١١

حکومەتا هەرێما کوردستانێ
وەزارەتا پەروەردێ - رێڤەبەریا گشتی یا پرۆگرام و چاپەمەنیان

بیرکاری بۆ هەمووان

پەرتووکا قوتابی
پۆلا یازدێ ویژەیی

چاپا چارێ
٢٧١٦ کوردی ٢٠١٦ زایینی ١٤٣٧مشەختی

هەڵسەنگاندنا زانستی
الياس حيدر الياس

وەرگێران و گونجاندن
شكرى حسن سلو
عصام الدين عبيد عمر
مشير الياس عبدالله

پێداچوونا چاپكرنێ
شكرى حسن سلو

پێداچوونا زمانی
طه ياسين طه

سەرپەرشتێ هونەری یێ چاپێ
عثمان پيرداود كواز
سعد محمد شريف صالح

ناڤەرۆکا پەرتووکێ

بەشێ 1 ئامار و ئەگەر 1 Statistics And Probability

1 پیڤەرێن رووکرنا چەقی
Measures of Central Tendency 2
2 پیڤەرێن پرتبوونێ Measures of Dispersion 10
3 یاسایێن ئەگەرێ Laws of Probability 15
4 تەکنیکێن هەژمارتنی Counting Techniques 32

بەشێ 2 نەخشە 31 Functions

1 نەخشە Functions 32
2 نەخشەیێن هێلی Linear Functions 40
3 شێوەیێن جیاواز یێن راستەهێلی
Various forms of the equation of a line 46
4 تەریببوونا راستەهێلان و ستوونبوونا وان
Parallel and Perpendicular Lines 52
5 نەخشەیێن دووجای Quadratic Functions 57

بەشێ 3 سیستەمێن هاوکێشەیێن هێلی 65 Systems Of Linear Equations

1 شیکارکرنا سیستەمێ هێلی ب لجهدانانێ
Solving Linear Systems by Substitution 66
2 شیکارکرنا سیستەمێ هێلی ب لادانێ
Solving Linear Systems by Elimination 72
3 شیکارکرنا سیستەمێ هێلی ب وێنەیێن روونکرنێ
Solving Linear Systems Graphically 77

ناڤەرۆکا پەرتووکێ

بەشێ 4 سیستەمێن لاسەنگەییێن هێلی
Systems of Linear Inequalities 83

1 لاسەنگەییێن هێلی ب نەهاتیە زانینەکی ب (ئێك نەزانراوی)
Linear Inequalities in one unknown 84

2 لاسەنگەییێن هێلی ب دوو نەهاتیە زانینان ب (دوو نەزانراوان)
Linear inqualities in two unknowns 90

3 سیستەمێن لاسەنگەییێن هێلی
System of Linear Inequalities 98

بەشێ 5 ریزکری
103 Matrices

1 ریزکری Matrices 104

2 سنووردار و ریسایا گرامەر
Determinants and Cramer's Rule 112

بەشێ 6 جوداکاری
119 Differential

1 داتاشاراوی ئێکێ 1 Derivative 120

2 داتاشراوی دووێ 2 Derivative 120

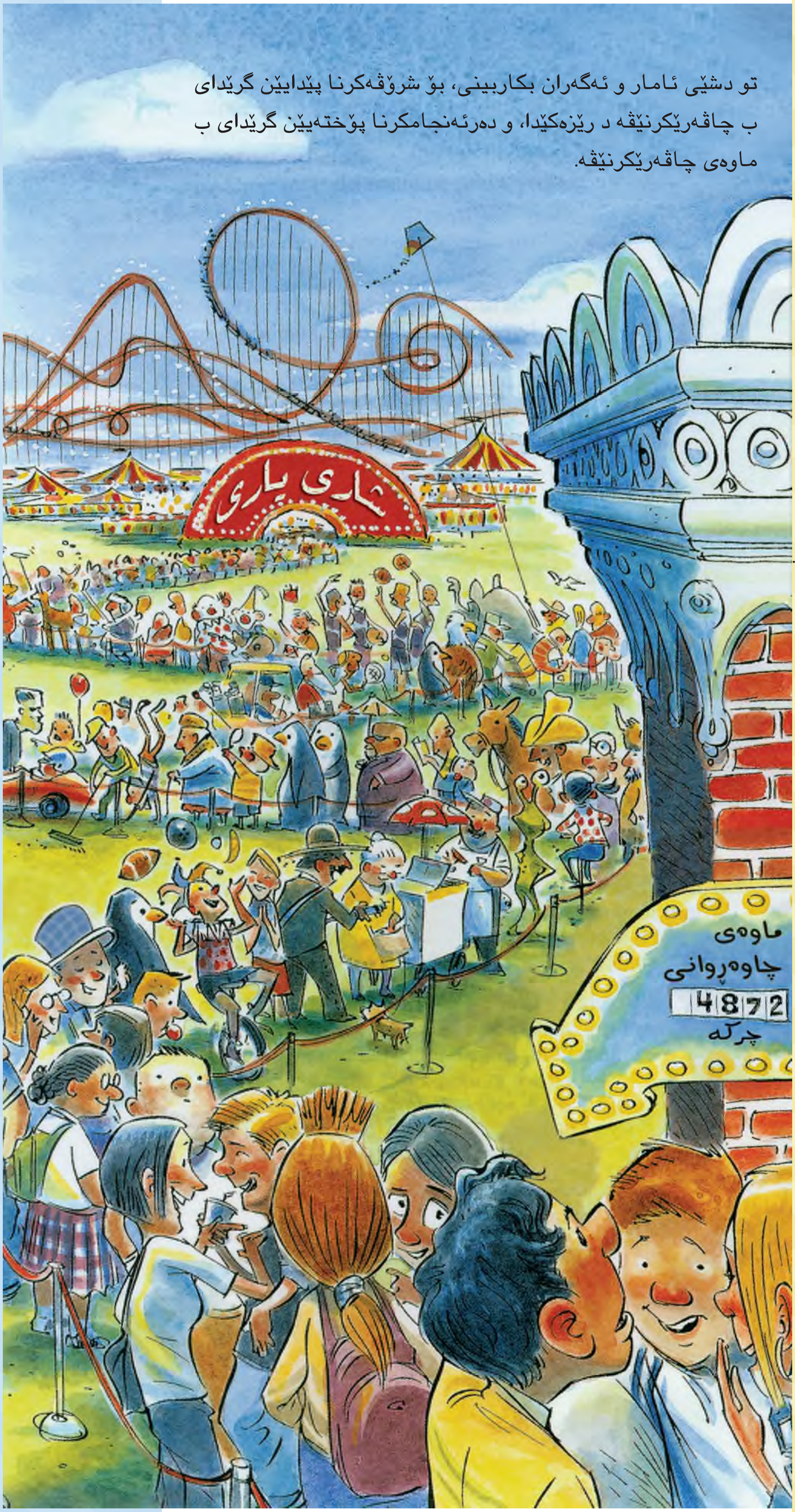
3 بجهئینانێن داتاشراوی Applications of Derivative 132

بەشێ 1

ئامار و ئەگەر

Statistics and Probability

تو دشێی ئامار و ئەگەران بکاربینی، بۆ شرۆڤەکرنا پێداییێن گرێدای ب چاڤەرێکرنێڤە د رێزەکێدا، و دەرئەنجامکرنا پۆختەیێن گرێدای ب ماوەی چاڤەرێکرنێڤە.



وانە

1. پیڤەرێن رووکرنا چەقی.
2. پێڤەرێن پرتبوونێ.
3. رێسایێن ئەگەرێ
4. تەکنیکیا هەژمارتنێ.

تو دشێی ئامار و ئەگەران بکاربینی، بۆ شرۆڤەکرنا پێداییێن گرێدای ب چاڤەرێکرنێڤە د رێزەکێدا، و دەرئەنجامکرنا پۆختەیێن گرێدای ب ماوەی چاڤەرێکرنێڤە.

دەمێ خەملاندی بۆ چاڤەرێکرنێ

کو ژڤێ خالێ دەست پێدکەت ئەو ژی 4872 چرکەیە.

وانه **1**

پیڤەرێن رووکرنا چەقی
Measures of central Tendency

بۆچی؟

ئامار زانا پیڤەرێن رووکرنا چەقی بکاردئینن بۆ شرۆڤەکرنا پێداێن دئێتە پەیداکرن ل بوارێ زانستێ و ئابووری و کۆمەلەناسی و کارگێریێ.

بەری نۆکە تو فێربووی کا چەوا ناڤەند و ناڤەندار و (ناڤەراست) و مود (باو) بۆ کومەلەکا پێداییان بهەژمێری. ئەو پیڤەرێن ئامارێنە هاریکاریا وەسفکرنا ڤێ کۆمەلێ دکەن. لدووڤ رووکرنا چەقی.

ل بیرا تە بیت کو:

- ناڤەندێ ژمارەی [تێکرا] **Mean** پیڤەرەکە کۆمەلەکا پێداییان وەسفدکەت. هەر وەکی تو دبێژی ناڤەندێ نمرێن قوتابییێن پۆلا یازدێ ل بیرکاریی 70%، ئەڤە دیاردکەت کو نمرەیێن وان قوتابیان یێن باش بوون. بکورتی [بۆ هەژمارتنا ناڤەندی، پێداییێن کومەلێ کومبکە، و ئەڤی سەرجەمی دابەش بکە لسەر ژمارا پێداییان].
- ناڤەندار **Median** پیڤەرەکە دەربرینێ ژ چەقێ کۆمەلەکا پێداییان دکەت. پشتی رێزکرنا وان بەرەف ژۆر یان بەرەف ژێر. وەکی تو دبێژی ناڤەندارێ نمرەیێن قوتابییێن پۆلا یازدێ ل بیرکاری 65% . رامانا وێ ئەوە ئەڤ نمرە پێداییان دابەشدکەت بۆ دوو نیڤان پشتی رێزکرنا وان بەرەڤ ژۆر یان بەرەڤ ژێر. [بۆ هەژمارکرنا ناڤەنداری، دڤێت پێداییان بەرەڤ ژۆر یان بەرەڤ ژێر رێزبکەی و بەرێ خو بدەیە پێدایێ دکەڤیتە دنیڤەکا واندە، ئەگەر ژمارا پێداییان کت بیت، ئێك ناڤەندار هەیە دنیڤەکێدا. لێ ئەگەر ژمارا پێداییان یا جووت بیت دوو پێدای دکەڤنە دنیڤەکێدا، ناڤەندێ ڤان هەردووان دبیتە ناڤەندارێ کومەلا پداییان].
- مۆد [باو] **Mode** پیڤەرەکە وان بهایێن پتر دووبارە دبن د کۆمەلەکێدا دیار دکەت. بۆ دیارکرنا (مۆد) خشتەیەکی دووبارەبوونێ بۆ کو مەلەکا پێداییان دروستبکە. ئەو خشتە ژ دوو رێزان پێکدهێت، رێزا ئێکێ ژ پێداییێن کۆمەلێ بێی دووبارکرن پێکدهێت ورێزا دووی پێکدهێت ژ ژمارا دووبارەبوونا هەر پێدایەکی و ل ژێرەێ وی یا دانابیە. [مۆد دبیتە ئەو پێدایێ پتر دووبارەبووی]
- هەر کۆمەلەکا پێداییان بتنێ ئێك ناڤەند هەیە، و بتنێ ئێك ناڤەندار هەیە، و چێدبیت پتر ژ مۆدەکێ هەبیت یان چ مۆد نەبن.

ئارمانج

- هەژمارتنا پیڤەرێن رووکرنا چەقی بۆ کومەلەکا پێداییان.

زاراڤ
Vocabulary

دووبارەبوونا کەلۆکی یا بەرەڤ ژۆر.
Increasing cumulative frequency

دووبارەبوونا کەلۆکی یا بەرەڤ ژێر.
Decreasing Cumulative frequency

ناڤەند [تێکرا]
Mean

ناڤەندار [ناڤەراست]
Median

مۆد [باو]
Mode

نموونە 1 **هەژمارتنا پیڤەرێن رووکرنا چەقی**

ناڤەند و ناڤەندار و مۆد بۆ ڤێ کۆمەلا پێداییان بهەژمێرە. $\{8,2,3,4,2,5,3,4,5,2,3,4\}$

شیکار: ناڤەند: $\bar{x} = \frac{8+2+3+4+2+5+3+4+5+2+3+4}{12} = \frac{15}{4} = 3.75$

ناڤەندار: دەستپێبکە ب رێزکرنا پێداییان بەرەڤ زۆر 2,2,2,3,3,[3,4],4,4,5,5,8 ، ژمارا پێداییان جووتە. هەردوو پێداییێن دکەڤنە دنیڤەکێدا دبنە 4 ، 3 ناڤەندێ هەردووان بهەژمێرە. و ئەڤ ناڤەندە دبیتە $\frac{3+4}{2} = 3.5$ ڤێجا ناڤەنداری کومەلێ دبیتە 3.5 .

مۆد: خشتێ دووبارەبوونێ بۆ پێداییێن کۆمەلێ چێبکە.

بها	2	3	4	5	8
دووبارەبوون	3	3	3	2	1

کۆمەلی سێ مۆد هەنە 2 و 3 و 4 .

بزاڤێ بکە **ناڤەند و ناڤەندار و مۆد بۆ هەر کۆمەلەکا پێداییان بینەدەر.**

أ $\{6,9,3,8\}$

ب $\{2,5,6,2,6\}$

دەمێ پێداییێن ئامارەی یێن خرڤەکری د چەشناندا شرۆڤەدکەی، گەلەک جاران تە پێدڤی ب رێزکرنا وان هەیە بەرەڤ زۆر یان بەرەڤ ژێر و دەستنیشانکرنا بەشە کۆمەلێن وان. ئامار زانا بۆ ڤێ مەبەستێ خشتێ دووبارەبوونا کەلۆکی یێ بەرەڤ زۆر یان خشتێ دووبارەبوونا کەلۆکی یێ بەرەڤ ژێر بکاردئینن. خشتێ دووبارەبوونا کەلۆکی یێ بەرەڤ زۆر: ئەڤ خشتە ژ 3 ستوونان پێکدهێت، ستوونا ئێکێ چەشنێن رێزکری بەرەڤ زۆر بخۆڤە دگرت، و ستوونا دووێ دووبارەبوونێن بەرامبەر هەر چەشنەکێ بخۆڤە دگرت. و ستوونا سێیێ سەرجەمێ دووبارەبوونا ڤێ چەشنێ و دووبارەبوونێن چەشنێن بەری وێ بخۆڤە دگرت.

خشتێ دووبارەبوونا کەلۆکی یێ بەرەڤ ژێر: سێ ستوونان بخۆڤەدگرت، ستوونا ئێکێ چەشنێن رێزکری بەرەڤ زۆر بخۆڤە دگرت. و یێ دووێ دووبارەبوونێن بەرامبەر هەر چەشنەکێ بخۆڤەدگرت، و ستوونا سێیێ جیاوازیا لناڤبەرا سەرجەمێ دووبارەبوونان و سەرجەمێ دووبارەبوونێن وان چەشنێن بەرێ وێ بخۆ ڤەدگرت.

نموونە 2 **دروستکرنا خشتەیێن دووبارەبوونا کەلۆکی.**

خشتێ ل خوارێ بەلاڤکرنا ئەندامێن وانەیەکا شەترەنجێ ل پارێزگەهەکێ ل دووڤ ژیێن وان دیاردکەت. خشتێ دووبارەبوونا کەلۆکی یێ بەرەڤ زۆر و خشتێ دووبارەبوونا کەلۆکی یێ بەرەڤ ژێر دروستبکە.

چەشن ژیێ	[10,12[	[12,14[	[14,16[	[16,18[	[18,20[	[20,22[
دووبارەبوون	30	40	50	60	40	20

أ خشتێ دووبارەبوونا کەلۆکی یێ بەرەڤ زۆر

چەشن	دووبارە بوون	دووبارەبوونا کەلۆکی یا بەرەڤ زۆر
[10,12[	30	30
[12,14[	40	70
[14,16[	50	120
[16,18[	60	180
[18,20[	40	220
[20,22[	20	240

ب خشتێ دووبارەبوونا کەلۆکی یێ بەرەڤ ژێر

چەشن	دووبارە بوون	دووبارەبوونا کەلۆکی یا بەرەڤ ژێر
[10,12[	30	240
[12,14[	40	210
[14,16[	50	170
[16,18[	60	120
[18,20[	40	60
[20,22[	20	20

خشتێ دووبارەبوونا کەلۆکی یێ بەرەڤ ژۆر هاریکاریێ بۆ بەرسڤدانا ڤان پرسیاران دکەت وەکی: ژمارا ئەندامێن ژیێن وان کێمتر ژ 20 سالان چەندە؟ و خشتێ دووبارەبوونا کەلۆکی یێ بەرەڤ ژێر هاریکاریێ دکەت بۆ بەرسڤدانا ڤان پرسیاران وەکی: ژمارا وان ئەندامێن ژێی هەر ئێکی ژ وان نە کێمتر ژ 20 سالان چەندە؟ و نڤیسینا ڤان هەردوو خشتەیان لسەر شێوەیێ ل خوارێ هاریکاریێ بۆ بەرسڤدانا ڤان جۆرێن پرسیاران دکەت.

چەشن	دووبارە بوون	دووبارەبوونا کەلۆکی یا بەرەڤ ژور
کێمتر ژ 12	30	30
کێمتر ژ 14	40	70
کێمتر ژ 16	50	120
کێمتر ژ 18	60	180
کێمتر ژ 20	40	220
کێمتر ژ22	20	240

چەشن	دووبارە بوون	دووبارەبوونا کەلۆکی یا بەرەڤ ژێر
10یان پتر	30	240
12یان پتر	40	210
14یان پتر	50	170
16یان پتر	60	120
18یان پتر	40	60
20 یان پتر	20	20

بزاڤێ بکە

خشتێ دووبارەبوونا کەلۆکی یێ بەرەڤ ژۆر و خشتێ دووبارەبوونا کەلۆکی یێ بەرەڤ ژێر بۆ پێداییێن خرڤەکری، د چەشناندا هەر وەکی دیارکری ل خشتەیێ ل خوارێ دروستبکە:

چەشن	[30,40[	[40,50[	[50,60[	[60,70[	[70,80[
دووبارەبوون	5	10	15	12	8

بۆ هەژمارتنا ناڤەندێ کۆمەلەکا پێداییێن خرڤەکرین د چەشناندا، سێ ستوونان دروستبکە، ستوونا ئێکێ چەقێن چەشنان بخۆڤە بگرت، و ستوونا دووێ دووبارەبوونا هەر چەشنەکێ بخۆڤە بگرت، و ستوونا سێێ ئەنجامێ لێکدانا چەقێ هەر چەشنەکێ دگەل دووبارەبوونا وێ بخۆ ڤە بگرت، پاشی ناڤەندی بهەژمێرە ب دابەشککرنا سەرجەمێ بهایێن ستوونا سێێ لسەر سەرجەمێ دووبارەبوونان.

ئەو چەشن یان ئەو چەشنێن پتر دووبارەبوون هەبن دبێژنێ چەشنە مۆد.

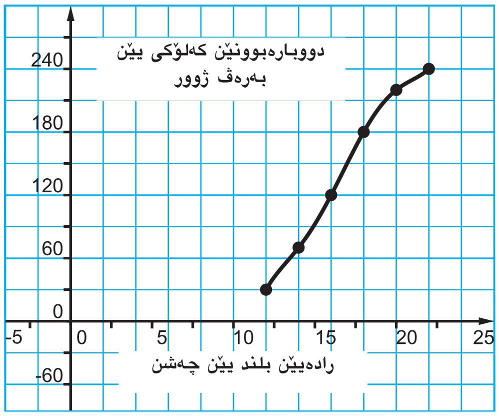
لێ هەژمارتنا ناڤەنداریێ پێداییێن چەشندار کارەکێ ب ساناهی نینە، دێ ل ڤێ وانێ فێربی کا چەوا ب وێنەیێ روونکرنێ و ب جەبرێ دێ هێتە دیتن، بۆ ڤەدیتنا ناڤەندی ب وێنەیێ روونکرنێ، خشتێ دووبارەبوونا کەلۆکی یێ بەرەڤ ژۆر ب وێنەیەکی روونکرنێ بنوێنە، دبێژنێ چەماویێ کەلۆکی یێ بەرەڤ ژور، و خشتێ دووبارەبوونا کەلۆکی یێ بەرەڤ ژێر ب وێنەیەکی روونکرنێ بنوێنە، دبێژنێ چەماویێ کەلوکی یێ بەرەڤ ژێر. ڤێجا ناڤەنداریێ کۆمەلا پێداییان دبیتە پۆیێ خالا ئێکودوبرینا ئەوی وینێ روونکرنێ یێ هاتیە وێنەکرن دگەل راستەهێلێ ئاسۆیێ $y=m$، کو m نیڤا دووبارەبوونا کەلۆکی یا پتر دنوێنت.

بۆ چێکرنا چەماوێ کەلۆکیێ بەرەڤ ژۆر، بهایێن بلند یێ هەر چەشنەکێ لسەر تەوەرێ ئێکێ بنوێنە، و دووبارەبوونێن وان لسەر تەوەرێ دووێ بنوێنە، کو هەر چەشنەك ب خالەکێ بهێتە نواندن، پویێ وێ ببیتە رادێ بلند یێ چەشنێ و تانێ وێ ببیتە دووبارەبوونا چەشنێ، پاشی چەماوەیەکی گونجای بکێشە کو ناڤبەرا وان خالان بگەهینت.

بو دروستکرنا چەماوەیێ کەلۆکیێ بەرەڤ ژێر: بهایێ نزم یێ هەر چەشنەکێ لسەر تەوەرێ ئێکێ بنوێنە و دووبارەبوونا وێ لسەر تەوەرێ دووێ دانە، کو هەر چەشنەك ب خالەکێ بهێتە نواندن، پویێ وێ ببیتە رادەیێ نزمییا چەشنێ و تانێ وێ بۆ دووبارەبوونا چەشنی، پاشی چەماوەیەکێ گونجایی بکێشە کو ناڤبەرا وان خالان بگەهینت.

نموونە 3

چەماوەیێ كەلۆكی یێ بەرەڤ ژۆر و یێ بەرەڤ ژێر بۆ پێدایێن.



بزاڤێ بكە

چەماوەیێ كەلۆكی یێ بەرەڤ ژۆر و چەماوەیێ كەلۆكی یێ بەرەڤ ژێر بۆ كۆمەلەكا پێدایێن خرڤەكرین د چەشناندا، وەكی ل خشتێ ل خوارێ دیاركری وێنەبكە:-

چەشن	[20,25[	[25,30[	[30,35[	[35,40[	[40,45[	[45,50[	[50,55[	[55,60[
دووبارەبوون	2	4	5	7	12	8	7	5

بۆ دیاركرنا ناڤەندارێ كۆمەلەكا پێدایێن د چەشناندا خرڤەكرین، بكارئینانا چەماوەیێ كەلۆكیێ بەرەڤ ژۆر یان چەماوەیێ كەلۆكیێ بەرەڤ ژێر، ڤان پێنگاڤان ئەنجام بدە:-

1. خشتەیەكێ دووبارەبوونا كەلۆكی یێ بەرەڤ ژۆر یان بەرەڤ ژێر دروستبكە.

2. چەماوەیەكێ دووبارەبوونا كەلۆكی یێ بەرەڤ ژۆر یان بەرەڤ ژێر وێنەبكە.

3. راستەهێلێ $y = m$ بكێشە، كو m نیڤا دووبارەبوونا كەلۆكی یا پتر بنوێنت.

4. پۆیێ خالا ئێكو دووبڕینا چەماوەیێ دووبارەبوونا كەلۆكیێ بەرەڤ ژۆر یان بەرەڤ و ژێر دگەل راستەهێلێ $y = m$ دیاربكە.

نموونە 4

دیاركرنا ناڤەنداری ب وێنەیێ روونكرنێ

ناڤەندارێ پێدایێن ل خوارێ بینەدەر.

