta=\mu mg\cos\theta$ بکاربینە بۆ هەژمارتنا بلندترین لارێ گونجایی بۆ ڕێیەکێ، کو ڕێبەرت تایرێن لاستیکی یێ ترومبێلەکێ لسەر راوەستن بێی ئەو بخلیست.

پێنگاڤێن جۆراوجۆر: هەر بڕەکی سێگۆشەی پێ ئێك نەخشەیا سێگۆشەی بنڤیسە.

17 $\frac{1}{\sin\theta}(1-\cos^2\theta)$

18 $\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\tan\theta$

19 $\cos\theta+\sin\theta\tan\theta$

20 $\sin\theta\frac{1}{\sin\theta}-\cos^2\theta$

21 $\cos^2\theta\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\cos\theta}$

22 $\cos\theta(\tan^2\theta+1)$

23 $\sin\theta\cos\theta\tan\theta$

24 $1-\frac{\sin\theta\cos\theta}{\tan\theta}$

25 $\frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}$

26 $\frac{\sin^2\theta}{1-\cos^2\theta}$

27 $\tan\theta\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)$

28 $\cos\theta\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)$

29 $\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta}$

30 $\frac{1}{\cos^2\theta}\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}-\cos^2\theta\right)$

31 $\sin\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}-\frac{1}{\sin\theta}\right)$

هەر هاوئەنجامەکێ بسەلمینە.

32 $\frac{\cos\theta-1}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos\theta}-\frac{1}{\cos^2\theta}$

33 $\sin^2\theta\left(\frac{1}{\sin^2\theta}-1\right)=\cos^2\theta$

34 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\cos\theta}$

35 $\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}=\frac{1}{\cos\theta}$

36 $\frac{1-\cos^2\theta}{\tan\theta}=\sin\theta\cos\theta$

37 $\frac{1}{\sin^2\theta(1+\tan^2\theta)}=\frac{1}{\tan^2\theta}$

هەر هاوئەنجامەکا بنەڕەت بسەلمینە بێی بکارئینانا هیچ هاوئەنجامەکا دی (ڕێژەییێن سێگۆشەی ل گەل x ، y ، r بکاربینە).

38 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

39 $\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

40 $1+\frac{1}{\tan^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}$

41 $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$

راهێنانێن نازاد

بۆ شیکارکرنا پرسیاران	بەرێ خۆ بدە نموونە
11–8	1
15–12	2
16	3

42 نەخشەیا $y(t)=5\sin t$ وەك سامپلەك دەیتە بكارئینان بۆ هەژمارتنا ڕاكێشانا سپرینگەكی ل ژێر كارتێكرنا تەنەكی پێڤە هلاویستی پ دەمی (t)ب چركەیان. و نەخشەیا $z(t)=2.6\cos t$ وەك سامپلەك دەیتە بكارئینان بۆ هەژمارتنا كێشانا سپریگەكی دی ل ژێر كارتیكرنا تەنەكی پێڤە هلاویستی پێ دەمی.

أ دوو تەن دگەل هەردوو سپرینگان هاتنە هلاویستن د ئێك دەمی دا $(t=0)$. پشتی چەند چركەیان كێشانا هەردوو سپرینگان بۆ جارا ئێكێ دێ یەكسان بن؟

ب ڕاكێشان د ڤی دەمیدا چەندە؟

ج د كیژ دەمیدا ڕاكێشانا هەردوو سپرینگان یەكسان دبن؟

بژمێرا ڕوونكرنێ: بژمێرا ڕوونكرنێ بكاربینە دا بریار بدەی كیژ ئەڤێن ل خوارێ هاوئەنجامە.

43 $\left(\frac{1}{\sin\theta}-1\right)\left(\frac{1}{\sin\theta}+1\right)=\tan^2\theta$

44 $\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta=\sin\theta$

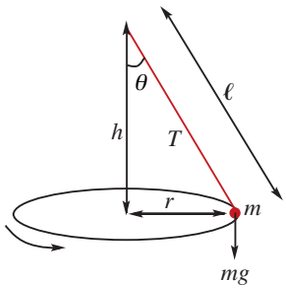
45 $\cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}+\cos\theta\frac{1}{\sin^2\theta}\right)=\frac{1}{\sin^2\theta}$

46 $\frac{1}{\tan\theta}(\cos\theta+\sin\theta\tan\theta)=\frac{1}{\sin\theta}$

47 $\cos\theta=0.99\cos\theta$

48 $\sin\theta\cos\theta=\tan\theta-\tan\theta\sin^2\theta$

49 **فیزیا:** بەندۆل شێوەیەكی قووچەكی دروست دكەت دەمێ ئەو لسەر بازنەكێ بلقیت، ل جهێ ئەو ژ ڕەخەكی بۆ ڕەخێ دی بچیت. و د ئەڤێ لقینا خۆدا قووچەكەكا بنكێ وێ بازنا لقینێ وێنە دكەت. یاسایا $r=\frac{g\tan\theta}{\omega^2}$ بكاردهێت بۆ هەژمارتنا دریژیا نیڤتیرێ بنكێ قووچەكێ r ، هێمایی g هێزا ڕاكێشانێ دنوێنیت، ω لەزا گۆشەی یا بەندۆلێ دنوێنیت.



أ ڕێسایا $\omega=\sqrt{\frac{g}{\ell\cos\theta}}$ و هاوئەنجامێن سێگۆشەیی یێن بنەڕەت بكاربینە بۆ نڤێسینا ڕێسایا هەژماراتنا نیڤتیرەی.

ب ڕێسایەكێ بۆ ℓ پێ ω و g و ئێك نەخشەیا سێگۆشەی بنڤیسە.

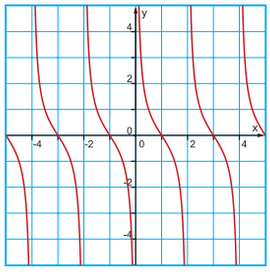
هزركرنا ڕەخنەگر: دبێژن نەخشەیا كە هەكەر $f(-x)=-f(x)$ ، و نەخشەیا جووتە هەكەر $f(-x)=+f(x)$

50 هەرسێ نەخشەیێن سێگۆشەی یێن بنەڕەت ل دویڤ كت و جووتێ پۆلینبكە.

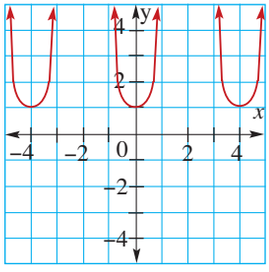
51 ب چ چەماوەیێ نەخشەیا كت و نەخشەیا جووت ژ ئێكودوو د جۆدانە، و ب چ ژ چەماوەیێن نەخشەیێن دی د جۆدانە؟

دیاربكە كیژ نەخشەیا كە یان جووتە.

52



53



54 **هزركرنا ڕەخنەگر:** چەند شێوەیێن هاوتا تو دشێی بنڤیسی بۆ $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ؟ سێیان بكێماسی بنڤیسە.

55 **بنڤیسە:** $\sin(-\theta)=-\sin\theta$ و $\cos(-\theta)=\cos\theta$ بكاربینە، دا دەرئەنجامبكەی كو $\tan(-\theta)=-\tan\theta$.

56 کیژ بڕ یی هاوتایە ل گەل بڕێ سێگۆشەی $\tan\theta$ ؟

أ) $\sin\theta$ ب) $\cos\theta$ ج) $\frac{1}{\cos\theta}$ د) $\frac{1}{\cos\theta}\sin\theta$

57 کیژ بڕ نەیێ هاوتایە ل گەل هەرسێ بڕێن دی؟

أ) $\frac{1}{\cos\theta}\frac{1}{\sin\theta}$ ب) $\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{1}{\tan\theta}$ ج) $\frac{\tan\theta}{\sin^2\theta}$ د) $\cos^2\theta\tan\theta$

58 کیژ دەستەواژەیا سێگۆشەی ل خوارێ هاوئەنجام نینە؟

أ) $1+\cos^2\theta=\sin^2\theta$ ب) $\frac{1}{\sin^2\theta}-1=\frac{1}{\tan^2\theta}$ ج) $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ د) $1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$

59 کیژ بڕ یێ هاوتایە ل گەل $1-\frac{1}{\cos^2\theta}$ ؟

أ) $\tan^2\theta$ ب) $-\tan^2\theta$ ج) $\frac{1}{\tan^2\theta}$ د) $-\frac{1}{\tan^2\theta}$

60 **بەرسڤەکا کورت:** ساخبکە کو $\sin\theta+\cos\theta\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\sin\theta}$. بەلگەیەکێ بۆ هەر پێنگاڤەکێ بینە:

بەرهنگاری و بەرفرەهکرن

هەر برەکی ل خوارێ لسەر شێوەیێ کەرتەکێ بتنێ بنڤیسە.

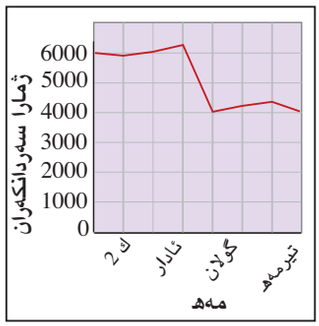
61 $\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}$ **62** $\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ **63** $1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ **64** $\frac{1}{1-\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{1-\cos^2\theta}$

ب سادەترین شێوە بنڤیسە.

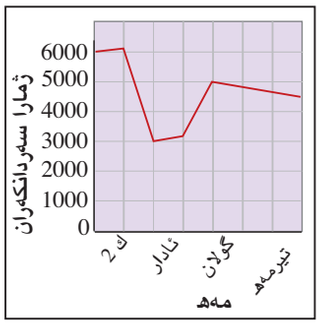
65 $\frac{\frac{1}{\sin^2\theta}-1}{\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}$ **66** $\frac{\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}}$ **67** $\frac{\frac{1}{\sin\theta}-\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$ **68** $\frac{1-\frac{1}{\sin\theta}}{1-\frac{1}{\sin^2\theta}}$

پێداچوونا لوولپێچی

69 **گەشت و گوزار:** ئامارناسەکی هندەك پێدایی لسەر ژمارا وان کەسێن سەردانا گر ئاڤەکێ (دۆرگەهەکێ) کرین ل ماوەیێ (6) مەهان تۆمارکرن. ئەوی وێنەیێ روونکرنێ ئەوێ دەربڕینا هەر بارەکی دکەت دیاربکە:



①



②

أ دەزگەهێ کەش و هەوایی پێشبینیا هەبوونا بای و بارۆڤەیان دکەت ل هەردوو مەهێن ئادار و نیسانێ.