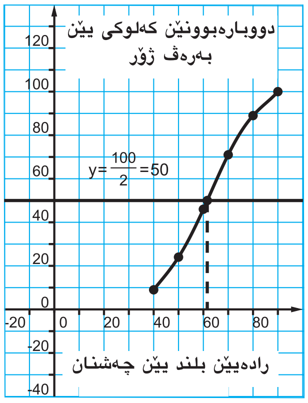
چەشن	[30,40[	[40,50[	[50,60[	[60,70[	[70,80[	[80,90[
دووبارەبوون	9	15	22	25	18	11

خشتێ دووبارەبوونا كەلۆكیێ بەرەڤ ژۆر

چەشن	دووبارە بوون	دووبارەبوونا كەلۆكیێ بەرەڤ ژۆر
[30,40[	9	9
[40,50[	15	24
[50,60[	22	46
[60,70[	25	71
[70,80[	18	89
[80,90[	11	100

ناڤەندار دبیتە 61 ب نێزیكی.

وێنەیێ روونكرنا كەلۆكیێ بەرەڤ ژۆر و راستەهێلێ $y = m$



بزاڤێ بکە ناڤەندارێ پێدایێن ل خوارێ بینەدەر:

چەشن	[40,50[	[50,60[	[60,70[	[70,80[	[80,90[	[90,100[
دووبارەبوون	30	50	80	100	70	10

تو دشێی ناڤەندارێ کۆمەلەکا پێدایێن خرڤەکرین د چەشناندا بینیەدەر بکارئینانا جەبرێ.

پێنگاڤێن وێ دێ بڤی شێوەی بن:

1. خشتێ دووبارەبوونا کەلۆکی یێ بەرەڤ ژۆر دروستبکە.
2. وێ چەشنێ دیاربکە کو نیڤا دووبارەبوونا کەلۆکی یا مەزنتر تێدا بیت، وێ چەشنێ دبێژنێ، چەشنا ناڤەندار.
3. ناڤەندارێ بینەدەر بکارئینانا رێسایا.

$$M=A+\left(\frac{\sum\frac{F_t}{2}-F_2}{F_3}\right)\times L$$

کو:

- A نزمترین رادەیێ چەشنا ناڤەندارە.
- $\sum\frac{F_t}{2}$ نیڤا مەزنترین دووبارەبوونا کەلۆکی یە.
- F_2 دووبارەبوونا کەلۆکی یا بەرەڤ ژۆرا کو ئێکسەر ل پێش چەشنا ناڤەندار دهێت.
- F_3 دووبارەبوونا چەشنا ناڤەندارە.
- L مەودایێ چەشنا ناڤەندار.

دیارکرنا ناڤەنداری ب جەبرێ

نموونە 5

ناڤەندارێ پێدایێن نموونا 4 بینەدەر.

خشتێ دووبارەبوونا کەلۆکی یێ بەرەڤ ژۆر

چەشن	دووبارە بوون	دووبارەبوونا کەلۆکی یا بەرەڤ ژۆر
[30,40[	9	9
[40,50[	15	24
[50,60[	22	46
[60,70[	25	71
[70,80[	18	89
[80,90[	11	100

نیڤا دووبارەبوونا کەلۆکی یا مەزنتر دبیتە 50 ، و ئەو دکەڤتە دناڤ چەشنا [60,70[دا. ڤێجا چەشنا ناڤەندار دبیتە [60,70[

دزانین کو $A=60$ و $\sum\frac{F_t}{2}=50$ نیڤا دووبارەبوونا کەلۆکی یا مەزنتر

$F_2=46$ دووبارەبوونا کەلۆکی یا بەرەڤ ژۆر بۆ وێ چەشنا ئێکسەر ل پێش چەشنا ناڤەندار.

$F_3=25$ دووبارەبوونا چەشنا ناڤەندار، $L=10$.

ڤێجا:

$$M=60+\left(\frac{50-46}{25}\right)\times 10=61.6$$

ئەڤ ئەنجامە یا رەوایە (بەرئاقلە) بەرسڤا نموونا پێشتر (61 ب نێزیکی) ئەوا هاتیە دیارکرن ب وێنەیێ روونکرنێ پەسەند دکەت.

بزاڤێ بکە ب رێیا جەبرێ ناڤەنداری بۆ ڤان پێدایێن ل خوارێ بینەدەر:

چەشن	[12,15[	[15,18[	[18,21[	[21,24[	[24,27[
دووبارە بوون	30	50	80	100	70

راهێـــــنـــــان

بەردەوامبوون د بیرکاریێدا

1 دیارکرنا کیڤ وان هەرسێ پیڤانێن رووکرنا چەقی بۆ کومەلەکا پێداییێن خرقەکرین دچەشناندا ب زەحمەترە؟ بەرسڤا خۆ روونبکە.

2 مەگرتی تە ژ کۆمەلا پێداییان چەشنا ئێکێ و چەشنا دووماهیێ لادان، ئەرێ ناڤەندار دێ هێتە گۆهۆرین؟ هویێ بەرسڤا خۆ روونبکە ب نموونەکێ.

3 کۆمەلەکا پێداییێن نە خرقەکرین بنڤیسە کو ناڤەندار و ناڤەند بۆ وان پێداییان دیەکسان بن.

راهێنانێن ئاراستەکری

ناڤەندار و ناڤەند و مۆد بۆ هەر کۆمەلەکا پێداییان بینەدەر.

4 $\{5,7,4,7,6,7\}$

5 $\{10,14,18,22,26\}$

6 خشتێ دووبارەبوونا کەلۆکیێ بەرەڤ ژۆر و خشتێ دووبارەبوونا کەلۆکیێ بەرەڤ ژێر بۆ پێداییێن ل خوارێ بینەدەر:

چەشن	[20,25[	[25,30[	[30,35[	[35,40[	[40,45[
دووبارە بوون	11	16	19	14	5

7 چەماوەیێ دووبارەبوونا کەلۆکیێ بەرەڤ ژۆر و چەماوەیێ دووبارەبوونا کەلۆکیێ بەرەڤ ژێر بۆ پێداییێن ل خوارێ وێنەبکە:

ژی	[8,10[	[10,12[	[12,14[	[14,16[	[16,18[	[18,20[
دووبارە بوون	80	110	100	60	30	20

8 خشتێ ل خوارێ نمرەیێن 24 قوتابیان ل ئەزموونا بابەتی بیرکاریێ دیاردکەت. ب هێلکارێ رووکرنێ بهایێ نێزیکری بۆ ناڤەندارێ بینەدەر.

چەشن	[5,10[	[10,15[	[15,20[	[20,25[	[25,30[	[30,35[	[35,40[
دووبارە بوون	2	6	3	1	3	5	4

9 ب جەبرێ ناڤەندارێ کۆمەلا پێداییێن ل خوارێ بینەدەر.

ژی	[20,25[	[25,30[	[30,35[	[35,40[	[40,45[
دووبارە بوون	11	16	19	14	5

راهێنان و بجهئینان

ناڤەند و ناڤەندار و مۆد بۆ هەر کۆمەلەکا پێداییان بینەدەر.

10 $\{4,16,25,9,36,49\}$

11 $\{5,10,15,20,25\}$

12 خشتێ دووبارەبوونا کەلۆکی یێ بەرەڤ ژۆر و خشتێ دووبارەبوونا کەلۆکیێ بەرەڤ ژێر بۆ پێدایێن ل خوارێ دروستبکە.

چەشن	[28,30[	[30,32[	[32,34[	[34,36[	[36,38[	[38,40[
دووبارە بوون	2	3	9	12	1	5

13 چەماوەیێ کەلۆکیێ بەرەڤ ژۆر و چەماوەیێ کەلۆکیێ بەرەڤ ژێر بۆ پێدایێن ل خوارێ وێنەبکە:

ژی	[30,35[	[35,40[	[40,45[	[45,50[	[50,55[	[55,60[
دووبارە بوون	80	110	100	60	30	20

14 خشتێ ل خوارێ ژیێن 275 کارکەران ل کارگەهەکێ دنوێنت. ب وێنەیێ روونکرنێ بهایەکی نێزیککری بۆ ناڤەنداری بینەدەر.

ژی	[20,25[	[25,30[	[30,35[	[35,40[	[40,45[	[45,50[
ژمارە	45	65	75	44	34	12

15 خشتێ ل خوارێ ناڤەندێ بکاربرنا هێکان بۆ ئێك کەس ل بـاژێرەکی ل دەمێ وەرزێ زڤستانێ دیاردکەت لدووف راپرسینەکێ 380 کەس بخۆڤەگرتبوون، ناڤەنداری ب جەبرێ بینەدەر.

چەشن	[3,7[	[7,11[	[11,15[	[15,19[	[19,23[
دووبارە بوون	10	100	200	50	20

16 **هزرکرنەکا رەخنەگر:** تە زانی کو بهایێ نێزیك وەروا بۆ ناڤەنداریێ کۆمەلەکا پێدایێن نە خرڤەکرین کو ژمارا وان جووت بیت، دبیتە تێکرایێ هەردوو بهایێن دکەڤنە دنیڤەکێدا. ئەرێ تێکرایێ رادێ بلند و رادێ نزم بۆ چەشنا ناڤەندارییێ دبیتە ناڤەندارەکێ نێزیك و رەوا بۆ کۆمەلەکا پێدایێن خرڤەکرین د چەشناندا؟ پێدایێن نموونا (5) بکاربینە بۆ پشتەڤانیا بەرسڤا خۆ.

17 خشتێ ل خوارێ نمرێن قوتابیێن پۆلا یازدێ وێژەی ل ئەزموونا بیرکاریێ یا وەرزێ ئێکێ دیاردکەت:-

80	60	90	20	65	40	60	35	70	35
65	35	70	45	80	65	50	60	15	30
35	15	40	10	20	20	70	55	85	40

أ خشتەیەکی دووبارەبوونێ چێکە ب خرڤەکرنا پێدایێن خشتەی د چەشناندا، مەودایێ هەر ئێك ژ وان 10 بیت، دگەل چەشنا [0,10[.

ب خشتێ دووبارەبوونا کەلۆکیێ بەرەڤ ژۆر و خشتێ دووبارەبوونا کەلۆکیێ بەرەڤ ژێر بۆ پێدایێن خرڤەکرین چێکە.

ج مۆدێ یان مۆدەیان دیاربکە بەری خرڤەکرنا پێدایان. و چەشنێ یان چەشنەیێن مۆدێ پشتی خرڤەکرنێ دیاربکە.

د ناڤەندێ ڤان پێدایان بینەدەر بەری خرڤەکرنێ و پشتی خرڤکرنێ، بەراوردیێ بکە ل ناڤبەرا هەر دوو ناڤەندان.

هـ ناڤەنداریێ ڤان پێدایان بینەدەر بەری خرڤەکرنێ و پشتی خرڤەکرنێ، بەراوردیێ بکە لناڤبەرا هەردوو ناڤەنداران.

18 ئەڤێن ل خوارێ درێژیێن قوتابیێن پۆلا یازدێ وێژەی ل قوتابخانەکا هەرێمێ دنوێنن.

179; 187; 181; 175; 175; 173; 172; 172; 175; 169; 167; 164; 171
173; 177; 178; 175; 185; 181; 172; 171; 177; 175; 175; 173; 178
168; 172; 174; 182; 178; 167; 168; 172; 174

أ خشتەیەکی دووبارەبوونێ دروستبکە ب خرڤەکرنا پێداییێن خشتێ د چەشناندا ماوێ هەر ئێکێ 5cm بیت.

ب خشتێ دووبارەبوونا کەلۆکیێ بەرەڤ ژۆر و خشتێ دووبارەبوونا کەلۆکیێ بەرەڤ ژێر بۆ پێداییێن خرڤەکری دروستبکە.

ج ناڤەندێ ڤان پێداییان بەری و پشتی خرڤەکرنێ بینەدەر. و بەراوردیێ بکە لناڤبەرا هەردوو ناڤەندان.

د مۆد یان مۆدان بینەدەر بەری خرڤەکرنێ، و چەشنێ یان چەشنێن مۆدێ دیاربکە پشتی خرڤەکرنێ.

هـ ناڤەندارێ ڤان پێداییان بینەدەر بەری و پشتی خرڤەکرنێ. بەراوردیا هەردوو ناڤەنداران بکە.

لێنێرینەك بۆ پاش

19 خشتێ ل خوارێ نمرێن قوتابیێن پۆلەکێ ل ئەزموونا بیرکارییێ دیاردکەت. ئەڤێن ل خوارێ بینەدەر.

85	75	96	88	72
90	78	87	80	98
93	88	82	87	80
83	98	97	84	92

أ بلندترین نمرە

ب نزمترین نمرە

ج ناڤەندێ نمرەیان

د ناڤەندارێ نمرەیان

هـ مۆدێ نمرەیان.

لێنێرینەك بۆ پێش

20 خشتێ ل بەرامبەر ئەو خالێن دوو یاریزانێن تیپا تەپا سەبەتێ ل 5 یارییان تۆمارکرین دیاردکەت.

رۆشنا	ئاشنا
20	15
20	25
18	30
22	10
20	20

أ ناڤەندێ ژمارا خالێن هەر یاریزانەکی ل یاریێ تۆمارکرین بینەدەر.

ب کیژ هەردوو یاریزانان پتر یێ جێگربوو دتۆمارکرنا خالاندا: هویێ بەرسڤا خۆ روونبکە.
ئەرێ زانینا ناڤەندێ خالێن هەر یاریزانەکی تۆمارکرین ل یاریێ هاریکارییێ دکەت بۆ ناسکرنا یاریزانێ پتر جێگر دتۆمارکرنا خالاندا؟ هویێ بەرسڤا خۆ روونبکە.

پیڤەرێن پرتبوونێ

Measures of Dispersion

بۆچی؟
د وانەیا بۆری تو فێری ئەوێ چەندێ بوویی کو پیڤەرێن رووتکرنا چەقی یێن کۆمەلەکا پێدایان وەسفەکێ بۆ وان دیاردکەت. لێ ئەڤ پیڤەرە نەبەسن بۆ دیارکرنا وەسفەکا گشتگر لسەر پێداییان. لەولا ئارناس هندەک پیڤەرێن دی بکاردئینن دبێژنێ پیڤەرێن پرتبوونێ.

ئارمانج

- هەژمارتنا پیڤەرێن پرتبوونێ یێن کۆمەلەکا پێداییان ب جەبرێ، و بکارئینانا بژمێرا رووتکرنێ.

زاراڤ

Vocabulary

لێکنەچوون
Variance

لادانا پیڤانەی
Standard deviation

ئەگەر تو ئەڤان هەر دوو کۆمەلێن پێداییان وەربگری $\{19,20,21\}$ و $\{0,20,40\}$ و ناڤەند و ناڤەندارێ هەر ئێك ژ وان ب هەژمێری، دێ بینی هەردووان هەمان ناڤەند و هەمان ناڤەندار هەنە. لێ ئەو هەردوو کۆمەلە د جیاوازن: پێدایێن کۆمەلا ئێکێ دخرڤەکرینە لدۆر ناڤەندی، لێ پرتبوونەکا مەزن دناڤ پێدایێن کۆمەلا دوویێ یا دیارە.

بینە بیرا خۆ کو:

- لێکنەچوون **Varience** پیڤەرەکە ژ پیڤەرێن پرتبوونێ و هێمایێ σ^2 . بۆ وی دئێتە بکارئینان، و ئەو دبیتە ناڤەندێ دووجایێن جیاوازیێن ل ناڤبەرا پێدایێن جیاواز (x_i) و ناڤەندێ کۆمەلا پێدایان $(\bar{x})$ ئانکو:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\left((x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2\right)$$

n دبیتە ژمارا پێداییان.

- لادانا پیڤانەی: **Standard deviation** پیڤەرەکە ژ پیڤەرێن پرتبوونێ و هێمایێ σ بۆ وی دئێتە بکارئینان. [لادانا پیڤانەیی دبیتە رەگێ دووجایێ مووجەب بۆ لێکنەچوونێ].
- چەند بهایێ لادانا پیڤانەی یا کێمبیت دێ پرتبوونا پێدایان کێمتر بیت. ئانکو ئەو پێداینە دێ پتر دخرڤەکری بن ل نێزیك ناڤەندی، و ئەڤە وەسا دکەت کو ئەڤ پیڤەرە باشترین دەربرینێ ژ کۆمەلا پێداییان بکەت. و ل بەرامبەری وێ هەر چەند بهایێ لادانا پیڤانەیی مەزنتر بیت دێ پرتبوونا پێداییان پتر بیت، ئانکو ئەو پێداینە دێ د دوور بن ژ ناڤەندی، ئەڤ چەندە وەسا دکەت کو ئەڤ پیڤەرە کێمترین دەربرینێ ژ پێدایێن کۆمەلێ بکەت.

نموونە 1

هەژمارکرنا لێکنەچوون و لادانا پیڤانەی ب جەبرێ:

ب جەبرێ لێکنەچوون و لادانا پیڤانەی بۆ کۆمەلا پێداییان $\{14,13,16,9,3,7,11,12,11,4\}$ بینەدەر.

شیکار

ئەگەر تو ڤەگەریە پیناسا هەر ئێك ژ لێکنەچوون و لادانا پیڤانەیی، دێ دەرئەنجامەکێ کو دڤێت تو ب پێنگاڤێن ل خوارێ رابی:

1. هەژمارتنا ناڤەندێ کۆمەلا پێداییان.
2. هەژمارتنا دووجایا جیاوازییا د ناڤبەرا ناڤەندی و هەر پێدایەکیدا.

3. هەژمارتنا سەرجەمیٚ وان دووجاییێن بدەست تە کەفتین، و دابەشکرنا وی سەرجەمی لسەر ژمارا پیداییان. بۆ بدەستکەفتنا لێکنەچوونیٚ.

4. هەژمارتنا رەگیٚ دووجاییٚ مووجەب یێ لێکنەچوونیٚ.

$$\bar{x}=\frac{14+13+16+9+3+7+11+12+11+4}{10}=10$$

خشتیٚ ل خواریٚ دروستبکە:

پێدای x_i	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$
14	4	16
13	3	9
16	6	36
9	-1	1
3	-7	49
7	-3	9
11	1	1
12	2	4
11	1	1
4	-6	36
سەرجەم		162

لێکنەچوونیٚ بهەژمێرە: $\sigma^2=\frac{1}{n}\left((x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2\right)=\frac{162}{10}=16.2$

لادانا پیڤانەیی بهەژمێرە: $\sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{16.2}\approx 4.025$

بزاڤیٚ بکە لێکنەچوون و لادانا پیڤانەیی بۆ کۆمەلا پیداییان $\{0,3,1,1,0,5,1,0,3,0\}$ بهەژمێرە.

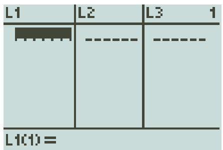
نموونە 2

هەژمارتنا لادانا پیڤانەیی بکارئینانا بژمێرا روونکرنیٚ:

لێکنەچوون و لادانا پیڤانەیی بۆ کۆمەلا پێداییان $\{14,13,16,9,3,7,11,12,11,4\}$ بهەژمێرە بکارئینانا بژمێرا روونکرنیٚ.

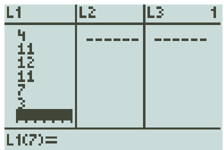
دەست ب ڤالاکرنا لیستان Lists بکە دبژمێرا روونکرنێدا.

2nd کلیک بکە پاشی + دیٚ شاشا بەرامبەر بۆ تە دیاربیت.



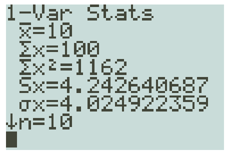
4 کلیک بکە بۆ هەلبژارتنا ڤالاکرنا لیستەیان پاشی ENTER کلیک بکە پێداییان تۆمار بکە.

STAT کلیک بکە و پاشی ENTER شاشا بەرامبەر دیٚ بوتە دیاربیت پێداییان لسەر لیستەیا L_1 تۆماربکە، پێداییٚ لدووڤ پێداییٚ و کلیک کرنا ENTER بۆ هەر پێدایەکی پشتی تۆمارکرنا پێداییان ئەڤ شاشە دیٚ بۆ تە دیاربیت.



STAT کلیک بکە و CALC هەلبژمێرە پاشی ENTER کلیک بکە بۆ هەژمارتنا ئێک پیڤەریٚ ئاماریٚ.

2nd پاشی 1 کلیک بکە بۆ هەلبژارتنا L_1 پاشی ENTER بۆ دەستپێکرنا کردارا هەژمارتنیٚ. لسەر شاشا بەرامبەر دیٚ بەهایێن ناڤەندی $\bar{x}$ و لادانا پیڤانەیی σx بینی.



بزاڤێ بکە بژمێرا رۆونکرنێ بکاربینە بۆ هەژمارتنا لادانا پیڤانەی بۆ کۆمەلا پێداییان
$\{0,3,1,1,0,5,1,0,3,0\}$

بۆ هەژمارتنا لێکنەچوون و لادانا پیڤانەی بۆ کۆمەلەکا پێداییێن خرڤەکرین د چەشناندا، ب ڤان پێنگاڤێن ل خوارێ رابە:

1. چەقێ هەر چەشنەکێ x_i بینەدەر، و بهایێ وێ دگەل دووبارەبوونا چەشنێ f_i لێکبدە. و ڤان ئەنجامێن لێکدانێ کۆمبکە، و دابەشبکە لسەر سەرجەمێ دووبارەبوونان، بۆ دیارکرنا ناڤەندێ [تێکرایێ] پێداییان $\bar{x}$.
2. دووجاییێن جیاوازیان لناڤبەرا ناڤەندی و چەقێ هەر چەشنەکێ x_i بهەژمێرە.
3. ڤان جیاوازییێن بدەست تە کەفتین – کۆمبکە.
4. دووجاییا بەرامبەری هەر چەشنەکێ دگەل دووبارەبوونا وێ چەشنێ لێکبدە؛ پاشی ڤان ئەنجامێن لێکدانێ کۆمبکە، و ڤی سەرجەمێ لسەر سەرجەمێ دووبارەبوونان دابەشبکە، دێ لێکنەچوون بدەست تە کەڤیت.
5. رەگێ دووجایێ مووجەب بۆ لێکنەچوونێ بینەدەر، دێ لادانا پیڤانەی بدەست تە کەڤیت.

نموونە 3 **هەژمارتنا لێکنەچوون و لادانا پیڤانەیی بۆ کۆمەلەکا پێداییێن خرڤەکرین د چەشناندا.**

لێکنەچوون و لادانا پیڤانەیی بۆ کۆمەلەکا پێداییێن خرڤەکرین د چەشناندا ل خشتێ ل خوارێ بهەژمێرە.

چەشن	$[20,22[$	$[22,24[$	$[24,26[$	$[26,28[$	$[28,30[$
دووبارە بوون	5	10	20	10	5

خشتێ ل خوارێ دروستبکە و پاشی تەمامبکە:

چەشن	دووبارە بوون f_i	چەق x_i	$f_i \cdot x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
$[20,22[$	5	21	105	-4	16	80
$[22,24[$	10	23	230	-2	4	40
$[24,26[$	20	25	500	0	0	0
$[26,28[$	10	27	270	2	4	40
$[28,30[$	5	29	145	4	16	80
کۆ	50	کۆ	1250		کۆ	240

ناڤەند $\bar{x} = \frac{1250}{50} = 25$

لێکنەچوون $\sigma^2 = \frac{240}{50} = 4.8$

لادانا پیڤانەی $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{4.8} \approx 2.2$

بزاڤێ بکە لێکنەچوون و لادانا پیڤانەی بۆ پێداییێن خشتێ ل خوارێ بهەژمێرە:

چەشن	$[18,20[$	$[20,22[$	$[22,24[$	$[24,26[$	$[26,28[$
دووبارە بوون	8	12	20	12	8

راهێنان

بەردەوامبوون د بیرکارییێدا

1 بۆچی لێکنەچوون و لادانا پیڤانەی هەموو دەمان دوو ژمارەیێن مووجەبن؟

2 چ پەیوەندی ناڤبەرا لێکنەچوون و لادانا پیڤانەی گرێددەت؟ ئەرێ لادانا پیڤانەی بەردەوام بچووکترە ژ لێکنەچوونێ.