ب بلندبوونا پلەیێن گەرمیێ د وەرزێ هاڤینێدا بوویە ئەگەرێ پەشیمانبوونا زۆربەی گەشتیاران.

هەر ئەگەرەکێ بهەژمێرە [پۆلێن پێشتر]

70 دیاربوونا ژمارە 4 ل هەلدانا بەرکێ زارەکێ. و دیاربوونا (4) کا دی ل هەلدانا بەرکێ زارەکا دی.

71 دیاربوونا شێری دووجاران ل هەلدانا پارچە دراڤەکی کانزای دووجاران.

ل هەر نەخشەیەکا سێگۆشەی، 4 بەهایان بۆ گۆراوێ θ بهەژمێرە، کو نەخشە نەیا پێناسەکری بیت:

72 $y=-\tan\theta$ **73** $y=\frac{1}{\cos(0.5\theta)}$ **74** $y=-\frac{1}{\sin\theta}$

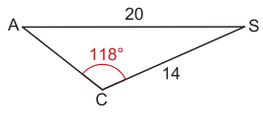
بەشی 7

ئەزموونا نیڤا بەشی

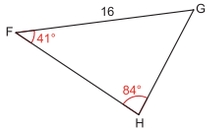
1-7 ڕێسایا Sin و Cos

پێڤانا هەر ئێکی ل خوارێ بهەژمێرە. دریژیان بۆ نێزیکترین دەهئێك و پلەیان بۆ نێزیکترین پلە نێزیکبکە:-

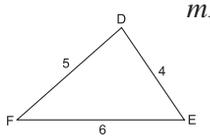
1 $m\hat{A}$



2 GH



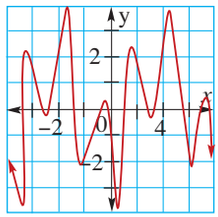
3 $m\hat{F}$



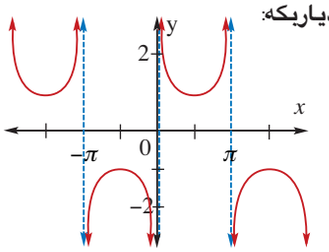
2-7 نەخشەییێن سێگۆشەی:

دیاربکە ئەرێ نەخشەیا دووبارەبوویە یان نە، هەکەر یا دووباربوویی بوو، دەمێ دووبارەبوونێ دیاربکە:

4



5



ویّنەییێن ڕوونکرنێ ییێن نەخشەییێن سێگۆشەیی بنەڕەت بکاربینە بۆ ویّنەکێشانا هەر نەخشەیەکێ، فرەهیێ و دەمێ خوّلێ دیاربکە:

6 $f(x)=\sin 4x$

7 $g(x)=-3\sin x$

8 $h(x)=0.25\sin \pi x$

ویّنەییێن ڕوونکرنێ ییێن نەخشەییێن سێگۆشەی ییێن بنەڕەت بکاربینە بۆ ویّنەکێشانا هەر نەخشەیەکێ. خالیّن ئێکودوو بڕینێن ئاسۆیی و لادانا ڕووی دیاربکە:

9 $f(x)=\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)$

10 $g(x)=\sin\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$

11 $f(x)=\cos\left(x+\frac{5\pi}{4}\right)$

ویّنەییێن ڕوونکرنێ ییێن نەخشەییێن سێگۆشەی ییێن بنەڕەت بکاربینە بۆ ویّنەکێشانا هەر نەخشەیەکێ. خالیّن ئێکودووبڕینێن ئاسۆیی و دەرکناران دیاربکە:

12 $f(x)=\frac{1}{2}\tan 4x$

13 $f(x)=-2\tan\frac{1}{2}x$

14 $f(x)=\tan\frac{1}{2}\pi x$

3-7 هاوئەنجامێن سێگۆشەی ییێن بنەڕەت

ئەڤان هاوئەنجامێن سێگۆشەیی بسەلمینە:

15 $\sin^2\theta\frac{1}{\cos\theta}\frac{1}{\sin\theta}=\tan\theta$

16 $\sin(-\theta)\frac{1}{\cos\theta}\frac{1}{\tan\theta}=-1$

17 $\dfrac{\frac{1}{\tan^2\theta}-1}{\frac{1}{\tan^2\theta}+1}=1-2\sin^2\theta$

هەر بڕەکی بنقیسە پێ ئێك ڕێژا سێگۆشەی.

18 $\frac{1}{\tan\theta}\frac{1}{\cos\theta}$

19 $\frac{1}{\cos(-\theta)}$

20 $\dfrac{\frac{1}{\sin^2\theta}}{\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}}$

4-7

هاوئەنجامێن سەرجەم و جیاوازیێ

Sum and Difference Identities

ئارمانج

- بکارئینانا هاوئەنجامێن سەرجەم و جیاوازیێ بۆ هەژمارتنا بەهایێن بڕێن سێگۆشەی.
- ڕێزکرییێ دەوردانێ و هاوئەنجامێن سەرجەم و جیاوازیێ بکاردئینن بۆ ئەنجام دانا دەوردانێ.

بۆچی ئەم فیری ئەقێ دبین؟

هاوئەنجامێن سەرجەم و جیاوازیێ و لێکدانا ڕێزکرییان بکاردئینن بۆ دیارکرنا شێوەیەکی ب دەوردانێ. نموونەیا (4).

لێکدانا ڕێزکرییان و هاوئەنجامێن سەرجەم و جیاوازیێ، ئامرازن بۆ دیارکرنا پۆتانێن وێنەیێن خالان ب دەوردانێ ل دۆر خالا بنەڕەت دروتەختێ پۆتانیدا.

زاراف
Vocabulary

ڕێزکرییێ دەوردانێ
Rotation Matrix

هاوئەنجامێن سەرجەم و جیاوازیێ

هاوئەنجامێن سەرجەمی	هاوئەنجامێن جیاوازیێ
$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$	$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$
$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$	$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$
$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$	$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$

فێربە و شرۆڤەبکە

نموونە 1

هەژمارتنا بهایێ بڕەکێ سێگۆشەی، بکارئینانا هاوئەنجامێن سەرجەم و جیاوازیێ.

بهایێ دروست بۆ هەر بڕەکی بهەژمێرە:

أ $\sin 75^\circ$

$\sin 75^\circ = \sin(30^\circ+45^\circ)$ — $75^\circ = 30^\circ + 45^\circ$ چونکی ڕێژەییێن سێگۆشەی بۆ هەردوو گۆشەیان 45° و 30° دزانراون.

$=\sin 30^\circ\cos 45^\circ+\cos 30^\circ\sin 45^\circ$ — یاسایا هاوئەنجاما $\sin(A+B)$ بکاربینە ل جهدانانێ بکاربینە.

$=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ — سادە بکە.

ب $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

$\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)$ — بنڤیسە $-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}$

$=\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}$ — هاوئەنجامێ cos جیاوازیێ $\cos(A-B)$ بکاربینە.

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}$ — ل جهی دانە.

$=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ — سادەبکە.

ڕۆناهیەك

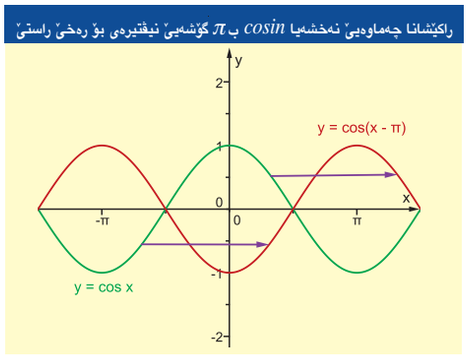
گەلەك ڕێك هەنە بۆ نڤیسینا $-\frac{\pi}{12}$ ؛ بۆ نموونە یان $\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)$ یان $\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)$

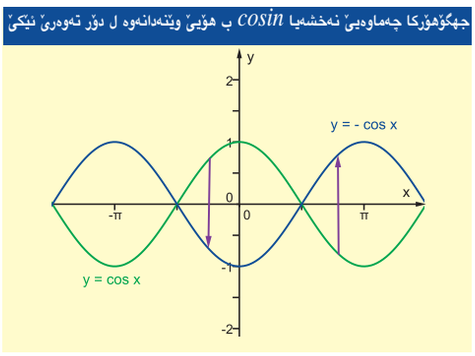
خالا چاڤدێریێ

1. بهایێ دروست بۆ هەر بڕەکی بهەژمێرە.

أ $\tan 150^\circ$ **ب** $\sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right)$

ڕاکێشانا چەماوەیێ نەخشەیا Cosin ب π گۆشەیێ نیڤتیرەی بۆ لایێ ڕاستێ، یا هاوتایە ل گەل وێنەدانەوەیا چەماوەی ل دۆر تەوەرێ ئێکێ:





ئەڤی کاری دنموونەیا (2) دا دێ سەلمینین بکارئینانا هاوئەنجامێن سەرجەم و جیاوازیێ:

نموونـــــە 2

سەلماندنا هاوئەنجامێن سێگۆشەی بکارئینانا هاوئەنجامێن سەرجەم و جیاوازیێ.

بسەلمینە $\cos(x-\pi) = -\cos x$

$\cos(x-\pi) =$ ڕەخێ چەپێ بۆ گۆهۆرینێ هەلبژێرە

$\cos x\cos\pi + \sin x\sin\pi =$ هاوئەنجاما جیاوازیێ $\cos(A-B)$ بکاربینە.