ڕاهێنانێن ئارِاستەکری

لێکنەچوون و لادانا پیڤانەی بۆ هەر کۆمەلەکا پێداییان بکارئینان جەبرێ بهەژمێرە.

3 $\{10,8,6,4,2\}$ 4 $\{3,3,4,5,5\}$

5 بژمێرا روونکرنێ بکاربینە بۆ هەژمارتنا لادانا پیڤانەیی یا کۆمەلا پێدایێن وێ:
$\{4.82, 5.22, 8.32, 3.22, 1.56\}$

6 خشتێ ل خوارێ بەلاڤکرنا کارکەران دیاردکەت ل دەزگەهەکێ ل دووڤ ژیێ وان.
لێکنەچوون و لادانا پیڤانەی بۆ ڤان پێداییان بهەژمێرە.

ژی	[20,22[	[22,24[	[24,26[	[26,28[	[28,30[	[30,32[
دووبارە بوون	5	10	20	10	5	2

ڕاهێنان و بجهئینان

لێکنەچوون و لادانا پیڤانەی بۆ هەر کۆمەلەکا پێداییان بکارئینانا جەبرێ بهەژمێرە:-

7 $\{4,4,4,4,5\}$ 8 $\{8,12,30,35,48,50,62\}$

9 بژمێرا روونکرنێ بکاربینە بۆ هەژمارتنا لادانا پیڤانەی بۆ ڤێ کۆمەلا پێداییان.
$\{0.33,1.24,2.71,7.42,6.21\}$

10 خشتێ ل خوارێ ئەنجامێن ڕاپرسینەکا هاتیە ئەنجامدان لسەر سامپلەکێ موسیقڤانان دەربارەی ژمارا دەمژمێرین هاتینە تەرخانکرن بۆ مەشقکرنا وان ل حەفتیەکێ دیاردکەت.
لێکنەچوون و لادانا پیڤانەیی بۆ ڤان پێداییان بهەژمێرە.

چەشن	[1,6[	[6,11[	[11,16[	[16,21[	[21,26[	[26,31[	[31,36[	[36,41[
دووبارە بوون	13	9	9	14	16	8	8	3

11 تەپا سەبەتێ: ئالانی 13 یارییێن تەپا سەبەتێ ئەنجامدان، و ئەڤ خالێن ل خوارێ ب ڕێز تۆمارکرن: 24، 16، 9، 17، 17، 23، 20، 26، 17، 14، 58، 27، 28. ناڤەند و لێکنەچوون و لادانا پیڤانەیی بۆ وێ کۆمەلا پێداییان بهەژمێرە.

12 ناڤەندێ کۆمەلەکا پێداییان 4، و ناڤەندارێ وێ 3 و لادان پیڤانەی 1.6 .
أ. هەر پێداییەك دگەل 5 لێکدا، ناڤەندێ ڤێ کۆمەلا نوو چەندە؟ و ناڤەندارێ وێ چەندە؟ و لادانا پیڤانەی چەندە؟
ب. بۆ هەر پێدایەکێ سەرەکی (5) هاتە زێدەکرن، ناڤەندێ کۆمەلا نوو چەندە؟ ناڤەندارێ وێ چەندە؟ و لادانا پیڤانەی چەندە؟

13 پیڤان: ماموستایێ پۆلا چوارێ داخواز ژ قوتابیێن خۆ کر، بلا هەر ئێك درێژیا وێ رەحلێ لسەر روینشتی ب سەنتیمەتران بپیڤیت. ماموستای ئەڤ پیڤان لسەر تەختەی تۆمارکرن:
49، 50، 49، 48، 48، 49، 50، 49، 48، 50، 49، 50.
ناڤەند و ناڤەندار و لادانا پیڤانەیی یا وان پێدایان بهەژمێرە.

14 ئەگەر دانەیەك دناڤ كۆمەلەكا پێداییاندا هەبیت و دووراتییێ لناڤبەرا وی دانەی و ناڤەندێ كۆمەلێ ژ سێ جارانی لادانا پیڤانەی مەزنتر بیت، ئامار ناس دبێژنە ڤێ دانەی بەهایێ پەرگر. پێداییێن راهێنانا بۆری بكاربینە، دیاربكە، ئەرێ بەهایێن پەرگر دناڤدە هەنە یان نە. هویێ بەرسڤا خۆ روونبكە.

لێنێرینەك بۆ پاش

15 نەوزادی بەركێ زارەكێ هەلاڤێت:

أ ئەگەرێ دیاربوونا ژمارە 3 چەندە؟

ب ئەگەرێ دیاربوونا ژمارە 8 چەندە؟

ج ئەگەردیاربوونا ژمارەیەكا نا مووجەب چەندە؟

د ئەگەرێ دیاربوونا ژمارەیەكا جووت چەندە؟

لێنێرینەك بۆ پێش

16 خشتێ لبەرامبەر ژمارا قوتابیێن پۆلا دەهێ و یازدێ و دوازدێ ل ئامادەیەكێ دیاردكەت.

پۆل	كور	كچ	كۆ
دە	53	51	
یازدە	47	50	
دوازدە	35	44	
سەرجەم			

أ خشتێ كۆپیبكە و تەمامبكە.

ب ئەگەرێ هەلبژارتنا قوتابیەكی بهەرەمەكی ژ پۆلا یازدێ بیت چەندە؟

ج ئەگەرێ هەلبژارتنا قوتابیەكی بهەرەمەكی كچ بیت چەندە؟

د ئەگەرێ هەلبژارتنا قوتابیەكی بهەرەمەكی كوربیت و ژ پۆلا دوازدێ بیت چەندە؟

هـ ئەگەرێ هەلبژارتنا قوتابیەكی بهەرەمەكی كچ بیت و ژ پۆلا دەهێ بیت چەندە؟

و ئەگەرێ هەلبژارتنا قوتابیەكی بهەرەمەكی كور بیت یان ژ پۆلا دەهێ بیت چەندە؟

وانە 3

یاسایێن ئەگەرێ Laws of probability

بۆچی؟

شارەزا ل کاروبارێن هەلبژارتنان ئەگەران و پێدایێن گەشە پێدانا دیمۆگرافی و ئەنجامێن هەلبژارتنێن پێشتر بکاردئینن بۆ دارشتنا پێشبینیان دەربارەی ئەنجامێن خولا داهاتی.

ئارمانج

- ناسینا یاسایێن ئەگەرێ و بکارئینانا وان.

زاراڤ

Vocabulary

روودانێن جودا [جیا] Mutually exclusive events

روودانێن سەربەخو Independent events

تەمامکەرێ روودانێ Complement of an event

دەرهێنەر Outcome

تو ل پۆلێن پێشتر فێری بیروکێن سەرتای بوویی لسەر ئەگەرێ، و هەروەسا فێری هەژمارتنا ئەگەرێ روودانەکێ بووی، وەکی دەستکەفتنا ژمارە (5) لدەمێ هەلدانا بەرکێ زارەکێ. ل ڤێ وانەیێ دێ فێربی کو هندەك پەیوەندی هەنە چێدبیت ناڤبەرا چەند روودانان گرێدەن، و یا دشیانداپە هندەك روودانێن نوو دروستبکەن، پشت بەستن ب هندەك روودانێن دی بکارئینان ئامرازێ پێکڤە گرێدانێ «و» یان ئامرازێ پێکڤە گرێدانێ ((یان))، وەکی روودانا: ((دیاربوونا ژمارەکا جووت، یان دیاربوونا ژمارەکا بچووکتر ژ 3 » کو ئەڤە پێکدهێت ژ روودانا: ((دیاربوونا ژمارەکا جووت)) و روودانا ((دیاربوونا ژمارەکا بچووکتر ژ 3)). بکارئینانا ئامرازێ پێکڤە گرێدانێ ((یان)) خشتێ ل خوارێ ئەوان چەمکێن (بیروکێن) سەرەتای ئەوێن تو بەری نوکە فێربوویێ رووندکەت.

چەمك (بیروك)	روونکرن	نموونە
تاقیکرنەکا هەرەمەکی **experience**	کارەکە دبیتە هویێ رووداانا هندەك ئەنجامان کو یا د شیاندایە ئەم وان بێژین، لێ دیارکرنا ئەوا روودەدەت بدروستی نەیا دشیاندایە. هەر ئەنجامەکی دشیاندا دبێژنێ دەرهێنەر.	د هەلدانا بەرکێ زارەکێدا ئەم دزانین ئەو ئەنجامێن دشیاندا ئەڤەنە: 1، 2، 3، 4، 5، 6 لێ ئەم نزانین کیژ وان دێ دیاربیت.
بۆشاییێ ئەگەران **Sample space**	کۆمەلا هەموو ئەنجامێن دشیاندایە. ئانکو کۆمەلا هەموو دەرهێنەرانە.	بۆشاییێ ئەگەران ل هەلدانا بەرکێ زارەکێ دبتە کۆمەلا $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
رووداان **Event**	بەشە کۆمەلەکا ژ بۆشاییێ ئەگەرانە، رووداانا سادە پێکدئێت ژ ئێك ئەنجامێ.	دیاربوونا ژمارەکا کت، ل دەمێ هەلدانا بەرکێ زارەکێ دبتە رووداانا $\{1, 3, 5\}$. رووداانا $\{5\}$ رووداانەکا سادەیە.
ئەگەر **Probability**	ئەگەرێ رووداانەکێ دبیتە ژمارە P کو $0 \le P \le 1$ و دیاربوونا رووداانەکێ دپیڤت. ئەگەرێ رووداانا ستەم $P = 0$ ئەگەری رووداانا مسۆگەر $P = 1$ سەرجەمێ ئەگەرێن رووداانێن سادە ل تاقیکرنەکا هەرەمەکی دبیتە 1 .	هەکە A رووداانا «دیاربوونا ژمارەکا کێمتر ژ 5 » بیت ل هەلدانا بەرکێ زارەکێ ئەگەرا A دبیتە: $p(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
یەکسانبوونا ئەگەران **Equally likelly**	تاقیکرنا هەرەمەکی دی یەکسانبت ل ئەگەران، هەکە ئەگەرێن هەموو رووداانێن سادە یەکسانبن. ئانکو دەلیڤا دیاربوونا هەموو ئەنجامان یەکسانن. ل ڤی بارەی ئەگەرێ رووداانێ. دبیتە رێژەیا ژمارا وان ئەنجامێن رووداانێ ساخدکەن بۆ ژمارا هەموو ئەنجامێن دشیاندا.	هەلدانا بەرکێ زارێ تاقیکرنەکا هەرەمەکی یا ئەگەر یەکسانە. هەکە A رووداانا «دیاربوونا ژمارەکا کێمتر ژ 5 » بیت. ژمارا وان ئەنجامێن رووداانێ ساخدکەن دبیتە 4 . لێ ژمارا هەموو ئەنجامێن دشیاندا دبیتە 6 ئانکو : $p(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

هەکەر A و B دوو روودان بن د تاقیکرنەکا هەرەمەکیدا، دشیانێن تەدایە هندەك روودانێن دی دیاربکەی ب ئاوێتەکرنا ڤان هەردوو روودانان.

روودانا $A\cup B$ «بخوینە A یان B » دبیتە ئەو روودانا ژ هەموو دانەیێن روودانا A و دانەیێن روودانا B پێکدئێت. هەکە $A=\{2, 4, 6\}$ کو روودانا «دیاربوونا ژمارەکا جووتە» و $B=\{3\}$ روودانا «دیاربوونا ژمارە 3 یە»، روودانا $A\cup B$ دبیتە $A\cup B=\{2, 3, 4, 6\}$. و روودانا $A\cap B$ (بخوینە A و B) دبیتە ئەو روودانا پێکدئێت ژ هەموو دانەیێن هاوبەش لناڤبەرا روودانا A و روودانا B. هەکە $A=\{2, 4, 6\}$ روودانا «دیاربوونا ژمارەکا جووتە» و $B=\{1, 2\}$ کو روودانا «دیاربوونا ژمارەکا کێمتر ژ 3 »یە. دێ روودانا $A\cap B$ بیتە $\{2\}$ ئانکو $A\cap B=\{2\}$.

نموونە 1

دیارکرنا روودانێن ئاوێتە.

ل تاقیکرنا هەرەمەکی، بەرکێ زارێ هەلدا. روودانا $A\cup B$ و روودانا $A\cap B$ دیاربکە، روودانا A روودانا «دیاربوونا ژمارەکا کت» ە و B روودانا «دیاربوونا ژمارەکا مەزنتر ژ 1 »ە.

روودانا A دبیتە $A=\{1, 3, 5\}$، و روودانا B دبیتە $B=\{2, 3, 4, 5, 6\}$.

روودانا $A\cup B$ دبیتە $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$، ئانکو روودانەکا مسۆگەرە و روودانا $A\cap B$ دبیتە $A\cap B=\{3, 5\}$.

بزاڤێ بکە

ل تاقیکرنەکا هەرەمەکی، گۆیەك ژ تویرکەکێ راکێشا کو 10 گۆیێن رەنووسکری ژ 1 هەتا 10 تێدا هەبوون. روودانا $A\cup B$ و روودانا $A\cap B$ دیاربکە، روودانا A «دیاربوونا ژمارەکا کتە» و B روودانا «دیاربوونا ژمارەکا مەزنترە ژ 9 ».

ئەگەرێ $A\cup B$

هەکەر A و B دوو روودانێن جودا بن، دێ

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

هەکەر A و B دوو روودانێن نا جودابن، دێ

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

نموونە 2

هەژمارتنا ئەگەرێن روودانێن ئاوێتە.

ل تاقیکرنەکا هەرەمەکی بەرکێ زارەکێ هەلدا.

أ ئەگەرێ روودانا $A\cup B$ و ئەگەرێ روودانا $A\cap B$ بینەدەر، کو A روودانا «دیاربوونا ژمارەکا کتە» و B روودانا «دیاربوونا ژمارەکا مەزنترە ژ 1 ».

$A=\{1, 3, 5\}$، $B=\{2, 3, 4, 5, 6\}$

$p(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ و $p(B)=\frac{5}{6}$

ل رەخەکێ دی $A\cap B=\{3, 5\}$

$p(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

ب ڤێ شێوەی

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{6}+\frac{5}{6}-\frac{2}{6}=\frac{6}{6}=1$$

بۆ ساخکرنا ئەنجامێ 6 یادیارە کو $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$، ئانکو ئەو روودانەکا مسۆگەرا و $P(A\cup B)=1$.

ب ئەگەری رووداناا $A \cup B$ و ئەگەری رووداناا $A \cap B$ بهەژمێرە، A رووداناا «دەست کەفتنا ژمارەکا جووتە» و B رووداناا «دەستکەفتنا ژمارەکا کێمتر ژ 2» یە.

$A = \{2,4, 6\}$ $B = \{1\}$

$p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $p(B) = \frac{1}{6}$

ژ لایەکێ دی $A \cap B = \{\ \} = \varnothing$ ئانکو هەردوو رووداان یێن جووداانە.

قێجا $p(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

بۆ ساخکرنا ئەنجامی، ئەم دبینین کو $A \cup B = \{1, 2, 4, 6\}$

$p(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

بزاڤێ بکە ل تاقیکرنەکا هەرمەکی گۆیەك ژ تویرکەکێ راکێشا، (7) گۆیێن رەنووسکری ژ 1 هەتا 7 تێدا هەنە.

أ ئەگەری رووداناا $A \cup B$، و ئەگەری رووداناا $A \cap B$ بهەژمێرە، هەکە A رووداناا «دەستکەفتنا ژمارەکا جووت» بیت و B رووداناا «دەستکەفتنا ژمارەکا مەزنتر ژ 3 » بیت.

ب ئەگەری رووداناا $A \cup B$، و ئەگەری رووداناا $A \cap B$ بهەژمێرە، هەکە A رووداناا «دیاربوونا ژمارەکا جووت» بیت، و B رووداناا دیاربوونا ژمارەکا مەزنتر ژ 6 » بیت.

هەکە A و B دوو رووداانێن جووداابن، ئەو هەردوو پێکڤە روونادەن. چونکی ئەنجامداانا ئێك ژ وان ئەنجامداانا یا دووێ قەدەغە دکەت دئێك دەمدا. ئەرێ نا رووداناا ئێکێ ژوان مەرجە یا دووێ روودبدەت؟ چێدبیت یا وەسا بیت و چێدبیت نەیا وەسا بیت. ل هەلداانا بەرکێ زارەکێ هەکە A رووداناا «دیاربوونا ژمارەکا جووت بیت»، و B رووداناا «دیاربوونا ژمارە 3 بیت»، نا رووداانائێك ژوان نەیا پێدڤیە بۆ ئەنجامداانا رووداناا یا دووێ، چونکی دیاربوونا ژمارە 5 ئێکێ ژ هەردووان ساخناکەت، و بەرۆڤاژی وێ چەندێ، هەکە A رووداناا «دیاربوونا خەت بیت» و B روودااناا «دیاربوونا شێری بیت» ل هەلداانا پارچەکێ دراڤێ کانزای. نارووداانا ئێك ژ وان دڤێت یا دووێ روودبدەت. ئانکو $A \cap B$ رووداانەکا ستەمە و

$A \cup B$ رووداانەکا مسۆگەرە.

ل ڤی باری دێ بێژین رووداناا B تەمامکەرە بۆ رووداناا A .

هێمایێ $\overline{A}$ بکاربینە بۆ تەمامکەرێ A .

تێبینیا ئەڤێ بکە: هەکە B تەمامکەرێ A بیت، دێ A تەمامکەری B بیت.

نموونــــــه 3 **دیارکرنا رووداانا تەمامکەر**

رووداانا تەمامکەر دیاربکە بۆ هەر بارەکی

أ ل تاقیکرنا هەرمەکی هەلداانا پارچەکێ دراڤێ کانزای دووجاران ئێك ل دووڤ ئێك. A رووداانا «دیاربوونا شێری جارەکێ بزێداهی»

ب ل تاقیکرنا هەرمەکی هەلبژارتنا نوینەرێ پۆلا یازدێ وێژەی ب رێکا «قورعێ» A رووداانا «هەلبژارتنا نوێنەرەکی مێ»

شیکار

أ بۆشاییێ ئەگەران دبیتە: $\{(T, T), (T, I), (I, T), (I, I)\}$ I دیاربوونا شێری نوینت و T دیاربوونا خەتێ نوێنت. $A = \{(T, T), (T, I), (I, T)\}$

$\overline{A} = \{(I, I)\}$ ئانکو دیاربوونا شێری ل هەردوو جاران

ب رووداانا تەمامکەر دبیتە رووداانا «هەلبژارتنا نوێنەری نێر»

بزاڤێ بکە

رووداوا تەمامکەر دیاربکە:

أ ل تاقیکرنا هەرەمەکی بۆ هەلدانا بەرکێ زارەکێ، رووداوا A «دیاربوونا ژمارەکا کت».

ل تاقیکرنا هەرەمەکی بۆ هەلدانا پارچەکی پارێ کانزای 3 جاران ل دووڤ ئێك.

ب رووداوا A «دیاربوونا شێری بکێماسی جارەکێ»

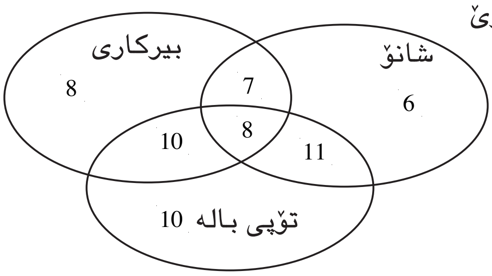
ئەگەرێ رووداوا تەمامکەر

ئەگەرێ رووداوا تەمامکەر بۆ رووداوا A دهێتە هەژمارتن بکارئینانا رێسایا:

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$$

نموونە 4 **دیارکرنا رووداوا تەمامکەر**

ل ئامادەیەکێ سێ یانە هەنە: یانەیا شانوگەریێ و (32) ئەندام هەنە.
یانەیا بیرکاریێ (33) ئەندام هەنە. یانەیا تەپا مێزێ
(39) ئەندام هەنە. هندەك قوتابی ئەندامن پتر ل
یانەیەکێ، هەر وەکی ل هێلکارێ بەرامبەر یا دیار.
رێڤەبەرێ قوتابخانێ ئەندامەکی ڤان یانەیان
بهەرەمەکی هەلبژارت بۆ نواندنا قوتابخانێ ل
کۆمبوونەکێ ل رێڤەبەریا پەروەردێ دهێتە گرێدان.
ئەگەرێ ئەو قوتابیێ هاتیە هەلبژارتن ئەندام بیت ل
دوو یانەیان بکێماسی چەندە؟



هەکەر A رووداوا ((ئەندام بیت ل دوو یانەیان بکێماسی))، رووداوا تەمامکەر $\overline{A}$ دێ بیتە ((ئەندام ل یانەیەکێ)) بۆشایێ نموونێ ژ 60 دانەیان پێکدهێت.

ژمارا ئەندامێن هەرسێ یانەیان دبیتە $10 + 10 + 11 + 8 + 8 + 7 + 6 = 60$.

ژمارا وان ئەنجامێن رووداوا تەمامکەر ساخدکەن دبیتە $24 = 6 + 8 + 10$ ڤێجا $P\left(\overline{A}\right) = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$

و $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} = 0.60 = 60\%$

بزاڤێ بکە

ئەگەرێ ئەو نوینەرێ هاتیە هەلبژارتن ئەندام بیت ل دوو یانەیان چەندە؟

هەکەر A و B دوو رووداو بن ل تاقیکرنەکا هەرەمەکی، چێدبیت دیاربوونا ئێکێ ژ وان کارتێکرن لسەر دیاربوونا یا دووێ هەبیت و چێدبیت کارتێکرن نەبیت.

هەکەر ل تاقیکرنا راکێشانا دوو تەپان ئێك ل دووڤ ئێك ژ تویرکەکێ کو (5) تەپێن سۆر و (3) تەپێن شێن تێدا هەبن، ئەگەرێ راکێشانا تەپا دووێ یا سۆر بیت دێ یا جیاوازبیت هەکەر تەپا ئێکێ بهێتە ڤەگەراندن بۆ تویرکێ بەری راکێشانا تەپا دووێ یان هەکەر نە هێتە ڤەگەراندن بۆ تویرکێ. بلا A رووداوا «راکێشانا تەپا ئێکێ یا سۆر بیت» و B رووداوا «راکێشانا تەپا دووێ یا سۆر بیت». هەکەر تەپا ئێکێ هاتە ڤەگەراندن بۆ تویرکی بەری راکێشانا تەپا دووێ، ل ڤی حالەتی رووداوا A کارتێکرنێ ناکەت لسەر ئەگەرا رووداوا B ئەوا دبیتە $\frac{5}{8}$. لێ هەکەر تەپا ئێکێ نە هاتە ڤەگەراندن بۆ تویرکێ بەری راکێشانا تەپا دووێ، ئەگەرێ B دێ بیتە $\frac{5}{7}$. دبێژن A و B دوو رووداوێن سەربەخو نە هەکەر دیاربوونا ئێك ژ وان یان نەدیاربوونا وێ کارتێکرن نەبیت لسەر ئەگەرێ دیاربوونا یا دی.

ئەگەرێن روودانێن سەربەخۆ

هەکەر A و B دوو روودانێن سەربەخو بن، دی:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

نموونە 5 هەژمارتنا ئەگەرێن روودانێن سەربەخو

ل تاقیكرنا هەرمەكی بۆ راكێشانا دوو تەپان ئێك ل دووڤ ئێك ژ تویرکەکی (9) تەپێن سۆر و (3) تەپێن کەسك تێدا هەبن، ئەگەرێ راكێشانا هەردوو تەپە د سۆربن بهەژمێرە، هەکەر تەپا ئێکێ بهێتە ڤەگەڕاندن بۆ تویرکێ بەری راكێشانا تەپا دووێ.

تەپا ئێكێ هاتە ڤەگەراندن بۆ تویرکی بەری راكێشانا تەپا دووێ، ل ڤی بیاڤی هەردوو روودان د سەربەخونە.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

چونکی

$$P(A) = P(B) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

بزاڤێ بکە کاژینێ تویرکەك هەیە (6) تەپێن سۆر و (4) تەپێن شین تێدا هەنە و برایێ وێ تویرکەك هەیە دوو تەپێن زەر و تەپەکا سۆر و (5) تەپێن رەش تێدا هەنە. هەر ئێکێ ژ وان تەپەك ژ تویرکێ خو راكێشا. ئەگەرێ راكێشانا دوو تەپێن سۆر چەندە؟

نموونە 6 هەژمارتنا ئەگەرێن روودانێن سەربەخو:

ل تاقیكرنا هەرمەكی بۆ هەلدا بەرکێ زارەکێ 3 جاران ئێك ل دووڤ ئێك. ئەگەرێ دیاربوونا ژمارەکا جووت ل هەرسێ جاران چەندە؟

رووداںا A «دیاربوونا ژمارەکا جووت ل جارا ئێکێ» رووداںا B «دیاربوونا ژمارەکا جووت ل جارا دووێ» رووداںا C «دیاربوونا ژمارەکا جووت ل جارا سێیێ».

هەرسێ رووداںا سەربەخۆ نە و ئەگەرێ هەر ئێکێ یەکسان $\frac{1}{2}$.

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

بزاڤێ بکە ل تاقیكرنا هەرمەكی بۆ هەلدانا پارچە دراڤەکێ کانزای 4 جاران ل دووڤ ئێك. ئەگەرێ دیاربوونا شێری ل هەر چارجاران چەندە؟

راهێنــــــــان

بەردەوامبوون د بیرکارییێدا

1 کیژ وان ژ هەردوو ریسایێن ئەگەران بۆ هەژمارتنا ئەگەرێ رووداںا $A \cup B$ یا دروستە د هەموو بیاڤاندا؟ بەرسڤا خو روونبکە.

2 چەوا ساخدکەی کو هەردوو رووداںا A و B د سەربەخونە، هەکەر تو ئەگەرێ هەر ئێکێ ژ وان و ئەگەرێ $A \cap B$ بزانی؟

راهێنانێن ئاراستەکری

3 ل تاقیكرنا هەرمەكی بۆ هەلدا بەرکێ زارەکێ. $A \cup B$ و $A \cap B$ دیاربکە، هەکەر رووداںا A «دیاربوونا ژمارەکا کێمتر ژ 5» بیت.

و رووداںا B «دیاربوونا ژمارەکا نە کێمتر ژ 3 » بیت.

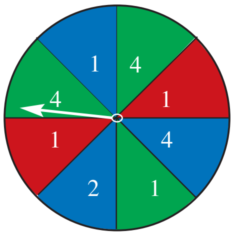
	نێر	مێ	سەرجەم
لەگەل	18	9	
دژ	12	25	
بێ را	20	16	
سەرجەم			

4 ل راپرسینەکێ لسەر بۆجوونا نووکرنا رێکێن پەروەردەیێ. راپرسین هاتە ئەنجامدان دگەل 100 مرۆڤێن کاردکەن دبۆوارێ پەروەردەییدا. خشتێ بەرامبەر ئەنجامێن ڤێ راپرسینێ دیاردکەت. خشتێ کۆپیبکە پاشی تەمامبکە. هەکەر ئێك ژ وان یێن راپرسین دگەل هاتیە ئەنجامدان بشێوەیەکی هەرمەکی هاتە هەلبژارتن ئەگەر چەندە کو ئەو مرۆڤە دژیێ نووکرنێ بیت یان یێ بێ بۆ جوون بیت؟

5 ل تاقیکرنا هەرمەکی بۆ راهێنانا (4)ێ.
رووداتا تەمامکەر دیاربکە بۆ رووداتا «ئەوێ هاتیە هەلبژارتن ژ وانێن بو چوونێن خو دیارکری بیت».

6 رووداتا تەمامکەر بکاربینە بۆ هەژمارتنا رووداتا «ئەوێ هاتیە هەلبژارتن ژ وانێن بوجوونێن خو دیارکری بیت».

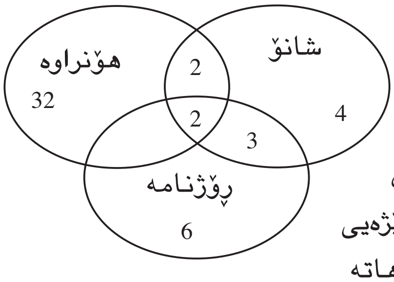
7 ل تاقیکرنا هەرمەکی بۆ زڤراندنا پەیکێ میلدار دوو جاران ل دووڤ ئێك، ئەگەرێ دیاربوونا ژمارە 4 ل هەردوو جاران چەندە؟



8 ل تاقیکرنا هەرمەکی بۆ زڤراندنا پەیکێ میلدار سێ جاران ل دووڤ ئێك. ئەگەرێ دیاربوونا رەنگێ سۆر پاشی رەنگێ کەسك پاشی رەنگێ سۆر جارەکا دی چەندە؟

پرسیار و بجهئینان

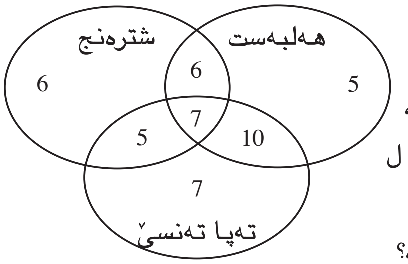
9 ل دوواناوەندیەکێ سێ یانەیێن چالاکیێن ژ دەرڤەی پۆلێ هەنە. یانەیەك بۆ هەلبەستێ (36) ئەندام هەنە، و یانەك بۆ شانووگەرییێ (11) ئەندام هەنە و یانەیەك بۆ رۆژنامێ (11) ئەندامان بخۆڤە دگرت. هندەك قوتابێ ئەندامن زێدەتر ل یانەیەکێ هەر وەکی یا دیار ل هێلکارێ بەرامبەر.
ئەندامەك هاتە هەلبژارتن بشێوەیەکی هەرمەکی.
ئەگەرێ ئەڤ ئەندامە سەر ب دوو یانەیان بیت ب کێماسی چەندە؟



10 هەڤال قوتابیە ل هۆبا ئێکێ ژ پۆلا یازدێ وێژەی کو (18) قوتابیان بخۆڤە دگرت، و خویشکا وی قوتابیە ل هۆبا دووێ ژ پۆلا یازدێ وێژەیی کو (20) قوتابیان بخۆڤە دگرت. هەلبژارتنا نوینەرێ هەر هۆبەکێ هاتە ئەنجامدان ب رێکا پشك کێشانێ. ئەگەرێ هەڤال و خویشکا خۆ ببنە نوێنەرێن هەردوو هۆبان چەندە؟

11 ئەگەرێ دیاربوونا خەت پاشی شێر و پاشی شێر. ل هەلدانا پارچەکی پارێ کانزای 3 جاران ل دووڤ ئێك چەندە؟

12 ل دەزگەهەكێ رەوشەنبیرییێ سێ یانە هەنە:
یانەیا شترەنجێ (24) ئەندام هەنە، و یانەیا تەپا مێزێ (29) ئەندام هەنە، و یانەیا هەلبەستێ (28) ئەندام هەنە، هندەك كەس ئەندامن پتر ل یانەیەكێ هەر وەكی یا دیار ل هێلكارێ بەرامبەر ئەگەرێ هەلبژارتنا ئەندامەكێ ب هەرەمەكی كو سەر ب دوویانەیان بیت ب زێدەهی چەندە؟



13 A و B و C روودانێن سەربەخۆنە و ئەگەرێن وان ئەڤەنە: $P(A)=0.5$ ، $P(B)=0.25$
$P(C)=0.75$ ڤان ئەگەران بهەژمێرە: أ $P(A\cap B)$ ، ب $P(A\cap C)$، ج $P(A\cup B)$.

ل راهێنانان ژ 14 هەتا 16، دیاربكە ئەرێ هەردوو روودان A و B سەربەخۆنە یان نە، و ئەگەرێ $A\cap B$ بهەژمێرە.

14 تاقیكرنا هەرەمەكی: هەلدانا بەركێ زارێ. A روودانا «دیاربوونا ژمارەكا جووتە» B روودانا «دیاربوونا 2 یان 4 ».

15 تاقیكرنا هەرەمەكی: هەلدانا بەركێ زارێ. A روودانا «دیاربوونا ژمارە 6» B روودانا «دیاربوونا ژمارەكا كێمتر ژ 5 ».

16 تاقیكرنا هەرەمەكی: هەلدانا بەركێ زارێ. A «روودانا دیاربوونا ژمارە 4 » B روودانا «دیاربوونا ژمارەكا مەزنتر ژ 3 ».

17 فرۆكڤانی: ئامارێن كۆمپانیەكا فرۆكەڤانیێ دیاردكەت كو گەشتێن وێ ژ تەهران بۆ هەڤلێرێ ل ژڤانا دروست دگەهن 92% .
گەشتێن وێ ژ هەڤلێرێ بۆ عومان دەست پێدكەن ل ژڤانا دروست 97% ژ جاران.
كرمانجی دڤێت ب گەشتەكێ رابیت ژ تەهران بۆ عومان و دهەڤلێرێرا ببۆرت – ئەگەرێ فرۆكە ل ژڤانا خۆ بگەهتە هەڤلێرێ و ل ژڤانا خۆ دەستپێبكەت ژ هەڤلێرێ بۆ عومان چەندە؟

18 ئەگەرێ ئامادەبوونا كامیرانی ل ئاهەنگێ 80% و ئەگەرێ ئامادەبوونا كاروانێ 95% . ئەگەرێ هەردوو پێكڤە ل ئاهەنگێ ئامادەبن چەندە؟ بۆ زانین ئامادەبوونا ئێكی ژ وان كارتێكرنێ ناكەت لسەر ئامادەبوونا یێ دی؟

19 تویركەكێ (15) تەپێن رەنووسكری ژ 1 هەتا 15 تێدا هەنە. ڤیانێ تەپەك ژ تویركێ راكێشا پاشی ڤەگەراند بەری راكێشانا تەپێ بۆ جارا دووێ.

أ ئەگەر چەندە كو هەردوو تەپە ژمارە 8 لسەر بیت؟

ب ئەگەرێ كو ڤیان تەپا هەلگرا ژمارە 8 جارەكا بتنێ رابكێشت چەندە؟

20 تاقیكرنا هەرەمەكی: هەلدانا دوو بەركێن زارێ ئێك یێ سۆر و یێ دی یێ شین. A روودانا «دیاربوونا ژمارە 1 ل بەركێ سۆر» و رووداناB «دیاربوونا سەرجەمێ هەردوو ژماران كێمتر ژ 4».

1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6
2 1	2 2	2 3	2 4	2 5	2 6
3 1	3 2	3 3	3 4	3 5	3 6
4 1	4 2	4 3	4 4	4 5	4 6
5 1	5 2	5 3	5 4	5 5	5 6
6 1	6 2	6 3	6 4	6 5	6 6

أ $P(A)$ و $P(B)$ بهەژمێرە.

ب وان ئەنجامێن رووداناA $A\cap B$ ساخدكەن بنڤیسە، و ئەگەرێ ڤێ رووداناێ دەرئەنجامبكە.

ج بەرسڤێن هەردوو پرسیارێن هەر دوو لقان بكاربینە، دابریارێ بدەی ئەرێ ئەو هەردوو رووداند سەربەخۆنە یان نە؟

21 5 قوتابی هـاتنە سەر دەپی شانوگەریا قوتابخانێ، هەر قوتابیەکی جهەك ژ دەه ریزێن شانوگەریێ هەلبژارت بۆ روینشتنا خۆ. ئەگەری دوو قوتابی بکێماسی ئێك ریزێ هەلبژێرن چەندە؟

22 هزرکرنەکا رەخنەگر: هەکەر A و B دوو رووداوێن سەربەخۆ بن. دیاربکە کو هەردوو رووداوێن تەمامکەر $\bar{A}$ و $\bar{B}$ سەربەخۆنە؟

23 بنڤیسە: دوو رێیان بێژە بۆ هەژمارتنا ئەگەری بدەست کەفتنا خەت بکێماسی جارەکێ ل دەمێ هەلدانا پارچەکی پاری کانزای دووجاران لدووڤ ئێك.

24 پارچەکی پاری کانزای هاتە چیکرنێ بشێوەیەکی کو ئەگەری بدەست کەفتنا شێری ل هەلدانا پارچێ پارەی دووجارانی ئەگەری بدەست کەفتنا خەتێ بیت. ئەگەری دیاربوونا هەر ئێك شێر و خەت دیاربکە.

لێنێرینەك بۆ پاش

25 شیرینێ ل ماوەیێ 10 حەفتیان تێکرایێ ژمارا وان کیلومەترین ترومبیلا وێ بری ب گالونەکا پانزینێ تومارکر، و ئەڤەبوون: 18، 17، 19، 18، 18، 25، 29، 30، 26، 19.

أ ناڤەند و ناڤەنداری و باو بۆ ڤان پێداییان دیاربکە.

ب مەزنترین بها و بچووکترین بها و مەودای بینەدەر.

ج لێکنەچوون و لادانا پیڤانەی بهەژمێرە.

د ئەو پێداییێن ژ ناڤەندی دویر دکەڤن پتر ژ ئێك لادانا پیڤانەی دیاربکە.

لێنێرینەك بۆ پێش

26 سامپلەکی (نموونەیەك) شوفێران 3510 مروڤان بخۆڤە دگرت. 1950 ژ وان زەلامن و 103 ژ وان نەخۆشیا کویریا رەنگان هەنە، (6) ژ وان کەسین نەخۆشیا کویریا رەنگان هەین ئافرەتن. ئەگەری هەلبژارتنا مرۆڤەکی بهەرەمەکی زەلام بیت یان ژ نەخوشیێن کویریا رەنگان بیت چەندە؟

وانە 4

تەکنیکێن هەژمارتنێ Counting techniques

بۆچی؟
شرین تەکنیکێن هەژمارتنێ بکاردئینت بۆ دیارکرنا ڕێکێن دشیاندا بۆ نمایشکرنا ئەوان تەختێن وێ وێنەکرین.

ئارمانج

- بکارئینانا تەکنیکێن هەژمارتنێ بۆ دیارکرنا ئەگەران.

زاراڤ

Vocabulary

گۆڕین
Permutations

ڕێزبەندی
Arrangements

گونجین
Combinations

ڕێسایا بنەڕەت یا هەژمارتنێ
Fundamental counting principle

هێلکاریێ داری
Tree diagram

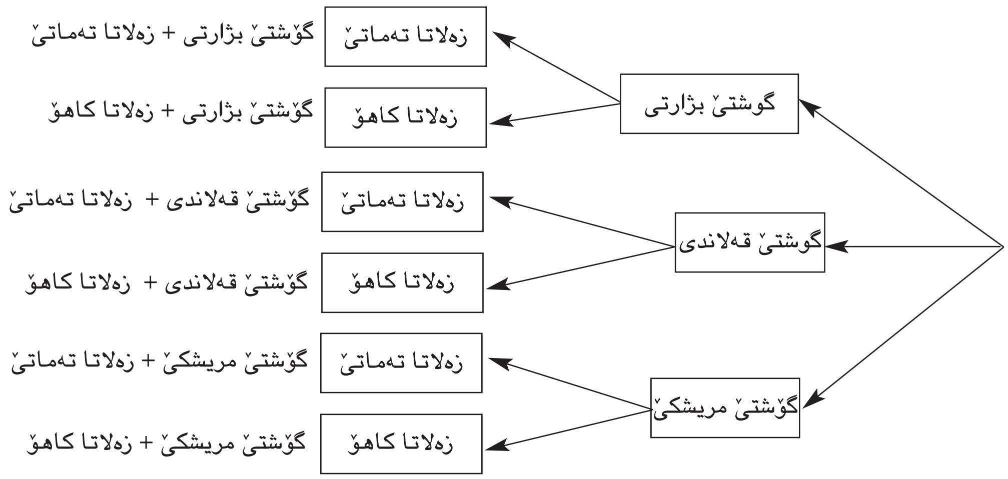
تو دزانی کو هەژمارتنا ئەگەرێ ڕوودانەکێ ل تاقیکرنەکا هەرەمەکی یا ئەگەرێن وێ یەکسان دەردکەڤیت ب دابەشکرنا ژمارا ئەنجامێن ڕوودانێ ساخدکەن لسەر هەموو ژمارێن ئەنجامان. ڤێجا لفێدەرێ پێتڤیاتی پەیدابوو بۆ تەکنیکێن هەژمارتنێ، دا هاریکاریێ بکەت بۆ دیارکرنا ژمارێن وەکی ڤان. خشتێ ل خوارێ هندەك تەکنیکێن هەژمارتنێ ئەوێن تو بەری نۆکە فێربوویی دیاردکەت.

تەکنیك	ڕوونکرن	نموونە
ڕێسایا بنەڕەت بۆ هەژمارتنێ **Fundamental counting principle**	ئەڤ ڕێسایا دبێژت: هەکەر m ڕێێ بۆ هەلبژارتنا ئێکێ هەبن و n ڕێ بۆ هەلبژارتنا دووێ هەین دێ $m \times n$ ڕێێ هەبن بۆ هەردوو هەلبژارتنان پێکڤە.	دانەکێ خوارنێ ژ سێنیکەکێ ژ 5 سێنیکێن زەلاتێ و ژ سینیکەکێ ژ 3 سێنیکێن خوارنا سەرەکی پێکدئیت، تو دشێی خوارنا خۆ ب $3 \times 5 = 15$ ڕێیان هەلبژێری.
لێکداوێ n **factorial n**	هەکەر n ژمارەکا نەیا سالب بیت، لێکداوێ n دبیتە: $n! = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 1 \times 2 \times \ldots \times n & n>0 \end{cases}$	$3! = 3 \times 2 \times 1$ $0! = 1$
گۆڕین **Permutations**	گۆڕینا n تشتان دبیتە ڕێزکرنا وان ب ڕێکخستنەکا دیارکری. ژمارا گورینا n تشتان دبیتە لێکداوێ n ئانکو $n!$.	گۆڕینا پیتێن A, B, C ئەڤەیە ABC, BCA, CAB ACB, CBA, BAC و ژمارا وان دبیتە $3! = 6$
ڕێزبەندی **Arrangements**	ڕێزبەندیا r تشتان ژ n تشتێن بنەڕەت دبیتە هەلبژارتنا r تشتان ژ n تشتێن بنەڕەت ب ڕێکخستنەکا دیارکری. ژمارا ڕێزبەندیا r تشتان ژ n تشتان دبیتە. $_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$	AB و BA دوو ڕێزکرنێن جیاوازن بۆ دوو پیتان ژ سێ پیتێن بنەڕەت A, B, C ژمارا ڕێزبەندیا دوو پیتان ژ سێ پیتێن بنەڕەت دبیتە $_3P_2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$
گونجین **Combinations**	گونجینا r تشتان ژ n تشتێن بنەڕەت دبیتە هەلبژارتنا r تشتان ژ n تشتێن بنەڕەت بێ گرنگی دان ب ڕێزکرنێ، ژمارا گونجینا r تشتان ژ n تشتێن بنەڕەت دبیتە. $_nC_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$	$\{A,B\}$ دبیتە گونجینا دوو پیتانە ژ سێ پیتان A, B, C ژمارا گونجینا دوو پیتان ژ 3 پیتێن بنەڕەت دبیتە 3. $_3C_2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$

نموونه 1

بکارئینانا هێلکاریێ داریێ بۆ هەژمارتنێ

مرۆڤەك جۆ خوارنگەهێ بۆ خوارنا ڤراڤینێ. دڤێت ئەو جۆرەکی ژ 3 جۆرێن گۆشتی هەلبژێریت: گۆشتێ بژارتی و گۆشتی قەلاندی و گۆشتێ مریشکێ، و جۆرەکێ ژ دوو جۆرێن زەلاتێ هەلبژێرت زەلاتا کاهۆ و زەلاتا تەماتێ. هێلکاریێ داریێ بۆ دیارکرنا هەموو رێکێن دشیاندا دروستبکە بۆ هەلبژارتنا جۆرەکێ گۆشتێ و جۆرەکێ زەلاتێ. ئەگەریێ ئەو مرۆڤە گۆشتێ بژارتی و زەلاتێ هەلبژێریت چەندە؟

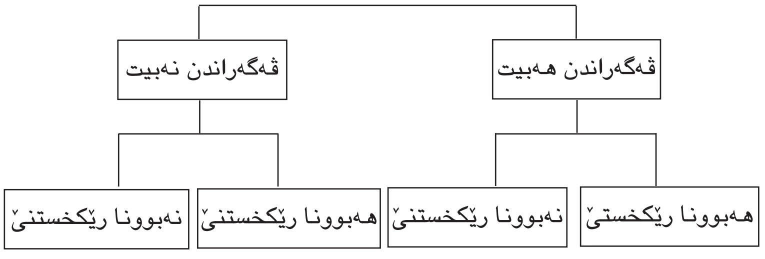


ئەڤ مرۆڤە دشێت جورەکی گۆشتی و جورەکی زەلاتێ ب 6 رێیان هەلبژێرت. ئەو دشێت خوارنا ژ گۆشتی بژارتی و زەلاتێ ب دوو رێیان هەلبژێرت. ژ وێ دیاردبیت کو ئەگەریێ هەلبژارتنا گۆشتێ بژارتی و زەلاتێ دبیتە $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

بزاڤێ بکە ئەگەریێ هەلبژارتنا گۆشتی و زەلاتا تەماتێ چەندە؟

هێلکاریێ داریێ دهێتە بکارئینان هەکەر ژمارا ئەنجامان یا کێم بیت. لێ ئەڤ کارە ل گەلەك جاران نەیی ساناهیە. هەکەر تو هەولبدەی هێلکاریێ داریێ دروستبکەی بۆ دیارکرنا ژمارەیێن ژ پێنج رەنووسێن جیاواز پێکدئێن بکارئینانا رەنووسێن 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 دێ پەلگێن داریێ بنە گەلەك، ڤێجا ل ڤێدەریێ پیتڤیاتی پەیدا بوو بۆ بۆ هندەك تەکنیکێن نوو بۆ هەژمارتنێ، و چەمکێ هەژمارتنێ یێ بنەرەت ئێکە ژ ئەڤان تەکنیکان، و ئەڤ چەمکە دبێژت هەلبژارتنا r دانەیان ژ n دانەیان، دانەیەك ل دووڤ ئێکی دبیتە ئەنجامێ لێکدانا هەموو هەلبژارتنێن دشیاندا هەکەر هەر دانەیەك بهێتە هەلبژارتن. و ئەنجام دێ یا جیاواز بیت هەکەر دانێ هاتیە هەلبژارتن بهێتە ڤەگەراند بۆ کۆمەلێ بەری هەلبژارتنا دانەیەکی دی یان نە هێتە ڤەگەراندن. و هەروەسا هەکەر رێکخستن یا گرنگ بیت یان نا و ئەڤە دبیتە 4 حالەت.

ژمارا رێیێن راکێشانا نموونەیەکێ ژ r دانەیان ژ ناڤ n دانەیان کو $r \le n$.



n^r ${}_{n+r-1}C_r$ ${}_nP_r$ ${}_nC_r$

تێبینی
هەکەر بەحسێ جۆرێ راکێشانێ د پرسیارێدا نەهاتبووکرن، راکێشانێ ڤەگەراندن نابیت و رێکخستن نابیت.