$\cos x(-1) + \sin x(0) =$ ل جهدانانێ بکاربینە

$-\cos x = -\cos x$ سادەبکە

خالا چاڤدێریێ

2. بسەلمینە $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$.

نموونـــــە 3

بکارئینانا سەلمینراوا فیساگۆرس ل گەل هاوئەنجامێن سەرجەم و جیاوازیێ

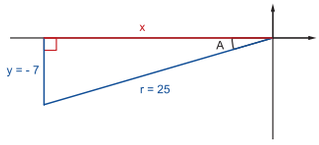
بەهایێ بڕێ $\tan(A+B)$ بهەژمێرە هەکەر $\sin A = -\frac{7}{25}$ و $180^\circ < A < 270^\circ$ و $\cos B = \frac{8}{17}$ و $0^\circ < B < 90^\circ$.

پێنگاڤا (1)ێ: $\tan A$ و $\tan B$ بهەژمێرە.

گۆشەیا ڕاگر و پێناسێن ڕێژەییێن سێگۆشەی $\sin A = \frac{y}{r}$ و $\cos B = \frac{x}{r}$ بکاربینە.

سێگۆشەیەکا گۆشە وەستاو بۆ هەر گۆشەیەکێ د چارێکێ گۆنجای دا بکێشە و x و y و r دیاربکە.

د چارێکا سێیێدا $180^\circ < A < 270^\circ$ $\sin A = -\frac{7}{25}$

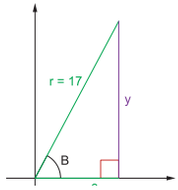


$x^2 + (-7)^2 = 25^2$

$x = -\sqrt{625-49} = -24$

ڤێجا $\tan A = \frac{y}{x} = \frac{7}{24}$

د چارێکا ئێکێدا $0^\circ < B < 90^\circ$ $\cos B = \frac{8}{17}$



$8^2 + y^2 = 17^2$

$y = \sqrt{259-64} = 15$

ڤێجا $\tan B = \frac{y}{x} = \frac{15}{8}$

ل بیرا تە بیت

گۆشەیا ڕاگر بۆ گۆشەیا θ . ئەو گۆشەیا تیژا موجەبە کو لایێ دوماهیێ یێ گۆشەیا θ دگەل تەوەرێ ئێکێ دروست دکەت.

پێنگاڤا (2)ێ: هاوئەنجاما سەرجەمی بکاربینە.

هاوئەنجاما سەرجەمی *tangent*

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

ل جهدانانێ بکاربینە

$$=\frac{\frac{7}{24}+\frac{15}{8}}{1-\frac{7}{24}\frac{15}{8}}$$

سادەبکە

$$\tan(A+B)=\frac{\frac{52}{24}}{1-\frac{35}{64}}=\frac{416}{87}$$

خالا چاڤدێریێ **3.** **بەهایێ بڕێ** $\sin(A-B)$ **بەهەژمێرە هەکەر بزانی** $\sin A=\frac{4}{5}$ **و** $90^\circ<A<180^\circ$ **و** $\cos B=\frac{3}{5}$ **و** $0^\circ<B<90^\circ$.

بۆ دیارکرنا وێنەیێ خالا $P(x,y)$ ب دەوردانێ ب گۆشەیا θ ل دۆر خالا بنەڕەت.
ڕێزکریێ دەوردانێ بکاربینە.

فێربە و بێ بەر بکە

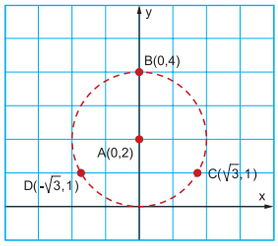
بکارئینانا ڕێزکریێ دەوردانێ

دەوردانا خالا $P(x,y)$ ل دۆر خالا بنەڕەت ب گۆشەیا θ ، ئەوێ خالێ دگوهۆڕیت بۆ خالا $P'(x',y')$ پێ ڤێ هاوکێشێ:

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$$

نموونـــه 4 بکارئینانا ڕێزکریێ دەوردانێ

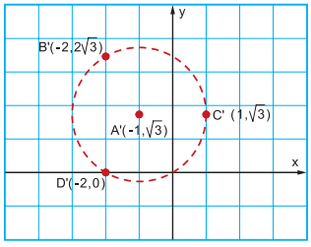
پۆتانێن وێنەیێن خالێن شێوەیێ بەرامبەر دیارکری بەهەژمێرە ب دەوردانێ ب گۆشەیا 30° ل دۆر خالا بنەڕەت.



پێنگاڤا (1)ێ: ڕێزکریێ دەوردانێ R_{30} و ڕێزکریێ خالێن S بنڤیسە.

$$S=\begin{bmatrix}0 & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3}\\ 2 & 4 & 1 & 1\end{bmatrix}\text{ ، }R_{30}=\begin{bmatrix}\cos30^\circ & -\sin30^\circ\\ \sin30^\circ & \cos30^\circ\end{bmatrix}$$

پێنگاڤا (2)ێ: هەردوو ڕێزکرییان لێکبدە.



$$R_{30}\,xS=\begin{bmatrix}\cos30^\circ & -\sin30^\circ\\ \sin30^\circ & \cos30^\circ\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}0 & 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3}\\ 2 & 4 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 1 & -2\\ \sqrt{3} & 2\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0\end{bmatrix}$$

پێنگاڤا (3)ێ: پۆتانێن خالێن وێنەی دێ ب ڤی شێوەی بن: $A'\left(-1,\sqrt{3}\right)$ $B'\left(-2,2\sqrt{3}\right)$
$C'\left(1,\sqrt{3}\right)$ $D'(-2,0)$

خالا چاڤدێریێ **4.** پۆتانێن خالێن وێنەی دیاربکە، هەکەر گۆشەیا دەوردانێ 60° بیت.

هزربکە و گەنگەشیٚ بکە

1. بەحسیٚ 3 ڕێێن جیاواز بکە، کو تو بشێی هاوئەنجامێن جیاوازیٚ تێدا بکاربینی بۆ هەژمارتنا $\sin 15^\circ$.
2. ڕوونبکە خالێن لێکچوون و لێکنەچوونیٚ دناڤبەرا هەردوو هاوئەنجاماندا sin و cos. چەوا نیشانا رادەیان د هاوئەنجاماندا پەیوەندیٚ دیاردکەت کو ئەو هاوئەنجاما سەرجەمێیە یان هاوئەنجاما جیاوازێیە.
3. ڕێکخەربە، هێلکاری دووبارە بنڤیسە پاشی تەمامبکە، بۆ هەر نەخشەیەکیٚ هاوئەنجامێن سەرجەم و جیاوازیٚ ل گەل نموونەیەکیٚ بنڤیسە.

فێربە و ڕێبەرێکە

4–7 ڕاهێنان

ڕاهێنانێن ئاراستەکری

1 د پێناسا دەوردانیٚ دا، دڤێت چەقیٚ وێ بێتە دیارکرن. چەقیٚ دەوردانیٚ ئەو خالەیە کو دەوردان ل دۆر وێ دهێتە ئەنجام دان، و هەروەسا گۆشا دەوردانیٚ و ئاراستەییٚ دەوردانیٚ. ل دەمیٚ بکارئینانا ڕێزکرییٚ دەوردانیٚ، چەقیٚ دەوردانیٚ پێدڤی چییە؟ و ئاراستەییٚ دەوردانیٚ پێدڤی چییە؟

بەریٚ خوٚبدە نموونە 1

بهایێ هەر بڕەکی ب دروستی بهەژمێرە.

2 $\cos 105^\circ$ 3 $\sin \frac{11\pi}{12}$ 4 $\tan \frac{\pi}{12}$ 5 $\cos(-75^\circ)$

بەریٚ خوٚبدە نموونە 2

بهایێ هەر بڕەکی ب دروستی بنڤیسە:

6 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$ 7 $\tan(\pi+x)=\tan x$ 8 $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\sin x$

بەریٚ خوٚبدە نموونە 3

بهایێ هەر بڕەکی بهەژمێرە، هەکەر بزانی $\sin A=\frac{-12}{13}$ و $180^\circ<A<270^\circ$ و $\cos B=-\frac{4}{5}$ و $90^\circ<B<180^\circ$

9 $\sin(A+B)$ 10 $\cos(A-B)$ 11 $\tan(A+B)$ 12 $\tan(A-B)$

بەریٚ خوٚبدە نموونە 4

13 پوٚتانێن خالێن سەرێن وێنەییٚ سێگوٚشا ABC بهەژمێرە، هەکەر $A(0,2)$ ، $B(0,-1)$ ، $C(3,0)$ بن، ب دەوردانەکیٚ گوٚشا وێ 120° بیت ل دوٚر خالا بنەڕەت، بەرسڤا خوٚ بوٚ نێزیکترین بەش ژ سەدیٚ نێزیکبکە.

ڕاهێنان و شیکارکرنا پرسیاران

بەهایێ هەر بڕەکی ب دروستی بهەژمێرە:-

14 $\sin \frac{7\pi}{12}$ 15 $\tan 165^\circ$ 16 $\sin 195^\circ$ 17 $\cos \frac{11\pi}{12}$

هاوئەنجامان بسەلمینە.

18 $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\sin x$ 19 $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\cos x$ 20 $\tan(x-2\pi)=\tan x$

ڕاهێنانێن نازاد

بوٚ شیکارکرنا پرسیاران	بەریٚ خوٚ بدە نموونە
17–14	1
20–18	2
24–21	3
25	4

بهایێ هەر بڕەکی بنڤیسە، هەکەر بزانی $\cos A=-\frac{12}{13}$ و $90^\circ<A<180^\circ$ و $\sin B=-\frac{4}{5}$ و $270^\circ<B<360^\circ$

21 $\sin(A+B)$ **22** $\tan(A-B)$ **23** $\cos(A+B)$ **24** $\cos(A-B)$

25 پۆتانێن وێنەییێن خالێن سەرێن سێگۆشەیا ABC بهەژمێرە، هەکەر $A(0,2)$ ، $B(1,2)$ ، $C(0,1)$ بن، ب دەوردانەکێ گۆشەیا وێ 45° و چەقێ وێ خالا بنەڕەت بیت، بەرسڤا خۆ بۆ نێزیکترین بەش ژ سەدی نێزیکبکە.