نموونە 2 **بکارئینانا یاسایا بنەرەت یا هەژمارتنێ بۆ دیارکرنا ژمارا دانەیێن نموونەیەکێ:**

چەند ژماران کو هەر ئێک ژ (5) رەنووسێن جیاواز تو دشێی پێکبینی بکارئینانا رەنووسێن 1، 2، 3، 4، 5، 6 ؟ بۆ پێکئینانا شێوێ ڤان ژماران، ل دەستپێکێ رەنووسێ ئێکان ئەوێ دشیاندا ژ ناڤ (6) رەنووسان هەلبژێرە ژمارا هەلبژارتنان دبیتە (6) ، پاشی رەنووسێ دەهان، تو دشێی ژناڤ وان (5) رەنووسێن مایین هەلبژێری، ژمارا هەلبژارتنان دبیتە (5). و هەروەسا ژمارا هەلبژارتنێن رەنووسێ سەدان دبیتە 4 . و ژمارا هەلبژارتنێن رەنووسێ هزاران دبیتە 3 ، و ژمارا هەلبژارتنێن دەهان هزاران دبیتە 2 . یاسایا بنەرەت یا هەژمارتنێ بکاربینە دا بزانی چەند ژمارە پێکدهێن.

$720 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2$ ، تو دشێی 720 ژماران پێکبینی.

بزاڤێ بکە چەند ژمارەیێن ژ 4 رەنووسێن جیاواز تو دشێی پێکبینی بکارئینانا رەنووسێن 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7؟

نموونە 3 **دیارکرنا ژمارا رێکێن راکێشانا نموونەیەکێ**

7 تەپێن رەنووسکری ژ 1 هەتا 7 دسندوقەکێدا هەنە، ژمارا رێکێن راکێشانا 3 تەپان ل ڤان بارێن ل خوارێ بێنەدەر.

أ هەبوونا ڤەگەراندنێ و هەبوونا رێکخستنێ. ب هەبوونا ڤەگەراندنێ و نەبوونا رێکخستنێ.

ج نەبوونا ڤەگەراندنێ و هەبوونا رێکخستنێ. د نەبوونا ڤەگەراندنێ و نەبوونا رێکخستنێ.

أ)	هەبوونا ڤەگەراندنێ و هەبوونا رێکخستنێ	$n^r = 7^3 = 343$
ب)	هەبوونا ڤەگەراندنێ و نەبوونا رێکخستنێ	${}_{n+r-1}C_r = {}_{7+3-1}C_3 = {}_9C_3 = 84$
ج)	نەبوونا ڤەگەراندنێ و هەبوونا رێکخستنێ	${}_7P_3 = 210$
د)	نەبوونا ڤەگەراندنێ و نەبوونا رێکخستنێ	${}_7C_3 = 35$

بزاڤێ بکە 10 تەپێن رەنووسکری ژ 1 هەتا 10 د سندوقەکێدا هەنە، ژمارا رێکێن راکێشانا (4) تەپان ل ڤان بارێن ل خوارێ بینەدەر:-

أ هەبوونا ڤەگەراندنێ و هەبوونا رێکخستنێ. ب هەبوونا ڤەگەراندنێ و نەبوونا رێکخستنێ.

ج نەبوونا ڤەگەراندنێ و هەبوونا رێکخستنێ. د نەبوونا ڤەگەراندنێ و نەبوونا رێکخستنێ.

نموونە 4 **هەژمارتنا ئەگەرێ بکارئینانا تەکنیکێن هەژمارتنێ**

20 تەپێن رەنووسکری ژ 1 هەتا 20 د سندوقەکێدا هەنە، دوو تەپە هاتنە راکێشان ل دووڤ ئێک بێی ڤەگەراندنا تەپا ئێکێ بۆ ناڤ سندوقێ بەری راکێشانا تەپا دووێ.

ئەگەر چەندە کو هەر تەپەک رەنووسەکێ کت لسەر بیت؟

هەر ئەنجامەک ژ ئەنجامێن ڤێ تاقیکرنا هەرمەکی دبیتە جووتێ رێکخستی (n_1, n_2) کو n_1 هێمایێ وێ ژمارا لسەر تەپا ئێکێیە، n_2 هێمایێ وێ ژمارا لسەر تەپا دوویێیە. ژمارا ئەنجامان لدووڤ یاسایا بنەرەت یا هەژمارتنێ دبیتە ئەنجامێ لێکدانا ژمارا تەپێن دناڤ سندوقێدا ل دەمێ راکێشانا تەپا ئێکێ (20) دگەل ژمارا تەپێن دناڤ سندوقێدا ل دەمێ راکێشانا تەپا دووێ (19) ئانکو $380 = 20 \times 19$. ژمارا ئەنجامێن روودانێ ساخدکەن دبیتە ئەنجامێ لێکدانا ژمارا وان تەپەیێن ژمارا کت هەلدگرن ل دەمێ راکێشانا تەپا ئێکێ (10) دگەل ژمارا وان تەپەیێن ژمارا کت هەلدگرن ل دەمێ راکێشانا تەپا دووێ (9) ئانکو $10 \times 9 = 90$. ژبەر ڤێ چەندێ ئەگەرێ کو هەردوو تەپە ژمارا کت هەلگرن دبیتە $\frac{90}{380} = \frac{9}{38}$

خالا چاڤدێرییێ √ ئەگەر چەندە هەردوو تەپا ژمارەیێن جووت لسەر بن؟

نموونه 5

هەژمارتنا ئەگەرێ بکارئینانا تەکنیکێن هەژمارتنێ

سندۆقەکێ 6 تەپێن سۆر و 4 تەپێن سپی تێدا هەنە، دوو تەپە پێکڤە ژ سندۆقێ هاتنە ڕاکێشان، ئەگەرێ هەر تەپەك یا سۆر بیت چەندە؟

ژمارا ئەنجامێن ڤێ تاقیکرنێ دبیتە ژمارا گونجینا دوو تەپان ژ 10 تەپێن بنەرەت $(4+6)$

$${}_{10}C_2 = \frac{10!}{2!(10-2)!} = 45$$

ژمارا وان ئەنجامێن ڕوودانێ ساخدکەن دبیتە ژمارا گونجینا دوو تەپان ژ 6 تەپان (ژمارا تەپێن سۆر. ئانکو: ${}_6C_2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15$

ئەگەرێ هەر تەپەیەك یا سۆر بیت دبیتە $\frac{15}{45} = \frac{1}{3}$.

بزاڤێ بکە ئەگەرێ هەر تەپەیەك یا سپی بیت چەندە؟

نموونه 6

هەژمارتنا ئەگەرێ بکارئینانا تەکنیکێن هەژمارتنێ.

کارگێریا زانکۆیێ ژمارەکا 4 ڕەنووسی بۆ دۆسیا هەر قوتابیەکی پۆلا ئێکێ تەرخاندکەت. ئەگەرێ ژمارا کاروان ژ 4 ڕەنووسێن ئێك ل دووڤ ئێك پێکبینن دەستپێکرن ژلایێ چەپێ چەندە؟

بۆ دیارکرنا ژمارا ئەنجامێن ئەڤێ تاقیکرنێ، دڤێت ئەم دیاربکەین ئەرێ ئەنجام ڕێزکرنە بۆ 4 ڕەنووسان ژ 10 ڕەنووسێن بنەڕەت یان گونجینە بۆ 4 ڕەنووسان ژ 10 ڕەنووسێن بنەرەت. چونکی ڕێزکرنا ژمارێن دۆسیان ژ لایێ چەپێ بۆ لایێ ڕاستێ یا گرنگە. ڤێجا ئەنجام ڕێزکرنە و نە گونجینە.

ژمارا ڤان ئەنجامان $ {}_{10}P_4 = \frac{10!}{4!} = 5040$

ئەنجامێن ڤێ ڕوودانێ ساخدکەن دبنە: 0123، 1234، 2345، 3456، 4567، 5678، 6789. ژمارا وان دبیتە 7 و دێ دیاربیت کو ئەگەرێ ژمارا کاروان ژ 4 ڕەنووسێن ل دووڤ ئێك پێکبێت دەستپێکرن ژ ڕەخێ چەپێ دبیتە $\frac{1}{720} = \frac{7}{5040}$.

بزاڤێ بکە ئەگەرێ ژمارا دۆسییا بەیاری ژ 4 ڕەنووسێن ل دووڤ ئێك بن چ خواندنا وێ ژ لایێ ڕاستێ بۆ لایێ چەپێ یان بەرۆڤاژی بیت چەندە؟

نموونه 7

هەژمارتنا ئەگەرێ بکارئینانا تەکنیکێن هەژمارتنێ.

7 تەپێن سۆر و 3 تەپێن ڕەش د سندوقەکێدا هەنە. 3 تەپە پێکڤە ژ وێ سندۆقێ هاتنە ڕاکێشان. ئەگەرێ کو تەپەك بکیماسی یا سۆر بیت چەندە؟

ژمارا ئەنجامێن ڤێ تاقیکرنێ دبیتە گونجینا 3 تەپان ژ 10 تەپان $(3+7)$ چونکی تەپە پێکڤە هاتنە ڕاکێشانە و بوار نینە بۆ ڕێزکرنێ. ئانکو

$${}_{10}C_3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120$$

ئەنجامێن ڤێ ڕوودانێ ساخدکەن ئەڤەنە، تەپەکە سۆر و دوو تەپێن ڕەش، دوو تەپێن سۆر و ئێکا ڕەش، و سێ تەپێن سۆر.

ژمارا ئەنجامێن تەپەکا سۆر و دوو تەپێن ڕەش ${}_7C_1 \times {}_3C_2 = 7 \times 3 = 21$

ژمارا ئەنجامێن دوو تەپێن سۆر و ئێکا ڕەش ${}_7C_2 \times {}_3C_1 = 21 \times 3 = 63$

ژمارا ئەنجامێن هەرسێ تەپە درەش بن دبیتە ${}_7C_3 = 35$

ژمارا ئەنجامێن ڕوودانێ ساخدکەن دبیتە $21 + 63 + 35 = 119$.

ژوێ دئێتە دەرئەنجامکرن کو ئەگەرێ ئێك ژ هەرسێ تەپان بکێماسی یا سۆر بیت دبیتە $\frac{119}{120}$
چێدبوو ئەڤ پرسیارە بکارئینانا روودانا تەمامکەر هاتبە شیکارکرن. رووداا تەمامکەر بۆ رووداا A «تەپەك بکێماسی ژ هەرسێ تەپان یا سور بیت» دبیتە $\overline{A}$ «هەرسێ تەپە د رەش بن».
ژمارا ئەنجامێن رووداا تەمامکەر ساخدکەن دبیتەگونجینا 3 تەپان ژ 10 تەپێن بنەرەت. ئەو دبیتە $P(\overline{A})=\frac{1}{120}$ ڤێجا . $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{1}{120}=\frac{119}{120}$.

بزاڤێ بکە ئەگەرێ کو ئێك تەپە بزێدەهی یا سۆر بیت چەندە؟

ڕاهێـــــــنـــــان

بەردەوامبوون د بیرکارییدا

1 پەیوەندیا لناڤبەرا هێلکارێ دارێ ویاسایا بنەڕەت یا هەژمارتنێ روونبکە.

2 پەیوەندیا لناڤبەرا یاسایا بنەرەت یا هەژمارتنێ و هەژمارتنا ژمارا ڕێزبەندیان روونبکە.

ڕاهێنانێن ئاراستەکری

3 دڤیا ل تاقیکرنەکا هەرەمەکی 3 پارچەیێن دراڤێ کانزای هاوشێوە هەلدەت. هێلکارێ دارێ بکاربینە بۆ دیارکرنا هەموو ئەنجامێن ڤێ تاقیکرنێ، و وی هێلکارێ بکاربینە بۆ هەژمارتنا ئەگەرێ دیاربوونا دوو روویێن شێرێ بکێماسی.

4 مرۆڤەك چۆ پیشانگەهەکا ترومبێلان بۆ کرینا ترومبێلەکێ، ئەوی دیت جورێ ترومبێلێن فۆرد و مارسێدس و تویوتا ل پێشانگەهێ هەنە. و دیت هەر جۆرەکی رەنگێ سپی و رەش و زیڤی هەنە. هێلکارێ دارێ بکاربینە بۆ هەژمارتنا وێ ئەگەرێ کو ترومبێلا مارسێدس بکڕت.

5 تو دشێی چەند ژمارەیێن 3 رەنووسی پێکبینی بکارئینانا هەموو رەنووسان ژبلی سفرێ؟

6 (11) تەپێن رەنووسکری ژ 1 هەتا 11 د سندۆقەکێدا هەنە. ژمارا رێێن هەلبژارتنا 3 تەپان بینەدەر ل ڤان بارێن ل خوارێ:-

أ هەبوونا ڤەگەراندنێ و هەبوونا رێکخستنێ.

ب هەبوونا ڤەگەراندنێ و نەبوونا رێکخستنێ.

ج نەبوونا ڤەگەراندنێ و هەبوونا رێکخستنێ.

د نەبوونا ڤەگەراندنێ و نەبوونا رێکخستنێ.

7 13 تەپێن رەنووسکری ژ 1 هەتا 13 دسندۆقەکێدا هەنە، ل تاقیکرنا هەرەمەکی دڤیا دوو تەپان رابکێشت ئێك ل دووڤ ئێك. ئەگەرێ کو هەردوو تەپە ژمارەیێن کێمتر ژ 10 لسەر بن چەندە؟ هەکەر تەپا ئێکێ بێتە ڤەگەراندن بۆ سندۆقێ بەری راکێشانا تەپا دووێ، و هەکەر ڤەگەراندن نەبیت.

8 7 تەپێن رەش و 3 تەپێن سۆر دتویرکەکیدا هەنە،، ل تاقیکرنا هەرەمەکی دڤیا دوو تەپان پێکڤە رابکێشت. ئەگەر چەندە کو ئەو هەردوو تەپە درەشبن؟

9 پەیڤا نهێنی یا چوونا دناڤ ئینتەرنێتیدا پێکدهێت ژ 5 پیتێن ئەبجەدیا ئینگلیزی. نیان (26) کاغەزێن هاوشێوە دانانە دناڤ تویرکەکێدا کو هەر ئێك ژ وان کاغەزان هەلگرا پیتەکا ئەبجەدیا ئینگلیزی بوو ژمارا وان 26 بوو، پاشی 5 کاغەز ژ تویرکی راکێشان. ئەگەر چەندە ئەو پیتە ژ پیتێن ل دووڤ ئێك بن ژ ئەبجەدیا ئینگلیزی؟

10 (9) تەپێن سۆر و (4) تەپێن رەش د تویرکەکیدا هەنە، هەموو ئەو تەپە دهاوشێوەبوون ژبلی رەنگ جیاوازیێ. ل تاقیکرنا هەرەمەکی دڤیا (3) تەپان رابگێشن. ئەگەر چەندە کو بزێداهی دوو تەپە ژ وان هەرسێ تەپان د رەشبن؟

پرسیار و بجهئینان

11 ژمارا قوتابیان ل پۆلەکێ (40) قوتابی بوون، (25) ژ وان قوتابیان ل ئەزموونا بیرکاریێ دەرچوو بوون و (28) ل ئەزموونا زمانێ بیانی دەرچوو بوون و (15) قوتابی ل هەردوو ئەزموونان پێکڤە دەرچوو بوون. ل تاقیکرنا هەرەمەکی دڤیا قوتابیەکی پۆلێ هەلبژێرین ب رێیا دەنگدانێ دا ببتە نوێنەرێ وان. ئەگەر چەندە ئەو قوتابیە ژ وان بیت کو:

أ بتنێ ل ئەزموونا بیرکاریێ دەرچووبیت.

ب بتنێ ل ئەزموونا زمانێ بیانی دەرچووبیت.

ج ل هەردوو ئەزموونان دەرچووبیت.

د ل هەردوو ئەزموونان دەرنەچووبیت.

12 هێلکارێ دارێ دروستبکە بۆ دیتنا هەموو وان ژمارەیێن ژ دوو رەنووسێن جیاواز پێکهاتی، کو تو بشێی ژ ڤان رەنووسان دروستبکەی 1، 2، 3، 4، 5.

13 هەکەر (5) تەپێن رەنووسکری ژ 1 هەتا 5 د سندۆقەکێدا هەبن، و دوو تەپان ئێك ل دووڤ ئێك رابکێشن دگەل ڤەگەراندا تەپا ئێکێ بەری راکێشانا تەپا دوویێ. ئەگەر چەندە ئەو هەردوو تەپە هەلگرێن هەمان رەنووس بن؟

14 18 گلۆپێن کارەبێ د سندۆقەکێدا هەنە و دناڤ واندا (5) د بێ مفانە. ل تاقیکرنا هەرەمەکی دڤیا دوو گلۆپان رابکێشن ئێك ل دووڤ ئێك بێی ڤەگەڕاندنا گلۆپا ئێکێ بەر راکێشانا یا دوویێ. ئەگەر چەندە کو:

أ هەردوو گلۆب دبێ مفابن.

ب بکێماسی ئێك ژ وان یا بمفابیت.

15 ئەگەرێ دیاربوونا روویێ خەت دووجاران و روویێ شێر دوو جاران ل هەلدانا پارچەکی دراڤێ کانزای 4 جاران چەندە؟

1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6
2 1	2 2	2 3	2 4	2 5	2 6
3 1	3 2	3 3	3 4	3 5	3 6
4 1	4 2	4 3	4 4	4 5	4 6
5 1	5 2	5 3	5 4	5 5	5 6
6 1	6 2	6 3	6 4	6 5	6 6

16 ل تاقیکرنا هەرەمەکی دڤیا دوو بەرکێن زارێ هەلدەن، ئێکا سۆر و ئێکا زەر بوو، و سەرجەمێ هەردوو ژمارەیێن دیاربوویێن تۆماربکەن. ئەگەرێ بهەژمێرە بۆ:

أ سەرجەمێ هەردوو ژماران کت بیت یان مەزنتربیت ژ 11 .

ب سەرجەمێ هەردوو ژماران کت بیت یان بچووکتربیت ژ 8.

ج سەرجەمێ هەردوو ژماران کت بیت و ژ رەنووسەکی پێکهات بیت.

ژمارەی خانەکان	پارچە
2	وێرانکەر
3	پاپۆڕا جەنگی
3	پاپۆڕا ژێر ئاڤ
4	پاپۆڕا ئازووقی
5	هەڵگری فرۆکان

17 ل یاریا «چەنگێ دەریاییێ» هەر یاری زانەکی ل دەستپێکێ و یرانکەرەك و پاپۆڕەکا چەنگی و پاپۆرەکا ژێر ئاڤ و پاپۆڕەکا ئازووقێ و هەلگرەکا فرۆکان هەیە، و لسەر تابلۆیەکا چوارگۆشەی دانانە ئەو تابلۆیە ژ 100 خانەیان پێکهاتیە. خشتێ ل بەرامبەر ژمارا وان خانەیان دیاردکەت کو هەر پارچەك داگیردکەت لسەر تابلۆیێ.
ئەگەر چەندە کو یاریزانێ ئێکێ ل دانانا ئێکێ ل چوو پارچەیێن یاریزانێ دووێ نەدەت؟

18 ئازادی 5 بەرکێن زارێ هەلدان و ئەوێن ل وێنەی دیار بدەست کەفتن. ئەوی بریاردا بەرکێن زارێ ئەوێن 4 خال لسەر بهێلت، و هەردوو زارێن دی جارەکا دی هەلدان.

أ ئەگەر چەندە هەر 5 بەرکێن زارێن ئازادی 4 خال لسەربن؟

ب ئەگەر چەندە بکێماسی 4 بەرکێن زارێ 4 خال لسەر بن؟

ج ئەگەر چەندە بتنێ 3 بەرکێن زارێ 4 خال لسەر بن؟

د پەیوەندی چییە لناڤبەرا بەرسڤێن أ ، ب ، جـ ؟

قوتابیەك هەولددەت بۆ شکاندنا پەیڤا نهێنی ئەوا رێددەت دابچیتە دناڤ بژمێرە قوتابخانێدا. ئەو پەیڤا نهێنی ژ 5 رەنووسان پێکدئێت:

19 ئەگەر چەندە ئەو قوتابیە پەیڤا نهێنی بشکینیت هەکەر دووبارەبوونا رەنووسان رێ پێ بدەت؟

20 ئەگەر چەندە ئەو قوتابیە پەیڤا نهێنی بشکینیت هەکەر دووبارەبوونا رەنووسان رێ پێ نەدەت؟

21 ئەگەری چەندە ئەو قوتابیە بشێت پەیڤا نهێنی بشکینیت هەکەر دووبارەبوونا رەنووسان نەبیت و سەرجەمێ وان رەنووسان ببیتە 10 ؟

22 A و B دوو ڕوودان بۆ تاقیکرنەکا هەرەمەکی. $P(A)=0.4$ و $P(B)=0.5$. $P(A\cap B)=0.2$

أ ئەرێ ئەو هەردوو ڕوودان سەربەخۆنە؟

ب ئەگەرێ $P(A\cup B)$ بهەژمێرە.

23 سێ هەسپان A و B و C پێشبرکی دکرن، ئەگەرێ برنا هەر هەسپەکی چەندە؟ بۆ زانین ئەگەرێ برنا A دوو جارانی ئەگەرێ برنا B یە، و ئەگەرێ برنا B دوو جارانی ئەگەرێ برنا C یە. ئەگەرێ برنا B یان C چەندە؟

24 ئافرەتەك و زەلامێ وێ ژیێ هەر ئێك ژ وان شێست سال بوو. ئەگەرێ گەهشتنا ژیێ زەلامی بو حەفتی سالیێ $\frac{1}{4}$ بوو، و ئەگەرێ گەهشتنا ژیێ ئافرەتا وی بۆ حەفتی سالیێ $(\frac{1}{3})$بوو.

أ ئەگەر چەندە کو پێکڤە هەردوو بگەهنە حەفتێ سالی؟

ب ئەگەر چەندە کو ب کێماسی ئێك ژ وان بگەهیتە حەفتیێ سالی؟

ج ئەگەر چەندە کو چوو ژ وان نەگەهنە حەفتێ سالی؟

لێنێرینەك بۆ پاش

دوو بەرکێن زارێ هەلدان

25 ئەگەرێ سەرجەمێ هەر دوو ژمارێن دیاربووین 12 بیت چەندە؟

26 ئەگەرێ سەرجەمێ هەر دوو ژمارێ کێمتربیت ژ 5 چەندە؟

27 ئەگەرێ کو ئێك ژ هەردوو ژمارێن دیاربووین بکێماسی کت بیت؟

28 ئەگەرێ کو ئێك ژ هەردوو ژمارێن دیاربووین بکێماسی بچووکتر بیت ژ 5 چەندە؟

لێنێرینەك بۆ پێش

29 ل تاقیکرنا هەرمەکی دڤیا دوو بەرکێن زارێ هەلدەن: ئێك ل دووڤ ئێك و سەرجەمێ هەردوو ژمارێن دیاربووین تۆماربکەن. ئەو کیژ سەرجەمە کو ئەگەرێ دەستکەفتنا وێ ناهێتە گۆهرین، کو هەر چەند بیت ئەو ژمارا لسەر زارێ ئێکێ دیاردبیت؟ ئەڤ ئەگەرە چەندە؟

بەشێ 2

نەخشە Functions

نەخشە بکاردهێن ل روودانێن ژیانا رۆژانە، بکارئینانا هندەیان ل دەربڕینا گۆهۆرینان و پەیوەندیێ لناڤبەرا دوو گۆڕاوان. بۆ نموونە. دشیاندایە پەیوەندیا لناڤبەرا شەمەندەفەرێ و وێ هێزا سواربووان ل جهێ وان جێگر دکەت ل بازێرێ یارییان ب هۆیێ نەخشەی بهێتە نواندن.