بهایێ هەر بڕەکی ب دروستی بهەژمێرە.

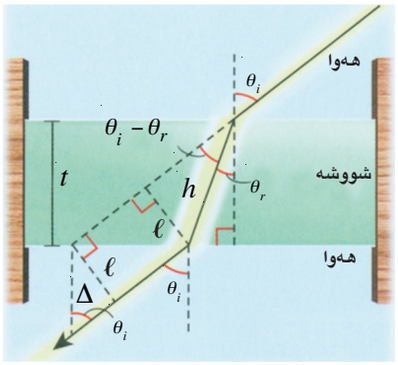
26 $\sin 165^\circ$ **27** $\tan(-105^\circ)$ **28** $\sin(-15^\circ)$ **29** $\cos 195^\circ$ **30** $\cos\frac{19\pi}{12}$

31 $\tan\frac{5\pi}{12}$ **32** $\sin 255^\circ$ **33** $\tan 195^\circ$ **34** $\cos\frac{\pi}{12}$

بهایێ θ بهەژمێرە، هەکەر بزانی $0^\circ\le\theta\le180^\circ$

35 $\cos(\theta-30^\circ)=\frac{1}{2}$ **36** $\cos(\theta+20^\circ)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ **37** $\sin(180^\circ-\theta)=\frac{1}{2}$

38 **فیزیا:** تیشکا رۆناهیێ ب گۆشەیا θ_i دشووشەیی رادبۆریت، و ب هەمان گۆشە ژ شووشەی دەردکەڤیت. لێ خالا دەرکەفتنا تیشکا رۆناهیێ ژ شووشەی ب دوورییەکا ئاسۆیی ب بڕی $\Delta=\left(\frac{\sin(\theta_i-\theta_r)}{\sin\theta_i\cos\theta_r}\right)t$ ژ خالا چۆنا ژۆرا شووشەی یا دوورە، وەکو دیار ل وێنەییێ بەرامبەر.



أ بکارئینانا هاوئەنجامێن سێگۆشەی بڕێ Δ بتنێ پێ tan بهەژمێرە.

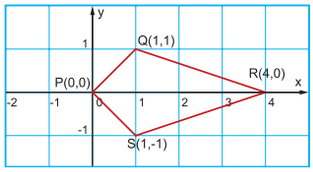
ب وێنەییێ بەرامبەر بکاربینە بۆ نڤیسینا $\sin(\theta_i-\theta_r)$ پێ h و ℓ

پێنگاڤێن جۆراوجۆر: بهایێ هەر بڕەکی $\tan(A+B)$ و $\cos(A+B)$ و $\sin(A-B)$ ل هەر بارەکی بهەژمێرە.

39 $\sin A=-\frac{7}{25}$ و $180^\circ<A<270^\circ$ ؛ $\cos B=\frac{12}{13}$ و $0^\circ<B<90^\circ$

40 $\sin A=-\frac{1}{3}$ و $270^\circ<A<360^\circ$ ؛ $\sin B=\frac{4}{5}$ و $0^\circ<B<90^\circ$

41 بۆ دروستکرنا دروشمەکێ نوو، چەند جاران جهگوهۆڕکێ لسەر چار لایێ $PQRS$ هاتە ئەنجامدان.



أ رێزکرییێن دەوردانێ ل دۆر خالا بنەڕەت بنڤیسە، هەکەر گۆشەییێن دەوردانێ 90° ، 180° ، 270° بن ئێك ل دویف ئێکێ.

ب وان رێزکرییێن دەوردانێ بکاربینە بۆ دیارکرنا پۆتانێن وێنەییێ چارلایی ل هەموو دەوردانان.

ج د ئێك ڕووتەختێ پۆتانی دا، وێنەییێ چار لایی ب هەر سێ دەوردانان بکێشە.

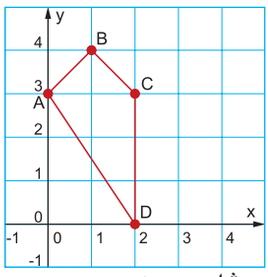
42 **هزرکرنا ڕەخنەگر:** ئەرێ تو دشێی بهایێ $\sin\frac{11\pi}{24}$ ب دروستی بهەژمێری بکارئینانا هاوئەنجامێن سەرجەم یان جیاوازیێ؟ ڕوونبکە.

43 نەخشەیا $y(t)=4.2\sin\left(\frac{2\pi}{3}t-\frac{\pi}{2}\right)$ دهێتە بکارئینان بۆ هەژمارتنا ڕاکێشانا سپرینگەکی ل ژێر کارتێکرنا تەنەکێ پێڤە هلاویستی پێ دەمی د چرکەکێدا.

أ فرەهی و دەمێ خۆلا نەخشەییێ بهەژمێرە.

ب هاوئەنجاما سێگۆشەی بکاربینە بۆ نڤیسینا وێ نەخشەییێ پێ Cos بتنێ.

ج ڕاکێشانا (قەکێشانا) وێ پشتی 8 چرکان چەندە؟



ئەندازە: پۆتانێن وێنەیێن خالێن سەرێن چوار لایێ $ABCD$ بەهەژمێرە، هەکەر $A(0,3)$ ، $B(1,4)$ ، $C(2,3)$ ، $D(2,0)$ بن ب دەوردانێ ب گۆشەیا θ ل دۆر خالا بنەڕەت. بەرسڤان بۆ نێزیکترین بەش ژ سەدی نێزیکبکە:

44 $\theta = 45°$ **45** $\theta = 60°$ **46** $\theta = 120°$ **47** $\theta = -30°$

48 **بنڤیسە:** ئەرێ $\sin(A+B) = \sin A + \sin B$ ؟ نموونەیەکێ بۆ پالپشتیا بەرسڤا خو بینە.

ئامادەکرن بۆ ئەزموونێ

49 کیژ ئەڤانێن ل خوارێ دبیتە بهایێ بڕێ سێگۆشەی $\cos 15° \cos 45° - \sin 15° \sin 45°$ ؟

أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ج) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ د) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

50 کیژ ئەڤێن ل خوارێ دبیتە بهایێ x ؟ هەکەر $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \frac{1}{2}$.

أ) $\frac{\pi}{6}$ ب) $\frac{\pi}{4}$ ج) $\frac{\pi}{3}$ د) $\frac{\pi}{2}$

51 بهایێ $\cos(A-B)$ بەهەژمێرە، هەکەر $\sin A = \frac{1}{2}$ ، $0° < A < 90°$ و $\cos B = \frac{3}{5}$ ، $0° < B < 90°$

أ) $\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$ ب) $\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$ ج) $\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$ د) $\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$

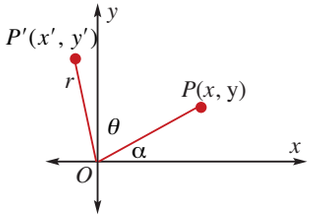
52 **بەرسڤەکا کورت:** بهایێ $\sin(-15°)$ ب دروستی بەهەژمێرە پێنگاڤێن خۆ دیاربکە.

بەرهنگاری و بەرفرەهکرن

53 ساخبکە کو هەلگەڕاوێ ڕێزکریێ دەوردانێ ب گۆشەیا θ دبیتە ڕێزکریێ دەوردانێ ب گۆشەیا $-\theta$.

54 سەلمێنراوا $\tan$ ی سەرجەمێ دوو گۆشەیان $\tan(A+B)$ بسەلمینە.

55 ڕۆنبکە چەوا ڕێزکریێ دەوردانێ بدەست تە دکەڤێت، بکارئینانا هاوئەنجامێن سەرجەمێ $\sin$ و $\cos$. ل بیرا خو بینە ل پۆلا دەهێ تو دشیایی هەر خالەکێ وەک $P(x, y)$ لسەر شێوێ $P(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ بکارئینا با گۆشەیا ڕاگر بنڤیسی.



ئەوێ گۆشەیا دەوردانێ ل دۆر خالا بنەڕەت بەهەژمێرە ئەوا سێگۆشەیا ABC دگوهۆریت بۆ سێگۆشەیا $A'B'C'$ هەکەر $A(1,0)$ ، $B(0,2)$ ، $C(-1,0)$ بن.

56 $A'(0,1)$ ، $B'(-2,0)$ ، $C'(0,-1)$

57 $A'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ، $B'(-\sqrt{2}, 2)$ ، $C'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

58 $A'(-1,0)$ ، $B'(0,-2)$ ، $C'(1,0)$

59 $A'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ، $B'(-1,\sqrt{3})$ ، $C'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

پێداچوونا لوولپێچی

دابەش بکە، وەسا دانە هەموو بڕە دپێناسەکرینە (پۆلێن پێشتر)

60 $\frac{3x^2}{7y^3} \div \frac{6x}{21y}$

61 $\frac{x^2+x-2}{x^2-2x-8} \div \frac{x^2+3x+2}{x^2-3x-4}$

62 $\frac{9x^3y^2}{15xy^4} \div \frac{6x^4y}{3x^2y^5}$

بکارئینانا ئێک ڕێژەیا سێگۆشەی هەر بڕەکی بنڤیسە. (وانەیا 3-7)

63 $\frac{\frac{1}{\tan\theta} \times \frac{1}{\cos\theta}}{\sin\theta \quad \cos\theta}$

64 $\frac{1 \quad \tan\theta}{\tan\theta \sin\theta}$

65 $\cos\theta \sin\theta \tan\theta$

5–7

هاوئەنجامێن دووجاریيا گۆشەیێ و نیڤ جاریيا گۆشەیێ

Double-Angle and Half-Angle Identities

ئارمانج

- هاوئەنجامێن دووجاریيا گۆشەیێ و نیڤ جاریيا گۆشەیێ بکاردئینن بۆ هەژمارتنا بهایێن برین سێگۆشەی و نڤیسینا وان ب سادەترین شێوە.