وانە

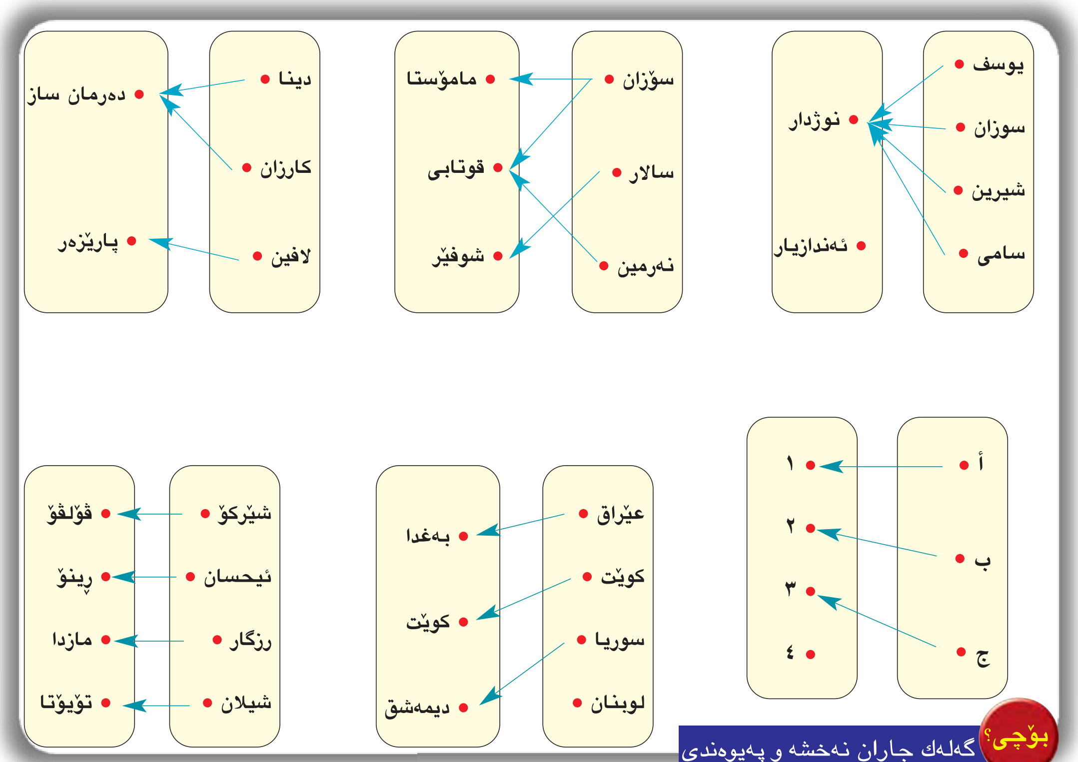
1. نەخشە.
2. نەخشەیێن هێلی.
3. شێوەیێن جیاواز بۆ هاوکێشا راستەهێلی.
4. تەریببوون و ستوونبوونا راستەهێلان.
5. نەخشەیێن دووجای.

یێ مەزنە وەکی نەهەنگی

نەهەنگێ کۆمد ئێکە ژ مەزنترین گیانەوەران ل جیهانێ، تو دشێی نەخشان بکاربینی بۆ بەراوردکرنا پیڤانێن ڤان نەهەنگان دگەل جۆرێ تشتێن دی یێن جیاواز.

وانه 1

نەخشە Functions



بۆچی؟ گەلەك جاران نەخشە و پەیوەندی دهێنە بکارئینان بۆ بنیاتنانا ساملێن بیرکاریێ ل ژیانا رۆژانە، یان بۆ دەربرینا یاسایێن زانستی.

ئارمانج

- نواندنا پەیوەندیا ناڤبەرا دوو نەخشان ب وێنێ روونکرنێ.
- دیارکرنا بوارێ پەیوەندیێ و مەودایێ وێ.
- بریاردانا وێ ئێکێ ئەرێ پەیوەندی نەخشێ دنوێنت.
- هەژمارتنا بهایێ نەخشێ دەمێ گۆڕاو بهایێن دیارکری وەردگرت.

زاراڤ

Vocabulary

- پەیوەندی Relation
- گۆڕاوێ سەربەخۆ Indepenent Variable
- گۆڕاوێ بەستراو Dependent Variable
- خشتەیێ بهایان Table of Values
- بوار Domain
- مەودا Range
- چەماوەیێ روونکرنێ Graph
- نەخشە Function
- وێنە Image

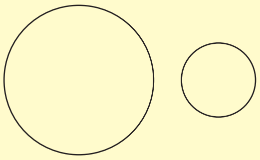
چالاکی

پەیوەندی و نەخشە Relations and Functions

1. کارزانی توماراخو یا تەلەفونێ ڤەکر و تێدا دیت:

ناڤ	ژمارا تەلەفۆنێ
شکری	235 246
هیوا	456 987
خەسرۆ	852 369
خەسرۆ	369 852
ڤیان	741 236

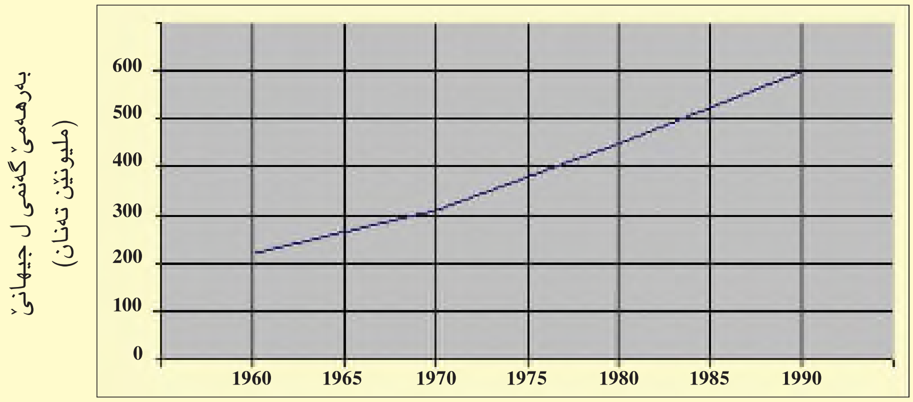
ژمارا تەلەفۆنا ڤیانێ چەندە؟ ژمارا تەلەفۆنا خەسرۆ چەندە؟



2. بژمێرێ بکاربینە بۆ تەمامکرنا خشتێ ل خوارێ کو رووبەرێ بازنێ ل دویڤ بەهایێن جیاوازێن نیڤتیرێ وێ، پاشی روونبکە چەواتە خشتە تەمامکریە.

نیڤتیرە	1	1.5	4	0.5	0.75	3	0	2.5	10
رووبەر	3.14								

3. وێنێ روونكرنێ ل خوارێ پێشكەفتنا بەرهەمێ گەنمی ل جیهانێ دیاردكەت ل نیڤا دووێ سەدێ بیستی ب ملیونێن تەنان.



ڤی وێنەیێ روونكرنێ بكاربینە بۆ خەملاندنا بەرهەمێ گەنمی ل جیهانێ، داخشتێ ل خوارێ تەمامبكەی.

سال	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990
بری بەرهەمێ گەنمی							

4. خشتێ ل خوارێ پلەیێن گەرماتیێ ل كەركووك دیاردكەت ل حەفتیا ئێكێ ژ مەها نیسانێ.

روژێن حەفتیێ	شەمبی	ئێك شەمب	دووشەمب	سێ شەمب	چار شەمب	پێنج شەمب	ئەینی
تێكرایێ پلەیێن گەرماتیێ	26	24	23	20	22	24	26

تێكرایێ پلەیێن گەرماتیی ل ئێك شەمبێ چەندە؟ ل روژا چارشەمبێ چەندە؟ ل روژا پێنج شەمبێ چەندە؟

ئەگەر تو بەرێ خو بدەیە هەر چار نموونەیێن بۆری دێ بینی هەر ئێك ژ وان دوو گوراو تێدا هەنە، و بەهایێ ئێكێ ژ هەردوو بەهایان بەهایێ یێ دی دیاردكەت.

خالا چاڤدێرییێ √

5. خشتێ ل خوارێ تەمامبكە ب دیاركرنا گۆڕاوێ ئێكێ ل هەر نموونەكێ كو بهایێ گۆڕاوێ دووێ دیاردكەت.

نموونە	گۆڕاوێ ئێكێ	گۆڕاوێ دووێ
1		
2		
3		
4		

بەحسێ هەبوونا **پەیوەندیێ Relation** لناڤبەرا هەردوو گۆڕاوان x و y دكەی، ئەگەر بەهایێن ئێك ژ وان وەكی x ، بەهایێن گۆڕاوێ دی دیاربكەت. ل ڤی بارەی دبێژین گۆراوێ ئێكێ **گۆڕاوێ سەربەخۆیە Independent Variable** و یێ دووێ **گۆڕاوێ بەستراوە Dependent Variable**.

Functions نەخشە

ل نموونەیا ئێکێ تو ووە دل دبی ل بەرسڤدانا پرسیارێ، نمرا تەلفوونا خەسرۆ چەندە؟
چونکی گۆڕاوێ سەربەخو کو ناڤکە دوو بەهایێن گۆڕاوێ بەستراو بەرامبەری وی هەنە. لێ ل نموونەیێن دی تو تووشی ڤێ کێشێ نابی چونکی هەر بەهایەکی گۆڕاوێ سەربەخو ل بەرامبەری وی بتنێ ئێك بەهایێ گۆڕاوێ بەستراو هەیە.

> ئەم دبێژین پەیوەندیا ناڤبەرا هەردوو گۆڕاوان x و y نەخشەیە **Function** ئەگەر هەر بەهایەك وەك (a) ژ بەهایێن گۆڕاوێ x بتنێ ئێك بەها ژ بەهایێن گۆڕاوێ بەستراو y وەکی (b) بەرامبەری وی هەبیت. ئەڤ بەهایێ بتنێ (b) دبێژنێ وێنەیێ **Image** (a) یێ نەخشەیێ.

خالا چاڤدێرییێ √

سەر ژ نوو هەر چار نموونەیان بخوینە و ل هەر بارەکی دیاربکە ئەرێ ئەو پەیوەندییە د بیتە نەخشە یان نە، و بەرسڤا خۆ روونبکە.

نموونە 1

ئەرێ پێدایێن ڤی خشتێ نەخشەیەکێ دنوێنن؟ ئەڤێ روونبکە.

أ)

بەهایێ گۆڕاوێ بەستراو	بەهایێ گۆڕاوێ سەربەخو
-3.6	1
-3.6	2
4.2	3
4.2	4
10.7	5
12.1	6
52	7

ب)

بەهایێ گۆڕاوێ بەستراو	بەهایێ گۆڕاوێ سەربەخو
7	3
8	3
10	3
42	4
34	10
18	11
52	52

شیکار

أ) پێدایێن خشتێ ئێك نەخشەیەکێ دنوێنن. چونکی هەر بەهایەك ژ بەهایێن گۆڕاوێ سەربەخو بتنێ ئێك بەها ژ بەهایێن گۆڕاوێ بەستراو بەرامبەری وی هەیە.

ب) پێدایێن خشتێ دووێ نەخشەیەکێ نانوینن. چونکی بەهایێ (3) بۆ گۆڕاوێ سەربەخو سێ بەهایێن گۆڕاوێ بەستراو 7 ، 8 ، 10 بەرامبەری وی هەنە. ئانکو خشتێ (ب) بتنێ پەیوەندیێ دنوێنت.

Different ways to define a function شێوەیێن پێناسەیا نەخشێ

ئەگەر تو بەرێ خو بدەیە نموونەیێن پێشتر، دێ بینی گەلەك شێوە بۆ پێناسا نەخشێ هەنە. تو دکاری نەخشێ پێناسەبکەی ب هۆیێ:

1. خشتێ بەهایان Table of Values : ل ڤی باری نەخشە دئیتە پێناسەکرن ب هۆیێ خشتەیەکی دوو ستوونی. ستوونا ئێکێ بەهایێن گۆڕاوێ سەربەخو بخۆڤە دگرت.

و ستوونا دووێ بەهایێن گۆڕاوێ بەستراو یێن بەرامبەری وان بخۆ دگرت. ب مەرجەکی بەهایێ گۆڕاوێ سەربەخو و بەهایێ گۆڕاوێ بەستراو ل ئێك ریز بن.

نموونە: نەخشەیێ نموونە 4 .

پەیوەندییەکا هاتیە پێناسەکرن ب هۆیێ، خشتەی نەخشەیەکێ پێك نائێت، ئەگەر ستوونا گۆڕاوێ سەربەخو، بەهایەکی بخۆڤە بگرت بەرامبەری وی پتر ژ ئێك گۆڕاوێ پێڤی هەبیت.

ل ڤێدەرێ پەیوەندییا پێناسەکری ب هۆیێ خشتەی ل نموونەیا ئێکێ نەخشەی نانوێنت، چونکی بەهایێ گۆڕاوی سەربەخو (خەسرو) دوو بەهایێن جیاواز یێن بەستراو «ژمارا تەلەفۆنێ» بەرامبەری وی هەنە.

2. ڕێسا **Rule** : نەخشە دهێتە پێناسەکرن ب هۆیێ ڕێسایەکێ یان یاسایەکێ، کو بەهایێ گۆڕاوێ بەستراو پێ گۆڕاوێ سەربەخو دەردبرت.

نموونە: نەخشەیێ نموونا دووێ، دەمێ دەربڕین ژ بەهایێ گۆڕاوێ بەستراو A (ڕووبەرێ بازنێ) دهێتە کرن پێ گۆڕاوێ سەربەخو r (نیڤتیرە)، ئەڤ ڕێسایە ئەڤەیە $A(r)=\pi r^2$.

3. **وێنەیێ ڕوونکرنێ Graph** : نەخشە ب هۆیێ وێنەیێ ڕوونکرنێ دهێتە پێناسەکرن دەمێ بەهایێن گۆڕاوێ سەربەخو لسەر تەوەرێ ئێکێ (x-$a\ i\ s$) و بەهایێن گۆڕاوێ دووی لسەر تەوەرێ دووێ (y-$a\ i\ s$) دهێنە دانان. بەهایێ گۆڕاوێ بەستراو ئەوێ بەرامبەرێ بەهایێ گۆڕاوێ (x) ژ بەهایێن گۆڕاوێ سەربەخۆ دهێتە دیارکرن کو دبیتە تانێ وی خالا دیارکری لسەر وێنێ ڕوونکرنێ دەمێ پۆیێ وێ خالێ x بیت.

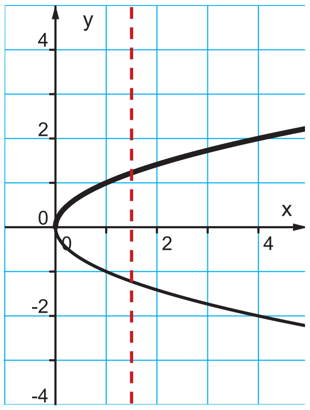
نموونە: نەخشەیێ نموونە (3).

تاقیکرنا ڕاستەهێلا ستوونی Vertical Line Test

ئەگەر ڕاستەهێلەکی ستوون وێنێ ڕوونکرنێ زێدەتر د خالەکێدا بڕیێ، ئەو وێنێ ڕوونکرنێ نەخشێ نانوێنت.

نموونە 2

ئەرێ ئەو پەیوەندیا پێناسەکری ب هۆیێ وێنەیێ ڕوونکرنا بەرامبەر نەخشەیە؟



شیکار

پەیوەندییا پێناسەکری ب وێنەیێ ڕوونکرنا بەرامبەر نەخشەیێ نانوێنت چونکی هەر بەهایەکی مووجەبی گۆڕاوێ سەربەخو (x) بەرامبەر وی. دوو بەهایێن گۆڕاوێ بەستراو y هەنە، ویا ئاشکرایە ڕاستەهێلێ ستوون وێنەیێ ڕوونکرنێ ل دوو خالێن جیاواز دبڕت.

خواندنا نەخشەی Studying Functions

بۆ خواندنا نەخشەیەکێ وەکی $f(x)$، دڤێت ڤان خالان بجە بینی:

1. دیارکرنا وێ کۆمەلا ژمارەیێن ڕاستی بۆ گۆڕاوێ سەربەخو (x)، کو تو بشێی وێنەیێ وێ $y=f(x)$ بهەژمێری. دبێژنە وێ کۆمەلێ، بوارێ پێناسەیا نەخشێ یان ب کورتی. **بوارێ نەخشێ Domain** .

2. دیارکرنا وێ کۆمەلا ژمارەیێن ڕاستی ئەوا گۆڕاوێ بەستراو بخۆڤەدگرت.و دبێژنە وێ کۆمەلێ **مەودایێ نەخشەی Range** .

3. نواندنا نەخشێ ب وێنەیێ ڕوونکرنێ، ئانکو نواندنا هەموو جووتێن ڕێکخستی (x,y) دەمێ (x) دانە بیت د بوارێ نەخشەیدا و$y=f(x)$. دبێژنە کۆمەلا ڤان خالان هێلێ وێنەیێ ڕوونکرنا نەخشەیێ.

یان هێلێ ڕوونکرنا نەخشەیێ Graph .

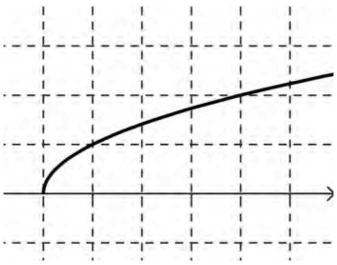
4. پۆێتەکرنا سەخلەتێن نەخشێ ژ خواندنا وێنەیێ ڕوونکرنا نەخشەیێ.

چەوا وێنەیێ روونكرنا نەخشەیەكێ دهێتە وێنەكرن؟

ئەگەر نەخشە ب هویێ خشتێ بەهایان هاتبتە پێناسەكرن، هەموو خالێن (x,y) ئەوێن دخشتەیدا هاتین بنوێنە، پاشی وان خالان ب هێلەكی گونجای بگەهینە. ئەگەر نەخشە ب رێسایێ پێناسەكر بیت، خشتەیێ بەهایان پێكبینە و خالێن خشتەی لسەر رووتەختێ پۆتانی بنوێنە و هێلی روونكرنێ ب رێیا پێشتر بگەهنە. و هەر وەسا تو دشێی بژمێرا روونكرنێ یان كومپیوتەری بكاربینی بۆ وێنەكرنا هێلی روونكرنا نەخشەیێ.

راهێـــــنـــان

بەردەوامبوون د بیركارێیدا



1 جیاوازیێ لناڤبەرا نەخشەیێ و پەیوەندییێ روونبكە، نموونەیەكێ لسەر وێنەیێ روونكرنا پەیوەندییەكێ بینە كو نە نەخشەبیت.

2 سێ رێیان بۆ پێناسەیا نەخشێ بێژە.

3 چەوا بوارێ نەخشەیا پێناسەكری ب هێلی روونكرنا بەرامبەر روونكەی، و چەوا مەودایێ وێ دیاردكەی؟

راهێنانێن ئاراستەكری

دیاربكە ئەرێ ئەڤ خشتەیێن ل خوارێ نەخشەیێ دنوێنن؟ ئەوێ روونبكە.

4

x	y
5	3
8	4
5	7
9	2

5

x	y
0	3
1	8
2	8
3	–7

6

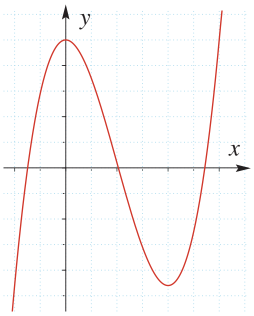
x	y
10	7
20	11
30	9
40	7

7

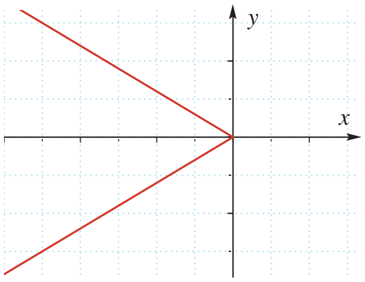
x	y
3	9
2	2
8	–3
2	1

دیاربكە ئەرێ ئەڤ وێنەیێ روونكرنێ نەخشەیێ دنوێنن یان نە. هۆیێ بەرسڤا خۆ روونبكە.

8



9

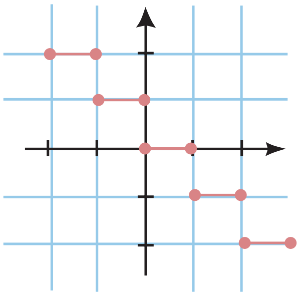


بجهئینان

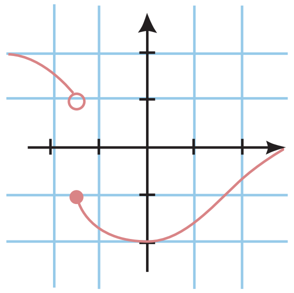
10 **ترومبێل**: گۆڕاوێ A وان ترومبێلان دنوێنیت ئەوێن رێ پێداین ژ بـاژێرێ تە بریبکەڤن، و گۆڕاوێ N تابلۆیێن ژمارەی بۆ وان ترومبێلان دنوێنت. ئەرێ پەیوەندیەك لناڤبەرا A و N هەیە؟ ئەگەر بەرسڤا تە «بەلێ» بوو، ئەرێ ئەو پەیوەندییە نەخشەیە؟ کیژ وان هەردوو گۆڕاوان دبیتە گۆڕاوێ سەربەخو و کیژ وان دبیتە گۆڕاوێ پەیوەست؟ هۆیێ بەرسڤا خو روونبکە.

بوار و مەودایێ هەر نەخشەیەکا هاتیە نواندن ب وێنەیێ روونکرنێ ل خوارێ دیاربکە.

11



12



13 بەهایێ نەخشەیا $f(x)=x^2+2x-1$ بهەژمێرە دەمێ $x=3$ و $x=1.5$.

بجهئینان

14 **داهاتی**: زێرنگرەك 24 هزار دیناران بۆ هەر دەمژمێرەکا کاری وەردگرت. زێدەباری 20 هزار دیناران بۆ دیارکرنا تێکچوونان.

أ نەخشەیەکێ بنڤیسە داهاتێ (R) زێرنگری لدووڤ ژمارا دەمژمێرین کاری (x) بنوێنت.

ب داهاتێ زێرنگری بهەژمێرە ئەگەر وی 5.5 دەمژمێران کارکربت.

راهێنان و بجهئینان

ئەرێ ئەڤ خشتەیێن ل خوارێ نەخشەیێ دنوێنن؟ ئەوێ روونبکە.

15

x	0	2	2	4
y	3	−5	1	7

16

x	1	2	3	4
y	6	6	9	9

17

x	4	4	6	6
y	−2	2	−3	3

18

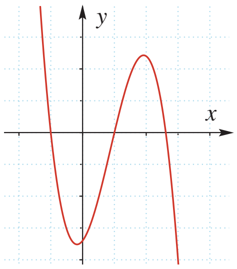
x	−5	−3	−1	1
y	8	8	−2	−2

19

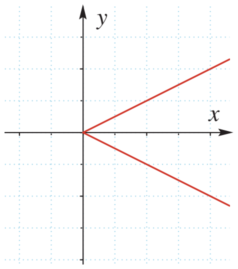
x	−2	−2	0	2
y	−5	−3	4	6

ئەرێ ئەڤ وێنەیێن روونکرنێ نەخشەیێ دنوێنن؟ ئەوێ روونبکە.

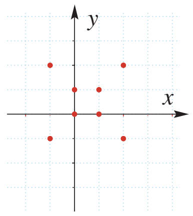
20



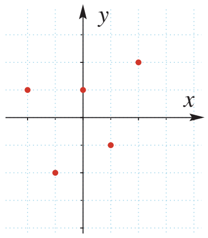
21



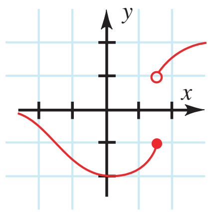
22



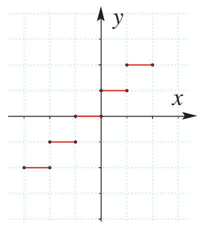
23



24



25



بەهایێ نەخشەیێ بهەژمێرە ب لجهدانانێ.