بۆچی ئەم فێڕی ئەڤێ دبین؟

تو دشێی هاوئەنجاما دوو جاریيا گۆشەیێ بکاربینی بۆ هەژمارتنا دووریيا ئاسۆیی یا هاڤێژەرەکێ (قذیفة)، وەکو تەپا یاریيا گۆلفێ (پرسیارا 94).

تو دشێی هاوئەنجامێن سەرجەمی بکاربینی بۆ دەستکەفتنا هاوئەنجامێن دووجاریيا گۆشەیێ بۆ نموونە:

$$\sin 2\theta = \sin(\theta+\theta)$$
$$= \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta$$
$$= 2\sin\theta\cos\theta$$

تو دشێی هاوئەنجامێن $\cos 2\theta$ و $\tan 2\theta$ ب ڕێیا پێشتر بهەژمێری. هاوئەنجاما $\cos 2\theta$ سێ شێوە هەنە، تو دشێی وان هەر سێ شێوەیان دیاربکەی بکارئینانا هاوئەنجاما سەرجەمێ cos و هاوئەنجاما بنەڕەت $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. یا بەربەلاڤە، کو برێن سێگۆشەیی پێ θ دهێنە نڤیسین.

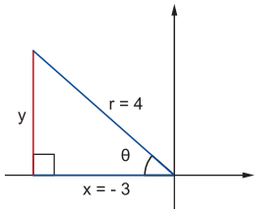
هاوئەنجامێن دووجاریيا گۆشەیێ		
$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$	$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$	$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

فێربە و بڕێبکە

نموونە 1

هەژمارتنا بهایێ برەکی سێگۆشەی بکارئینانا هاوئەنجامێن دووجاریيا گۆشەیێ

بەهایێ دروست بۆ $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ بهەژمێرە، هەکەر بزانی $\cos\theta = -\frac{3}{4}$ $90° < \theta < 180°$.



پێنگاڤا (1)ێ: $\sin\theta$ بهەژمێرە، ژبۆ هەژمارتنا بهایێ $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

ڕێیا ئێکێ: گۆشەیا ڕاگر بکاربینە.

د چارێکا دووێ دا $90° < \theta < 180°$ $\cos\theta = -\frac{3}{4}$

سەلمێنراوا فیساگۆرس $(-3)^2 + y^2 = 4^2$

y بهەژمێرە، و ڕەگێ موجەب وەربگرە. $y = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

ڕێیا دووێ: شیکاربکە

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

ل جهدانانێ بکاربیە، ڕەگێ دووجای وەربگرە، و سادەبکە.

$$\sin\theta = \sqrt{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2}$$
$$= \sqrt{1-\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$
$$\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

ئاگاهداریە!

نیشانێن x و y دیاردبن ل دویڤ چارێکی لایێ دوماهیێ گۆشەیا θ دکەفتێ.

چارێك	sin	cos
ئێکێ	+	+
دووێ	+	−
سێیێ	−	−
چارێ	−	+

پێنگاڤا (2)ی: بهایێ $\sin 2\theta$ بهەژمێرە

هاوئەنجاما sin2θ دووجارییا گۆشەیێ $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

ل جهـ دانێ بکاربینە $\sin 2\theta = 2\frac{\sqrt{7}}{4}\left(-\frac{3}{4}\right)$

سادەبکە $= -\frac{3\sqrt{7}}{8}$

پێنگاڤا (3)ی: بهایێ $\cos 2\theta$ بهەژمێرە.

هاوئەنجاما cos2θ دووجارییا گۆشەیێ $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$\cos 2\theta = 2\left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = \frac{1}{8}$

خالا چاڤدێریێ

1. بهایێ دروست بۆ $\tan 2\theta$ و $\cos 2\theta$ بهەژمێرە، هەکەر بزانی: $\cos\theta = \frac{1}{3}$ $270° < \theta < 360°$

تو دشێی هاوئەنجامێن دووجارییا گۆشەیێ بکاربینی بۆ سەلماندنا هاوئەنجامێن سێگۆشەی.

نموونـــــه 2 سەلماندنا هاوئەنجامێن سێگۆشەی بکارئینانا هاوئەنجامێن دووجارییا گۆشەیێ

هاوئەنجامێ بسەلمینە

أ $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$

لایێ ڕاستێ وەربگرە. $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$

هاوئەنجاما cos2θ بکاربینە $= \frac{1}{2}(1-(1-2\sin^2\theta))$

سادەبکە $= \frac{1}{2}(2\sin^2\theta)$

$\sin^2\theta = \sin^2\theta$

ب $(\cos\theta + \sin\theta)^2 = 1 + \sin 2\theta$

لایێ چەپێ وەربگرە $\cos^2\theta + \sin^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta =$

دووجاییا تمام ڤەکە $(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + (2\cos\theta\sin\theta) =$

خرڤەکە $1 + \sin 2\theta$

هاوئەنجاما sin2θ و هاوئەنجاما فیساگۆرس بکاربینە $1 + \sin 2\theta = 1 + \sin 2\theta$

ڕۆناهیەك

لایەکی وەربگرە بۆ گۆرانکاریێ نەك هەردوو لایان وەربگرە.

خالا چاڤدێریێ

2. هاوئەنجامێ بسەلمینە:

أ $\cos^4\theta - \sin^4\theta = \cos 2\theta$ ب $\sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

تو دشێی هاوئەنجاما $\cos 2\theta$ بکاربینی بۆ دیارکرنا هاوئەنجامێن نیڤا گۆشەیێ بکارئینا $\frac{\theta}{2}$ ل شوینا θ.

تە ل نموونەیا 2 سەلماندن کو: $\sin^2\theta = \frac{1-\cos^2\theta}{2}$ هەروەسا تو دشێی $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ بکاربینی بۆ سەلماندنا $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$ ، هەکەر $\frac{\theta}{2}$ لجهـ θ دانی، هاوئەنجامێن نیڤا گۆشەی دێ بدەست تە کەڤن.

هاوئەنجامێن نیڤا گۆشەیێ

$\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$	$\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$	$\tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

نیشانێن وان دهێنە دیارکرن ل دویڤ جهێ لایێ دوماهیا گوشا $\frac{\theta}{2}$ د بارێ پیڤانەی دا.

فێربە و بێ‌بەر بکە

هاوئەنجامێن نیڤا گوشەیێ هاریکاریێ دکەن بۆ هەژمارتنا بهایێ هەر بڕەکی ب دروستی.

نموونـــــە 3 هاوئەنجامێن نیڤا گوشەیێ بکاردئینن بۆ هەژمارتنا بهایێن بڕین سێگۆشەی.

هاوئەنجامێن نیڤا گۆشەیێ بکاربینە بۆ هەژمارتنا هەر بڕەکی ب دروستی.

أ $\cos 165°$

$\cos\frac{330°}{2}$ — یا سالبە

$-\sqrt{\frac{1+\cos 330°}{2}}$ — چونکی $165°$ دچارێکا دووێ دایە

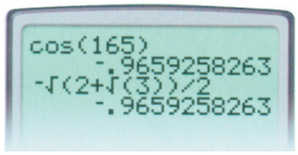
$-\sqrt{\frac{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2}}$ — سادەبکە

$-\sqrt{\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}$

$\cos 330°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

بکارئینانا بژمێرا زانستی ساخبکە



ب $\sin\frac{\pi}{8}$

$\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

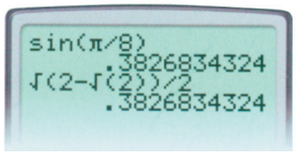
$+\sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}}$ — یا موجەبە چونکی $\frac{\pi}{4}$ دچارێکا ئێکێ دایە

$\sqrt{\frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2}}$ — $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}$

$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

بکارئینانا بژمێرا زانستی ساخبکە



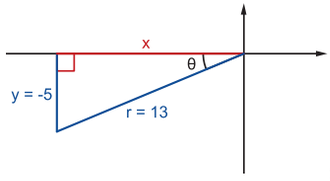
خالا چاڤدێریێ

3. هاوئەنجامێن نیڤا گۆشەیێ بکاربینە بۆ هەژمارتنا بهایێ هەر بڕەکی ب دروستی:

أ $\tan 75°$ **ب** $\cos\frac{5\pi}{8}$

نموونـــــە 4 بکارئینانا سەلمینراوا فیساگۆرس و هاوئەنجامێن نیڤا گۆشەیێ.

بهایێ $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\tan\frac{\theta}{2}$ بهەژمێرە هەکەر بزانی $\sin\theta=-\frac{5}{13}$ $90°<\theta<270°$



پێنگاڤا (1)ێ: $\cos\theta$ بهەژمێرە دا تو بشێی هاوئەنجامێن نیڤا گۆشەیێ بکاربینی، گۆشەیا ڕاگر بکاربینە ل چارێکا سێیێ:

$\sin\theta=-\frac{5}{13}$ $180°<\theta<270°$

$x^2+(-5)^2=13^2$ — سەلمێنراوا فیساگۆرس

$x=-\sqrt{169-25}=-12$ — بەهایێ x بهەژمێرە.

ڤێجا $\cos\theta=-\frac{12}{13}$

پێنگاڤا (2)ێ: بەهایێ $\sin\frac{\theta}{2}$ بهەژمێرە.

$$\sin\frac{\theta}{2}$$

$$+\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$ $\sin\frac{\theta}{2}$ یا موجەبە چونکی $90<\theta<135$

ل جهێ دانێ بکاربینە

$$\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{12}{13}\right)}{2}}$$ سادەبکە

$$\sqrt{\left(\frac{25}{13}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\sqrt{\frac{25}{26}}=\frac{5\sqrt{26}}{26}$$

پێنگاڤا (3)ێ: بهایێ $\tan\frac{\theta}{2}$ بهەژمێرە:

$$\tan\frac{\theta}{2}$$

$$-\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$ $\tan\frac{\theta}{2}$ یا سالبە چونکی $90<\theta<135$

لجهدانانێ بکاربینە

سادەبکە

$$-\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{12}{13}\right)}{1+\left(-\frac{12}{13}\right)}}$$

$$-\sqrt{\left(\frac{25}{13}\right)\left(\frac{13}{1}\right)}$$

$$-\sqrt{25}$$

$$-5$$

ئاگەهداریە!

هشیاربە ل دیارکرنا $\sin\frac{\theta}{2}$، $\cos\frac{\theta}{2}$ هەکەر $180^\circ<\theta<270^\circ$ دێ $90^\circ<\frac{\theta}{2}<135^\circ$

خالا چاڤدێریێ

4. بهایێ $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\cos\frac{\theta}{2}$ بهەژمێرە، هەکەر بزانی $\tan\theta=\frac{4}{3}$ $0^\circ<\theta<90^\circ$

هزریکە و گەنگەشێ بکە

1. رۆنبکە: کیژ هاوئەنجامێن دووجاریا گۆشەێ بکاردهێت بۆ سادەکرنا $\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$

2. بەحسبکە: چەوا نیشانا $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\cos\frac{\theta}{2}$ دیاردکەی؟

3. رێکخەربە: هێلکارێ ل خوارێ دووبارە بنقیسە، پاشی تەمامبکە. د هەر چارچووڤەکێدا هاوئەنجامەکێ بنقیسە.

فێربە

هاوئەنجامێن COS بۆ دووجاریا گۆشەیێ

5-7 ڕاهێنان

ڕاهێنانێن ئاراستەکری

بەرێ خۆبدە نموونە 1

بهایێ **sin2θ** و **cos2θ** و **tan2θ** بهەژمێرە.

1. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ ؛ $\cos\theta=-\frac{5}{13}$
2. $0^\circ<\theta<90^\circ$ ؛ $\sin\theta=\frac{4}{5}$

بەرێ خۆبدە نموونە 2

هەر هاوئەنجامەکێ بسەلمینە:

3. $2\cos 2\theta=4\cos^2\theta-2$
4. $\sin^2\theta=1-\frac{\cos 2\theta+1}{2}$
5. $\frac{1+\cos 2\theta}{\sin 2\theta}=\frac{1}{\tan\theta}$
6. $\sin 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

بەرێ خۆبدە نموونە 3

بکارئینانا هاوئەنجامێن نیڤا گۆشەیێ، بهایێ هەر بڕەکی بهەژمێرە.

7. $\cos 67.5^\circ$
8. $\cos\frac{\pi}{12}$
9. $\tan\frac{3\pi}{8}$
10. $\sin 112.5^\circ$

بەرێ خۆبدە نموونە 4

بهایێ **sin** $\frac{\theta}{2}$ و **cos** $\frac{\theta}{2}$ و **tan** $\frac{\theta}{2}$ بهەژمێرە.

11. $180^\circ<\theta<270^\circ$ ؛ $\sin\theta=-\frac{24}{25}$
12. $270^\circ<\theta<360^\circ$ ؛ $\cos\theta=\frac{1}{4}$

ڕاهێنان و شیکارکرنا پرسیاران

بهایێ **sin2θ** و **cos2θ** و **tan2θ** بهەژمێرە.

13. $90^\circ<\theta<180^\circ$ ؛ $\cos\theta=-\frac{7}{25}$
14. $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ ؛ $\tan\theta=\frac{20}{21}$

هەر هاوئەنجامەکێ بسەلمینە.

15. $\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}=2\cos\theta$
16. $\cos^2\theta=\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$
17. $\tan\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$
18. $\tan\theta=\frac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}$

بکارئینانا هاوئەنجامێن نیڤا گۆشەیێ، بهایێ هەر بڕەکی بهەژمێرە.

19. $\sin\theta\frac{7\pi}{12}$
20. $\cos\frac{5\pi}{12}$
21. $\sin 22.5^\circ$
22. $\tan 15^\circ$

بهایێ **sin** $\frac{\theta}{2}$ و **cos** $\frac{\theta}{2}$ و **tan** $\frac{\theta}{2}$ بهەژمێرە:

23. $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$ ؛ $\tan\theta=-\frac{12}{35}$
24. $180^\circ<\theta<270^\circ$ ؛ $\sin\theta=-\frac{3}{5}$

پێنگاڤێن جۆراوجۆر: هەر بڕەکی ب سادەترین شێوە بنڤیسە: ڕێژەیێن سێگۆشەی بۆ گۆشەیا **θ** ل جهێ چەند جارانی **θ** بکاربینە:-

25. $\sin 3\theta$
26. $\sin 4\theta$
27. $\cos 3\theta$
28. $\cos 4\theta$
29. $\cos 2\theta+2\sin^2\theta$
30. $\cos 2\theta+1$
31. $\tan 2\theta\left(2-\frac{1}{\cos^2\theta}\right)$
32. $\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$
33. $\frac{\cos\theta\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}$
34. $\frac{\cos 2\theta-1}{\sin^2\theta}$

ڕاهێنانێن نازاد

بۆ شیکارکرنا پرسیاران	بەرێ خۆ بدە نموونە
14-13	1
18-15	2
22-19	3
24-23	4

35 نەخشەیا $y(t)=3.1\sin 2t$ سامپلەکە بۆ پیڤانا ڤەکێشانا سپرینگەکی بکاردهێت ل ژێر کارتێکرنا تەنەکی پیڤە هلاویستی پێ دەمی ب چرکان.

أ ئەوێ نەخشەێ پێ ڕێژەییێن سێگۆشەی بۆ t ل شوینا $2t$ بنڤیسە بکارئینانا هاوئەنجامێن دوو جاریا گۆشەیێ.

ب نەخشەیا $w(t)=3.8\cos t$ سامپلەکە بۆ پیڤانا ڤەکێشانا سپرینکەکی بکاردهێت، ل ژێر کارتێکرنا تەنەکی پیڤە هلاویستی. هەر سپرینگەکی تەنەك پیڤە هلاویستن دئێك دەمی دا $t=0$ دێ کەنگی ڤەکێشانا هەردوو سپرینگان یەکسان بن ل جارا ئێکێ؟

ج د ئەوی دەمی دا ڤەکێشانا سپرینگی چەندە؟

پێنگاڤێن جوڕا و جوڕ: بهایێن $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ و $\tan 2\theta$ و $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\cos\frac{\theta}{2}$ و $\tan\frac{\theta}{2}$ بهەژمێرە.

36 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ ؛ $\cos\theta=-\frac{3}{8}$

37 $180^\circ<\theta<270^\circ$ ؛ $\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$

38 $0^\circ<\theta<90^\circ$ ؛ $\sin\theta=\frac{2}{5}$

39 $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$ ؛ $\tan\theta=-\frac{1}{2}$

بکارئینانا هاوئەنجامێن نیڤا گۆشەیێ بهایێ دروست بۆ هەر بڕەکی بهەژمێرە:

40 $\cos\frac{7\pi}{8}$

41 $\sin\frac{11\pi}{12}$

42 $\cos 105^\circ$

43 $\sin(-15^\circ)$

44 $\cos(1035^\circ)$

هاوئەنجامێن ل خوارێ بسەلمینە:

45 $\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{\sin^2\theta}{2(1-\cos\theta)}$

46 $\cos 2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

47 $\frac{\tan\theta+\sin\theta}{2\tan\theta}=\cos^2\frac{\theta}{2}$

48 **بژمێرا ڕوونکرنێ:** وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ $y=\frac{\cos x(1-\cos 2x)}{\sin 2x}$ بکێشە بۆ دیارکرنا هاوئەنجامەکا سێگۆشەی. ئەوێ هاوئەنجامێ ب جبرێ بسەلمینە.

49 **پێنگاڤێن جوڕاوجوڕ:** تەپەکا گوللفێ ب لەزەکا بنەڕەت v_0 پێ/ چرکە هاتە هاڤێتن. پێ بەرزە گۆشەیا θ نەخشەیا $d(\theta)=\frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{16}$ دهێتە بکارئینان بۆ هەژمارتنا دوورییا ئاسۆی ئەوا تەپە دبڕیت.

أ نەخشەیا پێشتر بکارئینانا ڕێژەییێن سێگۆشەی بۆ گۆشەیا 2θ بنڤیسە.

ب ئەوێ دوورییا ئاسۆیی بهەژمێرە ئەوا تەپە دبڕت ل دەمێ لەزا بنەڕەت 80 پێ/ چرکە بیت و بەرزە گۆشە: 15° ، 30° ، 45° ، 60° ، 75° .

ج هەکەر لەزا بنەڕەت یا نەگۆربیت، کیژ گۆشە مەزنترین دوورییا ئاسۆیی دیار دکەت؟

د **دێ چ بیت هەکەر...؟** لەزا بنەڕەت 80 پێ/چرکە بیت. دیاربکە کیژ گۆشە ژ هەردوو گۆشەیان دڤێت ببیتە بەرزە گۆشە دا دووریا ئاسۆیی دبڕیت نە کێمتر بیت ژ 175 پێیان؟

50 **هزرکرنا ڕەخنەگر:** چەوا بهایێ دروست یێ $\sin 7.5^\circ$ دهەژمێری؟

51 **بنڤیسە:** چەوا دزانی ل کیژ دەمی هاوئەنجامێن دووجاریا گۆشەی و هاوئەنجامێن نیڤا گۆشەی بکاردئینی؟

52 بهایێ $\sin 2\theta$ چەندە؟ هەکەر $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $90^\circ<\theta<180^\circ$؟

أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ج) 1 د) -1

53 بهایێ $\cos 2\theta$ چەندە؟ هەکەر $\cos\theta=\sin\theta$ ؟

أ) 0 ب) 1 ج) $2\sin^2\theta$ د) $2\cos^2\theta$

54 بهایێ $\sin\frac{\theta}{2}$ چەندە هەکەر بزانی $\cos\theta=-\frac{12}{13}$ و $90^\circ<\theta<180^\circ$

أ) $\frac{\sqrt{26}}{26}$ ب) $-\frac{\sqrt{26}}{26}$ ج) $\frac{5\sqrt{26}}{26}$ د) $-\frac{5\sqrt{26}}{26}$

55 بهایێ دروست یێ $\sin 157.5^\circ$ چەندە؟

أ) $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ب) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ج) $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ د) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

56 **بەرسڤەکا کورت:** بسەلمینە کو: $\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\cos\theta-\sin\theta$ پاسادان بکە $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.