26 $f(x)=2x-6$ دەمێ $x=1$ ، $x=3$

27 $f(x)=5-3x$ دەمێ $x=1$ ، $x=3$

28 $f(x)=\frac{2x-1}{5}$ دەمێ $x=-9$ ، $x=1$

29 $f(x)=\frac{x-4}{5}$ دەمێ $x=-9$ ، $x=9$

30 $f(x)=2x^2-3x$ دەمێ $x=3$ ، $x=-2.5$

31 $f(x)=x^2+4x-1$ دەمێ $x=2$ ، $x=1.5$

32 $f(x)=\frac{1}{3}x^2$ دەمێ $x=-1$ ، $x=\frac{3}{4}$

33 $f(x)=-4x^2$ دەمێ $x=\frac{3}{2}$ ، $x=-2$

وێنەیێ روونکرنێ بۆ نەخشەی بکێشە بکارئینانا بژمێرا روونکرنێ یان ب رێیا ئاسایی، پاشی بوار و مەودایێ وێ دیاربکە.

34 $y=-\frac{x}{2}$ **35** $y=-\frac{2}{3}x-5$ **36** $y=-2x^2$ **37** $y=2$

38 $y=-6$ **39** $y=x^2$ **40** $y=x^2+2$

41 وێنەیێ روونکرنێ بۆ نەخشەیەکێ بکێشە کو بوارێ وێ $-3\le x\le 3$ و مەودایێ وێ $-5\le y\le 5$ بیت.

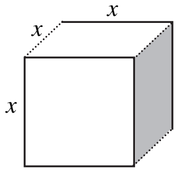
42 وێنەیێ روونکرنێ بۆ نەخشەیەکێ بکێشە کو بوارێ وێ $-2\le x\le 5$ و مەودایێ وێ $0\le y\le 4$ بیت.

بەرهنگاری

بەهایێ نەخشەیا $f(t)=t^2-3$ ل هەر بارەکی بهەژمێرە:

43 $t=\sqrt{2}$ **44** $t=\sqrt{2}-1$ **45** $t=c+\sqrt{2}$

ئەندازە: هێمایێ گۆراو V بۆ قەبارێ شەشپالویا بەرامبەر دانە.



46 نەخشەیەکێ بنڤیسە بۆ قەبارێ شەشپالویێ لدووڤ درێژیا لایێ وێ x.

47 رووبەرێ روویەکی ژ رووێن شەشپالۆیێ بهەژمێرە ئەگەر قەبارێ وێ $27m^3$ بێت.

48 بکارێرن: فرۆشگایەکی جلو بەرگان داشکاندنەکا ب رێژەیا 30% لسەر هەموو جلوبەرگان راگەهاند.

أ 47.25 هزار دینار دانان بو بهایێ قەمیسەکی د وەرزێ داشکاندنێدا، ئایا بهایێ کەفنێ قەمیسی چەند بوویە؟

ب زانای پەنتەرونەك کڕی بهایێ وی 52 هزار دینار بوو، بەری وەرزێ داشکاندنێ، ئایا بهایێ نوێ چەندە؟

لێنێرینەك بۆ پاش

49 ئەڤ خشتەیێ ل خوارێ ب ملیۆنان ژمارا وان کەسان دیاردکەت کو ژیێ وان لناڤبەرا 21 هەتا 24 سالانە ئەوێن خواندن هێلایین.

أ ئەگەر چەندە کو ئێك ژ دەرچوویێن ئاستێ ماجستێرێ یان د کتۆرایێ بیت و کاربکەت؟

ب ئەگەر چەندە کو کەسەك ب هەرەمەکی هاتبتە هەلبژارتن ژ ئاستێ پێش دوواناوەندییێ بیت و کار نەکەت؟

کارکرنا دەرچوویان ژ 21 هەتا 24 سال (ب هزاران)		
ئاستێ خواندنێ	کاردکەن	کارناکەن
بنەرەت	1.060	0.834
دووا ناوەندی	2.793	1.157
پیشەیی	4.172	1.634
بەکەلۆریوس	1.53	0.372
ماجستێر یان دکتۆرا	0.104	0.041

50 برێ $2 \div \left[7-(3-5)-2\right]3$ بکارئینانا ڕێزبەندیا کرداران بهەژمێرە.

لێنێرینەك بۆ پێش

51 وێنەیێ روونکرنێ بۆ پەیوەندییا $y = x^2 - 2x - 10$ ل ناڤبەرا x و y بکێشە. و روونبکە بۆچی ئەڤ پەیوەندییە نەخشەیە. بوار و مەودایێ نەخشێ دیاربکە.

وانەیا 2

نەخشەیێن هێلی Linear Functions

بۆچی

نەخشەیا هێلی سادەترین نەخشەیا جەبریيە، هەروەسا گەلەك دهێتە بكارئینان ل بنیاتنانا سامپلێن بیركاریێ ل بارەیێن ژیانا رۆژانە.

ئارمانج

- ناسینا نەخشەیا هێلی.
- بكارئینانا نەخشەیا هێلی بۆ بنیاتنانا سامپلێن بیركاریێ.
- دیاركرنا بوار و مەودایێ نەخشەیا هێلی و دیاركرنا خالێن ئێكو دوو برینا وێ نەخشەیێ دگەل هەردوو تەوەرێن پۆتانان.

زاراڤ

Vocabulary

نەخشەیا هێلی Linear function

لاری Slope

چالاكی

ڤەدیتنا نەخشەیێ هیلی Exploring linear function

تو دزانی كو پلەیا كەلاندنا ئاڤێ 100 پلەیا سەدییە. لێ رەنگە تو نزانی كو 100 پلەیا سەدی دبیتە پلەیا كەلاندنا ئاڤێ ل جهەكی ل ئاستێ رووێ دەریایێ بیت. پلەیا كەلاندنا ئاڤێ دهێتە گۆهرین ب گهۆرینا بلنداهیا وی جهێ لسەر ئاستێ رووێ دەریایێ. ئەو پلە ل چیایێ هێمالایێ كێمترە ژ 100 پلەیێن سەدی، لێ زێدەترە ژ 100 پلەیێن سەدی ل دەریایا مری [البحر الميت].
ئەڤ خشتەیێ ل خوارێ هندەك جهێن جیهانێ و بلنداهیا وان لسەر ئاستێ رووێ دەریایێ و پلەیێن كەلاندنا ئاڤێ ل وان جهان دیاردكەت.

جه	بلنداهیێ لسەر ئاستێ رووێ دەریایێ [ب متران]	پلەیا كەلاندنا ئاڤێ
بەسرە (عێراق)	0	100
فیربۆرگ (سویسرا)	586	99.68
سوفەر (لوبنان)	1 250	99.135
كولۆرادۆ سبرنگر (ئەمریكا)	1 832	98.995
شاخێ رەش (لوبنان)	3 220	98.23
دەریایا مری (ئوردون)	−420	100.23

1. پێدایێن خشتەیێ درووتەختێ پووتانێدا بنوێنە، كو تەوەرێ (x) بو بلنداهیێ لسەر رووێ دەریایێ ب متران، و تەوەرێ y بۆ پلەیێن گەرماتیێ ب پیڤەری سەدی دانە.
2. وان خالان ب پارچە راستەهێلان بگەهینە، چی تێبینیێ دكەی؟
3. ئەرێ پەیوەندییا لناڤبەرا بلنداهیێ لسەر ئاستێ رووێ دەریایێ و پلەیا كەلاندنا ئاڤێ نەخشەیە؟
4. ئەوێ وێنەیێ روونكرنێ یێ بدەست تە كەفتی بكاربینە بۆ خەملاندنا پلەیا كەلاندنا ئاڤێ ل بلنداهیا 3000 متران لسەر ئاستێ رووێ دەریایێ.
5. ئەوێ وێنەیێ روونكرنێ یێ بدەست تە كەفتی بكاربینە بۆ خەملاندنا بلنداهیا جهەكی ل سەر ئاستێ رووێ دەریایێ، هەگەر بزانی كو پلەیا كەلاندنا ئاڤێ ل وی جهی 97 پلەیە.
6. ل كێدەرێ وێنەیێ روونكرنێ تەوەرێ y دبرێت؟ ئەڤ خالە چ دنوێنیت؟

بجهئینان

فیزیا

نەخشەیا هێلی Linear Function

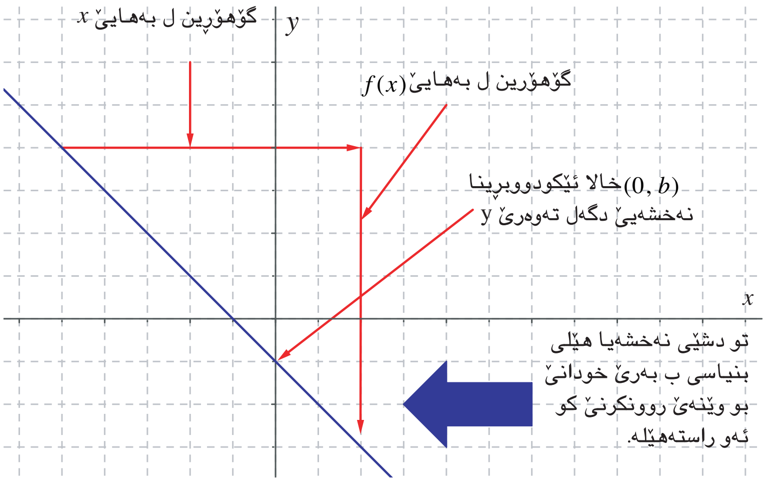
نەخشەیا هێلی: نەخشەیەکە کو وێنەیێ روونکرنا وێ راستەهێلە.

رێسایا نەخشەیا هێلی ب ڤی شێوەی دهێتە نڤیسین: $f(x)=mx+b$

دشیانێن تەدایە نەخشەیێن هێلی بکاربینی بۆ بنیاتنانا سامپلێن بیرکاریێ بۆ هندەك پەیوەندییان لناڤبەرا دوو گۆڕاوان، وەکی پەیوەندییا پێشتر (بلنداهی ژ سەر ئاستێ رووێ دەریایێ و پلەیا کەلاندنا ئاڤێ).

هەروەسا تو دشێی بەرێ خو بدەیە رێژەیا گۆهۆرینا بەهایێ نەخشەیێ بۆ گۆهۆرینا بەهایێ گۆڕاوێ سەربەخو کو ئەو یا نەگۆرە دبیتە لارێ وێ راستەهێلی.

$$m = \frac{f(x) \text{ گوهۆڕین د بهایێ}}{x \text{ گۆهۆڕین د بهایێ}}$$

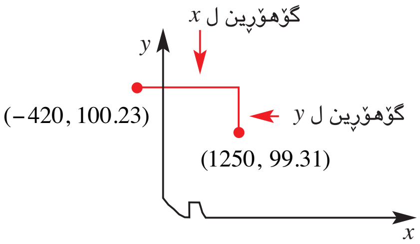


رێژا گۆهۆرینا بەهایێ نەخشەیا هێلی $f(x)$ بۆ بەهایێ x دمینت نەگۆر و دبێژنە وی رێژەیێ **لارێ Slope** نەخشەیا هێلی.

نموونە 1

أ پێدایێن خشتەیێ پێشتر بکاربینە بۆ روونکرنا چەواتیا گۆهۆڕینا پلەیا کەلاندنا ئاڤێ، دەمێ بلنداهی ل سەر رووێ دەریایێ دهێتە گۆهۆڕین.

ب رێسایا نەخشەیا پلەیا کەلاندنا ئاڤێ پێ بلنداهیێ ل سەر ئاستێ رووێ دەریایێ بنڤیسە.



شیکار

أ x بکاربینە بۆ بلنداهیێ (ب متران) ژ سەر ئاستێ روێ دەریایێ و y بۆ پلەیا کەلاندنا ئاڤێ ب پیڤەرێ سەدی. دوو بەهایان بۆ گۆڕاوێ سەربەخۆ (x) و هەردوو بەهایێن نەخشەیی یێن بەرامبەری وان بکاربینە، وەکی بلنداهیا سوفەر ل لوبنان و ل دەریایا مری ل ئوردن. رێژا گۆهۆڕینا پلا کەلاندنا ئاڤێ بۆ گۆهۆڕینا بلنداهیێ ژسەر ئاستێ رووی دەریایێ بهەژمێرە دا لاری بدەست تە بکەڤیت.

$$m = \frac{\text{گۆهۆڕین ل نەخشەیێ}}{x \text{ گۆهۆڕین ل}} = \frac{99.31-100.23}{1250-(-420)} = -\ 0.00055$$

ئەڤەژی رامانێ ددەت، کو زێدەبوونا هەر مترەکی ل بلنداهیێ ژ سەر ئاستێ رووی دەریایێ دبیتە هۆیێ گۆهۆڕینێ ل پلەیا کەلاندنا ئاڤێ ب برێ -0.00055 پلە.

ب پلەیا کەلاندنا ئاڤێ = پلەیا کەلاندنا ئاڤێ ل ئاستێ رووێ دیاریێ + بلنداهیێ $\times m$

$f(x) = 100 + (-0.00055)x$

رێسایا نەخشەیێ ئەڤەیە. $f(x) = 100 - 0.00055\ x$

هزرکرنەکا رەخنەگر ئەری پلەیا کەلاندنا ئاڤێ زێدە دبیت یان کێمدبیت ئەگەر بلنداهیی ژ سەر ئاساتێ روویێ دەریایێ زێدەببیت؟ روونبکە چەوا خشتێ ل دەستپێکا ڤێ وانەیێ بکاردئینی بۆ بەرسڤدانا ڤێ پرسیارێ. روونبکە چەوا هێلێ روونکرنا نەخشەیا $f(x) = 100 - 0.00055x$ بکاردئینی.

بەرهنگاری شارایێ رێسایا نەخشەیا هێلی دیت هەر وەکی ل بەرامبەر دیارکری. بەحسێ رێیێن شارایێ بکە دوو جهێن دی ژ خشتەی بکاربینە بۆ دیارکرنا رێسایا نەخشەیێ. ئەرێ هەر ئەو رێسایە بدەست تە دکەڤیت؟

$m = -0.00055$

$f(x) = mx + b$

$100 = -0.00055(0) + b$

$100 = b$

رێسای نەخشەکە ئەمەیە:

$f(x) = -0.00055x + 100$

نموونە 2 $f(9)$ بهەژمێرە ئەگەر $f(x) = \frac{1}{3}x + 17$. بەهایێ x چەندە ئەگەر $f(x) = -1$ ؟

شیکار

ل جهێ x بەهایێ 9 دانە.

$$f(9) = \tfrac{1}{3} \times 9 + 17$$
$$= 3 + 17$$
$$= 20$$

ل جهێ $f(x)$ بەهایێ -1 دانە و شیکاربکە.

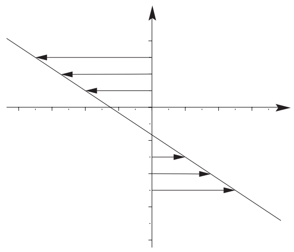
$$f(x) = \tfrac{1}{3}x + 17$$
$$-1 = \tfrac{1}{3}x + 17$$
$$-18 = \tfrac{1}{3}x$$
$$-54 = x$$

بەرهنگاری روونبکە چەوا نەخشەیا نموونە (1) بکاردئینی بۆ دیارکرنا پلا کەلاندنا ئاڤێ ل جهەکی بلنداهیا وی 8000m ژ سەر ئاستێ روویێ دەریایێ یێ بلندبیت. ئەوێ پلا گەرماتیێ دیاربکە.

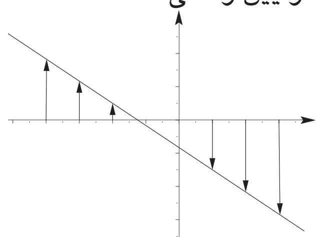
بەرهنگاری روونبکە چەوا نەخشەیا نموونە (1) بکاردئینی بۆ دیارکرنا بلنداهیا جهەکی ژ سەر ئاستێ روویێ دەریایێ کو پلا کەلاندنا ئاڤێ تێدا 85 پلا سەدی بیت. ئەوێ بلنداهیێ دیاربکە.

خواندنا نەخشەیا هێلی Studying linear function

رێسایا نەخشەیا هێلی $f(x) = mx + b$ هاریکاریێ دکەت بۆ هەژمارتنا بەهایێ نەخشێ ئەگەر بەهایێ گۆراوێ x هەر چەندبیت. ژڤێ دیاردبیت کو $f(x)$ دێ یا پێناسەکرییت ئەگەر بەهایێ x هەر چەند بیت، و بوارێ وێ نەخشەیێ دبیتە کۆمەلا ژمارەیێن راستی. و ل رەخەکی دی هەر ژمارەکا راستی چێدبیت ببیتە بەهایەک بۆ نەخشەیا هیلی، چونکی تو دشێی بەهایێ x بهەژمێری ئەگەر تو بەهایێ نەخشەیێ بزانی. ژ وێ دەرئەنجام دکەین کو مەودایێ نەخشەیا هێلی دبیتە کۆمەلا ژمارەیێن راستی.



وێنەیێ روونکرنا نەخشەیا هێلی دیاردکەت کو مەودایێ وێ هەموو تەوەرێ y بخۆڤەدگرت.



وێنەیێ روونکرنا نەخشەیا هێلی دیاردکەت کو بوارێ وێ هەموو تەوەرێ x بخۆڤەدگرت.

دەمێ نەخشەیا هێلی بارەکی ژیانا رۆژانە بنوێنت. دێ بوار و مەودایێ وێ دسنووردای بن.

نموونە 3

کۆپێ ئیڤەرێست ل جیایێ هێمالایا بلنداهیا وی 8848m ژ سەر ئاستێ رووێ دەریایێ، ئەو دهێتە دانان کو بلندترین جهە لسەر ئاستێ رووێ ئەردی. هەر وەسا دەریایا مری [البحر االميت] 420m نزمترین جهە لسەرووێ ئاستێ ئەردی. ڤان هەردوو زانیاریان بکاربینە دا ب هووری بوار و مەودایێ نەخشەیا نموونەیا (1) دیاربکەی.

شیکاربکە

نەخشەیا نموونەیا 1 سامپلەکی بیرکارییێ بۆ بارەکی ژیانا رۆژانە پێکدئینت. لەورا دیاردبیت کو گۆڕاوێ x دێ یی سنووردای بیت ب چەند بەهاییێن دیارکری. ل دووڤ هەردوو زانیارییێن پێشتر دێ گۆڕاوێ x وان بەهایان وەرگرت کو دکەڤنە ناڤبەرا -420، 8848 ، و ژبەر ڤێ ئێکێ بوارێ نەخشەیا نموونەیا (1) دبیتە کومەلا وان ژمارەیێن راستی ئەوێن ڤێ لاسەنگێ ساخدکەن $-420 \le x \le 8848$ بۆ دیارکرنا مەودایی ل ڤی باری، دێ بینین کو بەهاییێن وی کێم دبن هەر چەند بلنداهی (x) زێدەبیت، ئەڤە وێ دگەهینت کو بلندترین بەهایێ مەودایێ بەرامبەری نزمترین بەهایێ گۆڕاوێ سەربەخۆیە. ئانکو: $f(-420)=100.23$ و نزمترین بەهایێ مەودایی بەرامبەری بلندترین بەهایێ گۆڕاوێ سەربەخویە (x) ئانکو: $f(8848)=95.13$. ب ڤی شێوەی مەودایێ نەخشەیا نموونەیا (1) دبیتە کۆمەلا وان ژمارەیێن راستی ئەوێن ڤێ لاسەنگێ ساخدکەن $95.13 \le y \le 100.23$.

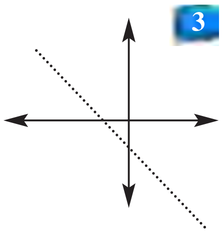
ڕاهێنان

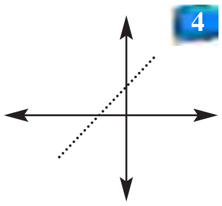
بەردەوامبوون د بیرکارییێدا

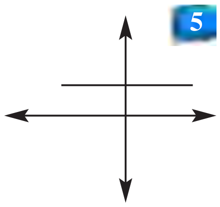
1 چەوا ئەوێ ساخدکەی کو خەلەك پۆتانێ وێ یێ دیاربیت دکەڤنە سەر راستەهیلەکی تو هاوکێشا وی بزانی.

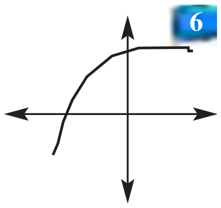
2 روونبکە چەوا رێسایا نەخشەیەکا هێلی دێ ئینیەدەر ئەگەر وێنەیێ روونکرنا وێ بزانی.

ئەرێ ئەڤ وێنەیێن روونکرنێ نەخشەیا هیلی دنوێنن؟ ئەوێ روونبکە.

3


4


5


6


ڕاهێناتێن ئاراستەکری

ئەرێ ئەڤ نەخشە یا هێلییە؟ ئەوێ روونبکە.

7 $f(x)=2-x^2$

8 $f(x)=-3x-6$

9 $g(x)=4+10x$

10 $f(x)=x^3-x$

11 $f(x)=\frac{3}{2}x+4$

12 $g(x)=\frac{1}{x}$

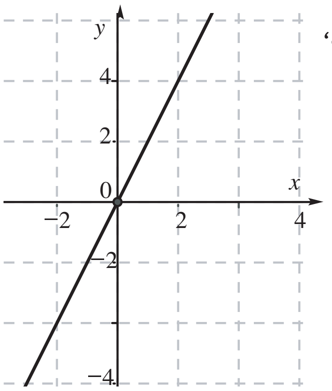
13 خشتێ ل خوارێ تێچوونا پەیوەندیکرنا تەلەفونا نێڤدەولەتیە، دگەل باجا نەگۆر کو بەهایێ وێ دوو هزار دینارە:

بجهئینان
بیرکارییا بکاربەری

ژمارە خۆلەکان	1	2	3	4	5	6
تێچوون ب هزاران دینار	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00

ڤی خشتەی بکاربینە بۆ نڤسینا نەخشەیەکێ. بوار و مەودایێ وێ نەخشەیێ دیاربکە.

14 شێوەیێ بەرامبەر وێنەیێ روونکرنێ بۆ نەخشەیەکا هێلی، دیاردکەت، خشتێ بەهایان پێکبینە و رێسایا نەخشەیێ بنڤیسە.



جووتێن رێکخستی تەمامبکە ب مەرجەکی ئەو خالە بکەڤتە سەر راستەهێلێ $y=-4x+21$.

15 (5, ?) **16** (?, 9)

17 (0, ?) **18** (?, 0)

راهێنان و بجهئینان

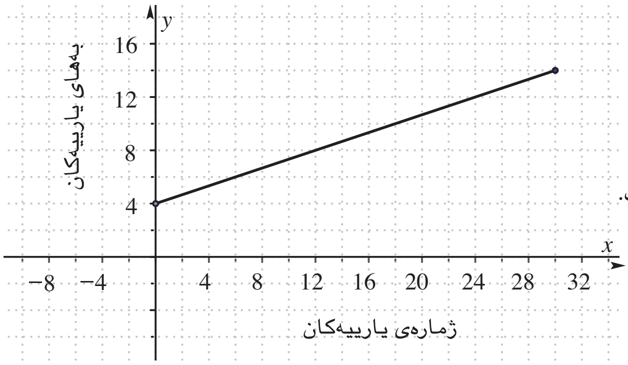
جووتێن رێکخستی تەمامبکە ب مەرجەکی ئەو خالە بکەڤنە سەر راستەهێلێ $y=2x-14$.

19 (8, ?) **20** (10, ?) **21** (0, ?) **22** (?, 0)

23 (5, ?) **24** (−5, ?) **25** (3, ?) **26** (?, 3)

27 (?, 6) **28** (?, −4) **29** (?, −7) **30** (?, 10)

31 ئەندازەیا پۆتانێ: شێوەیێ بەرامبەر وێنەیێ روونکرنێ بۆ پەیوەندییا لناڤبەرا ژمارا یارییێن ئەلیکترونێ (ناڤبەرا 0 و 30) و بهایێ وان دیاردکەت. خشتێ بەهایان بۆ ڤێ نەخشەیێ پێکبینە و رێسایا وێ بنڤیسە.