بەرهنگاری و بەرفرەهکرن

57 $\tan 2\theta$ بهەژمێرە بکارئینانا $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$.

58 $\tan\frac{\theta}{2}$ بهەژمێرە بکارئینانا $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\cos\frac{\theta}{2}$.

هاوئەنجاما نیڤا گۆشەیێ بکاربینە بۆ هەژمارتنا بهایێ دروست یێ هەر بڕەکی:

59 $\tan 7.5^\circ$ **60** $\tan\frac{\pi}{16}$ **61** $\sin\frac{\pi}{24}$ **62** $\cos 11.25^\circ$

63 **بنڤیسە:** بهایێن θ ئەوێن هاوکێشەیا $\sin 2\theta=2\sin\theta$ ساخدکەن بهەژمێرە. ل جارا ئێکێ ب وێنەیێ ڕوونکرنێ بەهایێن θ بهەژمێرە، پاشی ب شیکارکرنا هاوکێشێ.

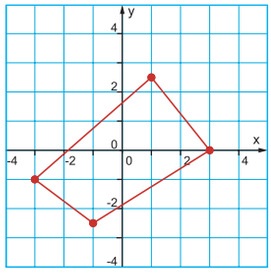
64 هاوئەنجامێن سەرجەم و جیاوازیێ بکاربینە بۆ دەرئەنجامکرنا ڤان هەردوو هاوئەنجامان:

$\sin A\sin B=\frac{1}{2}\left[\cos(A-B)-\cos(A+B)\right]$ و $\cos A\cos B=\frac{1}{2}\left[\cos(A+B)+\cos(A-B)\right]$

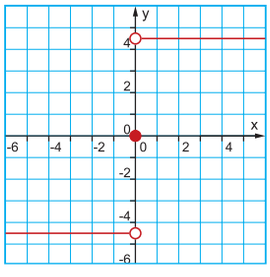
پێداچوونا لوولپێچی

تاقیکرنا ڕاستەهێلی ستوونی بکاربینە، بۆ دیارکرنا ئەوێ ئێکێ، ئەرێ پەیوەندی نەخشەیە یان نە. (پوّلێن پێشتر)

65



66



کۆمبکە یان دەربکە. وان بهایێن x دیاربکە ئەوێن وەسا دکەن بهایێ نەخشەیێ نەیێ پێناسەکری بیت. (پوّلێن پێشتر)

67 $\frac{3x-2}{x+7}+\frac{2x+14}{x+7}$ **68** $\frac{4x-1}{x}+\frac{6x-2}{2x}$ **69** $\frac{7x+4}{x+1}-\frac{5x+8}{x-3}$ **70** $\frac{x+9}{x^2}-\frac{x}{x+2}$

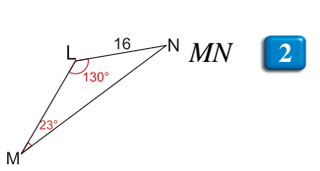
بهایێ دروست بۆ هەر بڕەکی بهەژمێرە. (وانەیا 4-7)

71 $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ **72** $\sin 105^\circ$ **73** $\cos\frac{7\pi}{12}$ **74** $\cos 255^\circ$

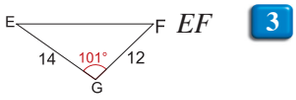
بەشی 7

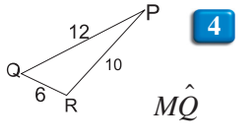
ڕێبەرێ خواندنێ: پێداچوون

پیڤانێ هەر ئێکێ بهەژمێرە، دریژیێ بۆ نێزیکترین دەهئێك، و پیڤانا گۆشێ بۆ نێزیکترین پلە نێزیکبکە:

1 

2

3 

4 

چەماوەیێن نەخشەیێن سێگۆشەی یێن بنەڕەت بکاربینە بۆ وێنەکێشانا چەماوەیێ نەخشەیێن ل خوارێ، فرەهیێ و دەمێ خۆلێ دیاربکە:

5 $f(x)=\cos 3x$

6 $g(x)=\cos\frac{1}{2}x$

7 $f(x)=-\frac{1}{3}\sin 3x$

8 $f(x)=2\sin \pi x$

9 $h(x)=\frac{1}{2}\cos 2x$

10 $g(x)=\frac{\pi}{2}\sin \pi x$

چەماوەیێن نەخشەیێن سێگۆشەی یێن بنەڕەت بکاربینە بۆ وێنەکێشانا چەماوەیێ نەخشەیێن ل خوارێ، خالێن ئێکودووبڕینێن ئاسۆیی و لادانا ڕوویی دیاربکە:

11 $f(x)=\cos(x+\pi)$

12 $g(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

13 $h(x)=\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)$

14 $f(x)=\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$

زێندەزانی: ل کردارا ڕۆژانە پێکهاتن (التركيب الضوئي)، ڕووەك دووەم ئۆکسیدێ کاربۆنێ CO_2 و ئاقێ بۆ شەکر و ئۆکسجینێ دگۆهۆرن. ل سەر قێ کردارێ لێکولین دهێنە ئەنجام دان، ب پیڤانا وی بڕێ کاربۆنێ C ئەوێ ڕووەك هەلدمژت ب (مایکرۆمۆل)(Micromole) د ئێك مەترێ دووجای دا د چرکەکێدا. نەخشەیا $C(t)=1.2\sin\frac{\pi}{12}(t-6)+7$ سامپلەکی دنوێنت بۆ پیڤانا قی بڕێ کاربۆنێ C پێ دەمێ t ب دەمژمێران.

15 چەماوەیێ نەخشەیێ وێنەبکە د ماوەێ دوو خۆلان دا.

16 دەمێ خۆلێ بۆ قی نەخشەی چەندە؟

17 مەزنترین بهایێ قێ نەخشەێ چەندە؟ و کەنگی ڕووددەت؟

چەماوەیێن نەخشەیێن سێگۆشەی یێن بنەڕەت بکاربینە بۆ وێنەکێشانا نەخشەیێن ل خوارێ. خالێن ئێکودوو بڕینێن ئاسۆیی و دەرکناران دیاربکە.

18 $f(x)=\frac{1}{4}\tan x$

19 $f(x)=\tan \pi x$

20 $f(x)=\tan\frac{1}{2}\pi x$

هاوئەنجامێن سێگۆشەی بسەلمینە:-

21 $\frac{1}{\cos\theta}\sin\theta\frac{1}{\tan\theta}=1$

22 $\frac{\sin^2(-\theta)}{\tan\theta}=\sin\theta\cos\theta$

23 $\left(\frac{1}{\cos\theta}+1\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)=\tan^2\theta$

24 $1+\cos^2\theta\frac{1}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}$

25 $\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}$

26 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}$

27 $\sin^2\theta\tan\theta=\tan\theta-\sin\theta\cos\theta$

28 $\frac{\tan\theta}{1-\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos\theta}\frac{1}{\sin\theta}$

بکارئینانا ئێك نەخشەیا سێگۆشەی هەر بڕەکی بنقێسە:

29 $\frac{1}{\tan\theta}\frac{1}{\cos\theta}$

30 $\frac{1}{\cos\theta}\sin\theta\tan\theta$

31 $\tan(-\theta)\sin(-\theta)\cos(-\theta)$

32 $\dfrac{\cos\theta\frac{1}{\tan\theta}}{\frac{1}{\sin^2\theta}-1}$

بهایێ دروست بۆ هەر بڕەکی بهەژمێرە:

33 $\sin\frac{19\pi}{12}$

34 $\cos165^\circ$

35 $\cos15^\circ$

36 $\tan\frac{\pi}{12}$

بهایێ هەر بڕەکی ل خوارێ بهەژمێرە، هەکەر بزانی:
$\tan A=\frac{3}{4}\ 0^\circ<A<90^\circ$ ، $\tan B=-\frac{5}{12}\ 90^\circ<B<180^\circ$

37 $\sin(A+B)$

38 $\cos(A+B)$

39 $\tan(A-B)$

40 $\tan(A+B)$

41 $\sin(A-B)$

42 $\cos(A-B)$

پۆتانێن سەرێن وێنەیێ چارلایێ $ABCD$ بهەژمێرە، هەکەر $A(0,0)$ ، $B(3,0)$ ، $C(4,2)$ ، $D(1,2)$ بن ب دەوردانەکێ چەقێ وێ خالا بنەڕەت بیت و گۆشەیا دەوردانێ θ بیت. بەرسڤا خۆ بۆ نێزیکترین بەش ژ سەدی نێزیکبکە.

43 $\theta=30^\circ$

44 $\theta=45^\circ$

45 $\theta=60^\circ$

46 $\theta=90^\circ$

پۆتانێن سەرێن وێنەیێ چارلایێ $ABCD$ بهەژمێرە، هەکەر $A(0,0)$ ، $B(5,2)$ ، $C(0,4)$ ، $D(-5,2)$ بن ب دەوردانەکێ چەقێ وێ خالا بنەڕەت بیت و گۆشەیا دەوردانێ گۆشەیا θ بیت. بەرسڤا خو بۆ نێزیکترین بەش ژ سەدی نێزیکبکە:-

47 $\theta=120^\circ$

48 $\theta=180^\circ$

49 $\theta=240^\circ$

50 $\theta=270^\circ$

بهایێ هەر بڕەکی بهەژمێرە هەکەر بزانی: $0^\circ<\theta<90^\circ$
$\tan\theta=\frac{3}{4}$

51 $\sin2\theta$

52 $\cos2\theta$

53 $\tan\frac{\theta}{2}$

54 $\sin\frac{\theta}{2}$

بهایێ هەر بڕەکی بهەژمێرە هەکەر بزانی: $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$ و $\cos\theta=\frac{3}{4}$.

55 $\tan2\theta$

56 $\cos2\theta$

57 $\cos\frac{\theta}{2}$

58 $\sin\frac{\theta}{2}$

هاوئەنجامێن نیڤا گۆشەیێ بکاربینە بۆ هەژمارتنا بهایێ دروستێ هەر بڕەکی ل خوارێ:

59 $\sin\frac{\pi}{12}$

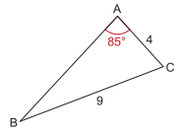
60 $\cos75^\circ$

بەشی 7

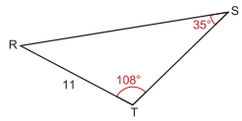
ئەزموونا بەشی

هەر پیڤانەکێ بەهەژمێرە، دریژیێ بۆ نێزیکترین دەهئێك و پیڤانا گۆشەیێ بۆ نێزیکترین پلە نێزیکبکە:

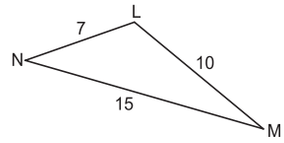
1 $m\hat{B}$



2 RS



3 $m\hat{M}$



4 چەماوەیێ نەخشەیا $f(x)=\cos x$ بکاربینە بۆ وێنەکێشانا چەماوەیێ نەخشەیا $g(x)=\frac{1}{2}\cos 2x$ فرەهیێ و دەمێ خۆلی دیاربکە.

5 چەماوەیێ نەخشەیا $f(x)=\sin x$ بکاربینە بۆ وێنەکێشانا چەماوەیێ نەخشەیا $g(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$، خالێن ئێکودووبڕینێن ئاسۆیی و لادانا رووبی دیاربکە.

6 چەماوەیێ نەخشەیا $f(x)=\tan x$ بکاربینە بۆ وێنەکێشانا: $g(x)=2\tan \pi x$ ، دەمێ خۆلێ و ئێکودووبڕینێن ئاسۆیی و دەرکناران دیاربکە.

7 ڤێ هاوئەنجامێ بسەلمینە $\frac{1}{\tan\theta}=\cos^2\theta\,\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{1}{\cos\theta}$

هەر بڕەکی بنڤیسە بکارئینانا ئێك ڕێژا سێگۆشەیی.

8 $\left(\frac{1}{\cos\theta}+1\right)\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)$

9 $\frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)}$

بهایێ هەر بڕەکی بهەژمێرە هەکەر بزانی: $0^\circ<A<90^\circ$ $\tan A=\frac{3}{4}$ و $180^\circ<B<270^\circ$ $\tan B=\frac{12}{13}$

10 $\sin(A+B)$

11 $\cos(A-B)$

12 پۆتانێن سەرێن وێنەیێ چارلایێ $ABCD$ بهەژمێرە، هەکەر: $A(0,1)$ ، $B(2,1)$ ، $C(3,3)$ ، $D(-1,3)$ بن، و گۆشەیا دەوردانێ 30° بیت. بەرسڤا خۆ بۆ نێزیکترین بەش ژ سەدی نێزیکبکە.

بهایێ هەر بڕەکی بهەژمێرە، هەکەر بزانی: $90^\circ<\theta<180^\circ$ و $\tan\theta=-\frac{12}{5}$

13 $\sin 2\theta$

14 $\cos 2\theta$

15 $\cos\frac{\theta}{2}$

16 هاوئەنجاما نیڤا گۆشەیێ بکاربینە بۆ هەژمارتنا بهایێ دروستێ بڕێ $\sin\frac{3\pi}{8}$.

بەشی 7

ئەزموونا کەلۆکی

1 بهایێ دروست بۆ $\tan 15^\circ$ چەندە؟

أ) $\frac{\sqrt{6-\sqrt{2}}}{4}$ ج) $\frac{\sqrt{6+\sqrt{2}}}{4}$

ب) $2+\sqrt{3}$ د) $2-\sqrt{3}$

2 دەرکنارێن نەخشەیا $y=\frac{1}{3\tan 2x}$ دیاربکە؟

أ) $2\pi n$

ب) $\frac{\pi n}{2}$

ج) $3\pi n$

د) $\frac{\pi n}{3}$

3 دەمێ خولێ بۆ نەخشەیا $y=5\cos\frac{1}{3}x$ چەندە؟

أ) $\frac{2\pi}{5}$

ب) $\frac{5}{3}$

ج) $\frac{2\pi}{3}$

د) 6π

4 فلیمەك ژ (14) دیمەنێن دانوستاندنێ و (10) دیمەنێن ئەکشن (لڤینێ) پێکدهێت. و هیچ تشتەکی دی بخۆڤە ناگرت. ب شێوەیەکی هەرەمەکی دیمەنەك هاتە هەلبژارتن. ئەگەر چەندە ئەو دیمەنە. یێ ئەکشن بیت؟

أ) $\frac{5}{12}$

ب) $\frac{7}{12}$

ج) $\frac{5}{7}$

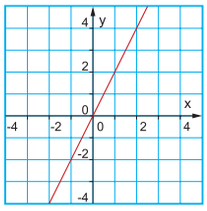
د) $\frac{7}{5}$

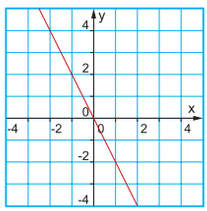
5 بهایێ نەخشەیا $f(x)=3x^3+4x^2+7x+10$ چەندە، هەکەر $x=-2$.

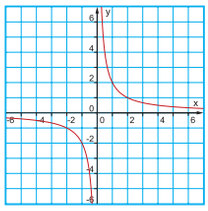
أ) -44 ج) -12

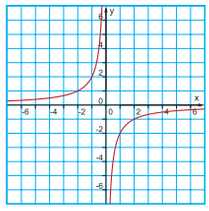
ب) 0 د) 36

6 کیژ ڤانێن ل خوارێ چەماوەیێ نەخشەیا بەرۆڤاژی دنوێنیت هەکەر: $y=2$ و $x=-1$ ؟

أ)


ج)


ب)


د)


7 هاوئەنجامێن نیڤا گۆشەیێ بکاربینە بۆ هەژمارتنا بهایێ دروستێ $\cos 157.50^\circ$.

أ) $-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

ب) $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

ج) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

د) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

8 پۆتانێ سەرێ چەماوەیێ نەخشەیا؟ $f(x)=x^2+6x-4$ دیاربکە.

أ) $(0,-4)$

ب) $(-3,-13)$

ج) $(-3,5)$

د) $(3,5)$

9 $ABCDE$ پێنچلایەکی کۆمدا $\hat{A}\cong\hat{B}\cong\hat{C}$ ، $\hat{D}\cong\hat{E}$ ، $m\hat{A}=m\hat{D}$ ، $m\hat{C}$ چەندە؟

أ) 67.5° ج) 154.3°

ب) 135° د) 225°

10 کیژ ئەڤانێن ل خوارێ نە یەکسانە بۆ $\sin 60^\circ$

أ $\cos 30^\circ$

ب $\frac{\sqrt{3}}{2}$

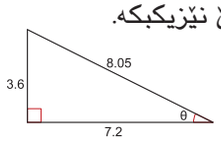
ج $\frac{\tan 30^\circ}{\sin 30^\circ}$

د $(\cos 60^\circ)(\tan 60^\circ)$

بەرسڤەکا کورت

11 بهایێ x چەندە، هەکەر: $5\sqrt{2x-7}+4=9$

12 بهایێ $\cos\theta$ بهەژمێرە، بەرسڤا خۆ بۆ نێزیکترین بەش ژ هزارێ نێزیکبکە.



13 سەرجەمێ ڤێ زنجیرا ژمارەی بهەژمێرە: $\sum_{k=1}^{14}(3k-5)$

14 د هەردوو سێگۆشەیاندا ABC، DEF، $\hat{A}\cong\hat{F}$ و $\hat{B}\cong\hat{D}$ هەکەر $EF=4.5$ و $DF=3$ و $AC=1.5$ دڤێت درێژیا $\overline{AB}$ چەند بیت هەتا هەردوو سێگۆشە هاوشێوەبن.

بەرسڤەکا کورت

15 یانەیا شەترنجێ ل ئامادەیا سلێمانیێ 12 ئەندام هەنە، دڤێت ڕێڤەبەرێ ئامادەییێ 2 ئەندامان هەلبژێرت بۆ بەشداریێ ل قارەمانیا شەترانجێ ل عیراقێ.

أ ب چەند ڕێیان ڕێڤەبەر دشێت دوو یاریزانان هەلبژێرت؟

ب ڕۆنبکە بۆچی تە ئەو ڕێیە بۆ شیکارکرنا پرسیارێ هەلبژارت؟

16 ئێك ل دویڤ ئیکا... 2, 12, 36, 108, 324, بکاربینە:

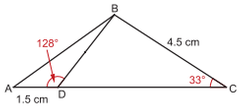
أ پێناسەیەکا ئاشکەرا بۆ ڕادێ n بنڤیسە.

ب ڕادێ دەهێ بهەژمێرە.

17 وێنەیی بکاربینە بۆ هەژمارتنا هەر پیڤانەکێ. بەرسڤێ بۆ نێزیکترین دەهئێك ژ cm نێزیکبکە.

ج دریژیا $\overline{DC}$

د دریژیا $\overline{AB}$



بەرسڤا دریژ

18 خشتەیێ ل خوارێ، نمرەییێن قوتابییێن پۆلا یازدێ ل بابەتێ بیرکاریێ دیار دکەت.

90	85	72	86	94	96
85	95	94	68	71	85
93	98	84	83	80	89

ئەڤێن ل خوارێ بهەژمێرە:

أ ناڤەندێ ژمارەی.

ب ناڤەڕاست.

ج باو.

د لێکنەچوون.

هـ لادانێ پیڤانەی.

و مەودا.