32 ترومبێل: دەمێ تو تانکێ سووتەمەنیێ یێ ترومبێلا خو پر دکەی، برێ سۆتەمەنیێ دتانکیدا نەخشەیەکێ دنوێنت، گۆڕاوێ وێ یێ سەربەخو دبیتە ژمارا خولەکان. وەسا دانە کو ئەو برێ سۆتەمەنیێ کو دکەیە دناڤ تانکیدا ب تێکرایێ 18 لێترن د هەر خۆلەکەکێدا و فرەهیا وێ تانکێ 35 لیترە.

أ رێسایا نەخشەیەکێ بنڤیسە کو برێ وێ سوتەمەنیا دکەیە دناڤ تەنکێدا پێ دەمی بنوێنت.

ب بوار و مەودایێ ڤێ نەخشەیێ دیاربکە.

33 **بۆ خۆشیێ:** یانەیا ژیانی CD دفرۆشت، وەکی ل خشتێ ل خوارێ، دگەل پارێ بەشداربوونێ دیانەیێدا کو دبیتە 35 هزار دینار.

ژمارا CD یان	0	2	4	6	8	10	12	14
تێچوون (ب هزار دینار)	35	51	67	83	99	115	131	147

نەخشەیەکێ بنقیسە ئەڤێ بنوێنت.

بەرهنگاری

34 **تەکنەلۆژیا** بژمێرا روونکرنێ بکاربینە بۆ کێشانا وێنەیێ روونکرنێ بۆ هەردوو نەخشەیێن هەردوو راهێنانێن پێشتر د ئێك رووتەختێ پۆتانیدا. بەراوردییێ لناڤبەرا هەردوو دیاردان بکە. کێژوان هەردوو یانەیان دیاردا باشتر پێشکێدکەت؟ ئەوێ روونبکە.

لێنێرینەك بۆ پاش

خشتێ بەهایان بۆ هەر نەخشەیەکێ پێکبینە ب دانانا بەهایان 1، 2، 3، 4، 5، 10 ل جهێ x ، و وێنەیێ روونکرنێ بکێشە.

35 $y=2x+1$

36 $y=5x-1$

ب هزری بەهایێ ژمارەی بۆ هەر برەکی بهەژمێرە.

37 $300-196$

38 10×30

39 $\frac{480}{16}$

40 $1\,000\times 1\,000$

لێنێرینەك بۆ پێش

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1	4	9	16	25	36	49	64

41 خشتێ لسەری باش بخوینە. ئەرێ نەخشەیەکا هێلی دنوێنت؟

42 رێسایا پەیوەندیا لناڤبەرا x و y بنقیسە. پێداییێن خشتێ ب وێنەیێ روونکرنێ بنوێنە، و بەرسڤێن پێشتر ساخبکە.

وانەیا 3

شێوەیێن جیاواز بۆ هاوكێشەیا راستەهێلی

Various forms of the equation of a line

بۆچی
هاوكێشا راستەهێلی رۆلەكی گرنگ د بیركاریێدا دبینت، ئەو سادەترین نەخشەیێ جەبری دنوێنت. هەروەسا بۆ بنیاتنانا سامپلێن نموونەیێن بیركاریێ بۆ گەلەك كێشەیێن ژیانا رۆژانە دهێتە بكارئینان.

ئارمانج

- ناسینا شێوەیێن جیاواز بۆ هاوكێشەیا راستەهێلی
- نڤیسینا هاوكێشەیا راستەهێلی ب شێوەیێن جیاواز.

زاراڤ
Vocabulary

شێوەیێ لاری – ئێكودووبرین
Slope - Intercept form

شێوەیێ لاری – خالەك
Slope - Point form

ئێكودووبرینا ستوونی
y - Intercept

ئێكودووبرینا ئاسۆیی
x - Intercept

شێوەیێ دوو خال
Two - points Form

شێوەیێ گشتی
Standard Form

چالاكی 1

هاوكێشەیا راستەهێلی: شێوەیێ لاری –ئێكودووبرین Slope-Intercept Form

نەوزادی سەرە دانا كۆمپانیەكا ب كرێدانا ترومبێلان كر. فەرمانبەرێ كۆمپانیێ گۆتە وی، دڤێت ئەو 100 هزار دیناران بدەت دەمێ ترومبێلێ وەردگرت و 1.5 هزار دیناران بدەت بۆ هەر كیلومەترەكا دبڕت.

1. ڤی خشتەی تەمامبكە.

ژمارا كیلومەتران	10	20	30	
ئەو پارێ دڤێت بدەت	$1.5 \times 10 + 100$			

2. هاوكێشەیا كۆژمێ y كو دڤێت ئەو بدەت پێ ژمارا كیلومەتران x بنڤیسە.

3. ڤێ هاوكێشەیێ ب وێنەیێ روونكرنێ بنوێنە.

بجهئینان
بازرگانی

شێوەیێ لاری ـ ئێکوودوبڕین   Slope - Intercept Form

هـاوکێشەیا راستەهێلی لسەر شێوەیێ لاری – ئێکوودوو بڕین ئەڤەیە $y = mx+b$ کو m و b دوو ژمارەیێن راستینە. ژمارا m لاریێ راستەهێلێیە و b تانێ خالا ئێکوودووبڕینا راستەهێلی دگەل تەوەرێ y یە، یان **ئێکوودووبڕینا ستوونیە y- intercept** بۆ راستەهێلی.

نموونـــــە 1

لاریێ راستەهێلی و ئێکوودووبڕینا ستوونی دیاربکە.

أ $y = 3x - 4$ ب $y = -5x + 3$ ج $y = 5$

شیکار

أ لاری 3 و ئێکوودووبڕین -4

ب لاری -5 و ئێکوودووبڕین 3.   ج لاری 0 و ئێکوودووبڕین 5 .

بزاڤێ بکە   ئەوی راستەهێلێ ڤێ هاوکێشەیێ $y = 2x - 8$ دنوێنت بکێشە.

چالاکی 2

شێوەیێ لاری ـ خالەك   Slope - Point Form

ئەگەر لاریێ راستەهیلەکێ m و خالەکێ وەکی (h, k) کو راستەهێل تێرا ببۆرت بزانی، تو دێ کاری هاوکێشەیا وی بنڤیسی:-

1. هاوکێشەیا راستەهێلی لسەر شیوەیێ لاری – ئێکوودووبڕین دبیتە $y = ax + b$. ئەرێ پەیوەندی لناڤبرا لاریێ وی و هاوکۆلکی x د وێ هاوکێشێدا چییە؟
2. بنڤیسە کو راستەهێل د خالا (h, k) را دبۆرت. پاشی ل جهێ x بەهایێ h دانە و ل جهێ y بەهایێ k دانە.
3. هاوکێشەیێ شیکاربکە و بەهایێ b پێ m و h و k بهەژمێرە.
4. ل جهێ b بەهایێ وێ دانە، و هاوکێشەیا راستەهیلی ب شێوەیێ لاری – ئێکوودووبڕین بنڤیسە.

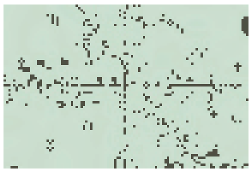
شێوەیێ لاری ـ خالەك   Slope - Point Form

هـاوکێشەیا راستەهێلی لسەر شێوەیێ لاری – خالەك ئەڤەیە $y - y_1 = m(x - x_1)$ ، کو:

- m لاریێ راستەهێلییە.
- (x_1, y_1) پۆتانێ وێ خالا راستەهێل تێرا دبۆرت.

نموونـــــە 2

هاوکێشەیا راستەهیلی بنڤیسە کو لاریێ وی -2 بیت و دخالا $(1, -1)$ را ببۆرت، پاشی وێنەیێ بکێشە.



شیکار:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - (-1) &= -2(x - 1) \\ y + 1 &= -2x + 2 \\ y &= -2x + 1 \end{aligned}$$

هەڵبدە   هاوکێشەیا راستەهیلی بنڤیسە کو لاریێ وی 3 بیت و دخالا $(-2, -1)$ را ببۆرت، پاشی وێنەیێ بکێشە.

چالاکی 3

Two Points Form — شێوەیێ دووخالان

هاوکێشەیا وی راستەهێلێ بنڤیسە کو دڤان هەر دوو خالانرا (3 ,5) و (4 ,7) دبۆرت.

1. لاری راستەهێلی بهەژمێرە.
2. هاوکێشەیا وی راستەهێلی بنڤیسە لسەر شێوەیێ لاری – خال. پاشی لسەر شێوێ لاری – ئێکودوو برین.

Two Points Form — شێوەیێ دوو خالان

هاوکێشا راستەهێلێ دڤان هەردوو خالانرا (x_1, y_1) و (x_2, y_2) دبۆرت دبیتە.

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

بزاڤێ بکە

هاوکێشا وی راستەهێلی کو دڤان هەردوو خالانرا (65 ,5) و (71 ,7) دبورت، لسەر شێوێ لاری– ئێکودووبرین بنڤیسە.

Standard Form — شێوەیێ گشتی

چالاکی 4

Standard Form — شێوەیێ گشتی

رێڤەبەریا باغچێ گیانەوەران بلێتا چوونا ژووری ب 10 هزار دیناران بۆ مەزنان و ب پێنج هزار دیناران بۆ زارۆکان دەستنیشاکربوو. داهاتیێ رۆژا چارشەمبێ گەهشتبوو 000 350 1 دیناران.

خشتەێ بەهاکان	
x	y
50	
	120
	70
120	

1. x بکاربینە بۆ نواندنا ژمارا مەزنان و y بکاربینە بۆ نواندنا ژمارا زارۆکان. داهاتیێ رۆژا چارشەمبێ 000 350 1 دینار بوو. ئەڤێ ب هاوکێشەیەکێ دەرببرە.
2. ڤێ خشتەیێ تەمامبکە بۆ دروستکرنا وان جووتێن رێکخستی کو وێ هاوکێشەیێ ساخبکەن.
3. وێنەیێ روونکرنێ بۆ ئەوێ هاوکێشەیا بدەست تە کەفتی بکێشە بکارئینانا وان جووتێن رێکخستی یێن خشتەیێ ل سەرێ؟
4. ژ بەرسڤا خو پشت راستبە دەربارەی شێوەیێ وێنەیێ روونکرنێ ب رێیا شیکارکرنا هاوکێشەیێ بنڤیسینێ (y) پێ (x).

بجهئینان
بۆخۆشیێ

خالەکا چاڤرێیێ √

Standard Form — شێوەیێ گشتی

هاوکێشەیا راستەهێلێ لسەر شێوەیێ گشتی ئەڤەیە $ax + by = c$ کو:
- a و b و c ژمارەیێن راستینە.
- بکێماسی ئێك ژ هەردوو ژماران a و b یەکسان نەبیت ب سفرێ.

نموونــــە 3

هاوکێشەیا هەر راستەهێلەکی ل خوارێ لسەر شێوەیێ گشتی بنڤیسە:

أ) $y = -2x + 3$ ب) $x = -13y + 4$ ج) $\frac{3}{4}x - 2 = 3y$

شیکار

أ) $y = -2x + 3$

$2x + y = 3$

ب) $x = -13y + 4$

$x + 13y = 4$

ج) $\frac{3}{4}x - 2 = 3y$

$\frac{3}{4}x - 2 - 3y = 0$

$\frac{3}{4}x - 3y = 2$

ئەڤە لسەر شێوەیێ گشتییە چونکی دهێتە نڤیسین $\frac{3}{4}x + (-3)y = 2$

نموونـــــه 4

هەر هاوکێشەیا راستەهێلەکێ لسەر شێوەیێ لاری – ئێکودووبرین بنڤیسە.

أ $2y-2x=6$ ب $6x+4y=4$ ج $\frac{3}{4}y-6x=3$

شیکار:

أ
$$2y-2x=6$$
$$2y=2x+6$$
$$y=x+3$$

ب
$$6x+4y=4$$
$$4y=-6x+4$$
$$y=-\frac{3}{2}x+1$$

ج
$$\frac{3}{4}y-6x=3$$
$$\frac{3}{4}y=6x+3$$
$$y=8x+4$$

بزاڤێ بکە هاوکێشەیا $y-23=5(x-4)$ لسەر شێوەیێ لاری – ئێکودووبرین، پاشی لسەر شێوەیێ گشتی بنڤیسە.

راستەهێلێن ئاسۆیی و ستوونی Horizontal and Vertical Lines

هاوکێشا راستەهێلێ ئاسۆیی ئەڤەیە $y=b$ ، کو b ئێکودووبرینا راستەهێلێ ل گەل تەوەرێ y .
لارێ راستەهێلێ ئاسۆیی هەموو دەمان دبیتە سفر.

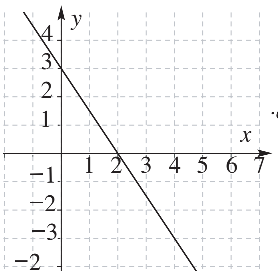
هاوکێشا راستەهێلێ ستوونی ئەڤەیە $x=b$ ، کو b ئێکو دووبرینا راستەهێلێ ل گەل تەوەرێ x .
لارێ راستەهێلێ ستوونی پێناسەنەکرییە.

شێوەیێن جیاواز بۆ هاوکێشەیا راستەهێلێ Various Form of the Equation of a Line

ناڤێ شێوەیێ	شێوەیێ هاوکێشەیا	نموونە
لاری - ئێکودووبرین	$y=mx+b$	$y=3x+5$
گشتی	$ax+by=c$	$3x-2y=5$
لاری - خاڵ	$y-y_1=m(x-x_1)$	$y-2=-3(x-1)$
دووخالان	$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$	$y-65=\frac{71-65}{7-5}(x-5)$

راهێـــــنان

بەردەوامبوون د بیرکارییێدا



1 هاوکێشەیا راستەهێلەکێ بنڤیسی کو لارێ وی m بیت و دخالا بنەرەترا ببورت.

2 چەوا راستەهێلێ $y=mx+b$ دئێتە گۆهۆڕین ئەگەر بهایێ b بهێتە گۆهۆڕین.

3 چەوا راستەهێلێ $y=mx$ دئێتە گۆهۆڕین ئەگەر بهایێ m بهێتە گۆهۆڕین؟

4 چەوا شێوەیێ لاری–خاڵ بکاردئینی بۆ نڤیسینا هاوکێشەیا راستەهێلێ د ڤان هەردوو خالانرا $(1, 1)$ و$(-2, 4)$ دبۆرت؟

5 روونبکە چەوا هاوکێشەیا راستەهێلێ ل وێنەیێ بەرامبەر دێ نڤیسی؟

6 چەوا هاوکێشەیا $3x+3y+2=0$ لسەر شێوەیێ لاری–ئێکودووبرین دێ نڤیسی؟

ڕاهێنانێن ئاڕاستەکری

هەر هاوکێشەیەکا راستەهێلی لسەر شێوەیێ گشتی بنڤیسە.

7 $y = 3x + 7$　　8 $2y = 3x - 4$　　9 $3x = -7y - 17$

هاوکێشەیا راستەهێلی لسەر شێوەیێ لاری–ئێکودووبڕین بنڤیسە ب زانینالاری وی و خالەکا تێرا دبۆرت.

	لاری	خاڵ
10	2	$(3, 4)$
11	-2	$(-3, 4)$
12	$\frac{1}{3}$	$(3, -4)$

هاوکێشەیا راستەهێلی لسەر شێوەیێ لاری– ئێکودووبڕین، و لسەر شێوەیێ گشتی بنڤیسە.

13 $y - 50 = 8(x - 4)$　　14 $3y = 9x + 15$　　15 $y = 10(-4x + 3)$

هاوکێشەیا راستەهێلی لسەر شێوەیێ لاری–ئێکودووبڕین بنڤیسە ب زانینا دوو خالان کو راستەهێل دوانرا دبۆرت.

16 $(5, -2)$ و $(-2, 5)$　　17 $(-3, 3)$ و $(-4, 4)$　　18 $(3, 2)$ و $(-3, -2)$

ڕاهێنان و بجهئینان

ئێکودوو برینا راستەهێلێ ل گەل هەردوو تەوەرین پۆتانێ دیاربکە.

19 $y = 4x + 5$　　20 $y = 8x - 1$　　21 $y = -3x + 5$

22 $y = -2x + 13$　　23 $y = 17x - 4$　　24 $y = -5x - 9$

25 $y + x = 10$　　26 $3x - 2y = 12$　　27 $5x + 4y = 12$

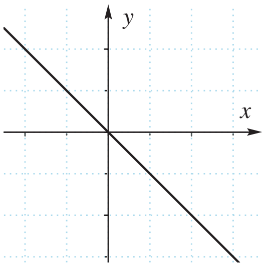
28 $4x - 5y = 20$　　29 $2x - 7y = 14$　　30 $9x + y = 18$

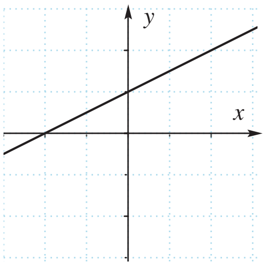
لارێ راستەهێلێ و ئێکودووبڕینا وی ل گەل تەوەرێ y دیاربکە بێی وێنەکێشان.

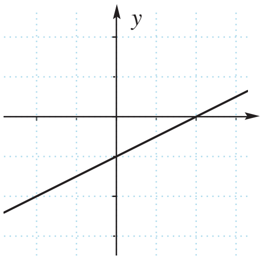
31 $y = -5x$　　32 $y = -5x + 3$　　33 $y = 7$

34 $x = 7$　　35 $y = 7 - x$　　36 $y = \frac{1}{3}x - 5$

هاوکێشەیا راستەهێلی لسەر شێوەیێ لاری–ئێکودووبڕین بنڤیسە.

37


38


39


40 لارێ راستەهێلێ چەندە ئەگەر هاوکێشەیا وی $6x + 2y = 40$ بیت؟

نەشێین هاوکێشەیا راستەهێلێ $x = 4$ لسەر شێوەیێ لاری–ئێکودووبڕین بنڤیسین، چونکی لارێ وی پێناسەنەکرییە، لێ دئێتە نڤیسین لسەر شێوەیێ $1 \times x + 0 \times y = 4$. ڤێ خشتێ تەمامبکە.

	هاوکێشەیا پێدای	شێوەیێ لاری–ئێکودووبڕین	شێوەیێ گشتی
41	$x = 1$		
42	$y = 4$		
43	$x + y = 5$		
44	$y = 4x$		
45	$x = 4y$		

بەرهنگاری

46 وێنەیێ هەردوو راستەهێلان $4x+2y=12$ و $2x+y=10$ بکێشە، چ تێبینیێ دکەی؟

بجهئینان

47 **ژینگەه:** وەسا دانە کو بلنداهیا ئاڤێ د حەوضەکێدا 35cm . و ئەڤ بلنداهیە زێدەدبیت ب تێکرایێ 5cm رۆژانە. هاوکێشەیەکێ بنڤیسە کو بلنداهیا ئاڤێ (h) و ژمارا رۆژان (d) بنوێنت، ڤێ هاوکێشەیێ ب وێنەیێ روونکرنێ بنوێنە. پشتی چەند رۆژان بلنداهیا ئاڤێ دبیتە 260cm ؟

بجهئینان

48 **بازرگانی:** بهایێ پلێتا چوونا ژۆرا ئاهەنگا دوماهیا سالا خواندنێ 5000 دینارن بۆ مەزنان و 3000 دینارن بۆ زارۆکان. هاوکێشەیەکێ بنڤیسە داهاتێ ئاهەنگێ بنوێنت کو دبیتە 000 700 دینار. بکاربینانا (x) بۆ ژمارا مەزنان و (y) بۆ ژمارا زارۆکان. لارێ ئەوی راستەهێلێ چەندە کو ڤێ هاوکێشەیێ دنوێنت، ئێکودووبڕینا وی ل گەل تەوەرێ (y) چەندە؟

لێنێرینەک بۆ پاش

49 رێسایا هەژمارتنا چێوەیێ بازنێ p یێ نیڤتیرێ وێ r بنڤیسە، پاشی ڤێ رێسایێ بکاربینە بۆ هەژمارتنا چێوەیێ بازنەکێ نیڤتیرێ وێ 8cm بیت. ژمارە 3.14 بکاربینە وەک بهایەکێ نێزیککری بۆ π .

ڤێ خشتێ بنڤیسە، پاشی تەمامبکە. کەرتان ب سادەترین بنڤیسە.

	شێوەیێ کەرتی	شێوەیێ دەهی	ژمارە وەک رێژەیا سەدی
50		$0.\overline{3}$	$33\frac{1}{3}\%$
51		0.875	
52			2%
53	$\frac{1}{20}$		
54			$12\frac{1}{2}\%$
55	$\frac{2}{3}$		
56	$\frac{1}{6}$		
57			0.01%
58		0.80	
59	$\frac{2}{5}$		
60		0.45	
61	5/6		

بجهئینان

لێنێرینەک بۆ پێش

62 دئێک رووتەختێ پۆتانیدا هەردوو راستەهێلان $y=2.12x-3.7$ و $y=x+5.4$ بکێشە و خالا ئێکودووبڕینا وان دیاربکە.

وانەیا 4

تەریببوون و ستوونبوونا راستەهێلان
Parallel and Perpendicular Lines

ئارمانج

- دیاركرنا تەریبوونا دوو راستەهێلان یان ستوونبوونا وان ب بەراوردكرنا لارێێن وان.
- نڤیسینا هاوكێشەیا راستەهێلەكی تەریب ل گەل راستەهێلەكی دی یان ستوون لسەر وی.

بۆچی

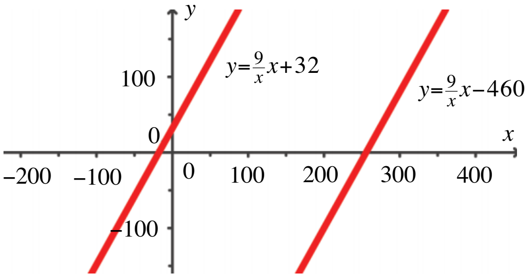
دیاركرنا راستەهێلێن تەریب یان ستوون ب رێیا بەراوردكرنا لارێێن وان دهێتە دانان ب پێنگاڤەكا گرنگ بۆ زانینا پەیوەندییا لناڤبەرا راستەهێلان بێی وێنەكێشانا وان.

بجهئینان
فیزیا

ئاڤ بشێوەیێن جۆراو جۆر دیاردبیت ل دووڤ پلەیێن گەرماتیا وێ. ئاڤ ل پلەیێن گەرماتیا گەلەك نزم دبەستت، وەكی یا دیار ل چیایێ بەفرێ ل وێنەی. یان ئاڤ دهێتە گۆهۆرین بۆ هەلمێ ل پلەیێن گەرماتیا گەلەك بلند، وەكی ئەوێ هەلما ژ ئەردی بلندبیت ل وێنەی.

	فهرنهایت	سەدی	كالڤن
كولانی ئاو	212	100	373
بەستنی ئاو	32	0	273
سفری رووت	−460	−273	0

خشتەیێ بەرامبەر پلەیێن گەرماتیێ ب سێ پیڤەران دیاردكەت، پیڤەرێ فهرنهایت و پیڤەرێ سەدی و پیڤەرێ كالڤن. گۆهۆرینا پلەیا گەرماتیێ ژ پیڤانا سەدی بۆ پیڤانا فهرنهایت پێ یاسایا $F=\frac{9}{5}C+32$ دبیت،وپیڤانا كالڤن بۆ پیڤانا فهرنهایت پێ یاسایا $F=\frac{9}{5}K-460$ دبیت. تو دكارێ ڤان هەردوو هاوكێشان جارەكا دی بنڤیسی ب رێیا لجهدانانا y ل جهێ F و (x) ل جهێ C یان K.



$y=\frac{9}{5}x+32$ ، $y=\frac{9}{5}x-460$ بەرێ خو بدێ ئەو هەردوو راستەهێلێن ڤان هەردوو هاوكێشەیان دنوێنن، دتەریبن و لارێن وان یەكسانن.

تەریبوونا راستەهێلان   Parallel Lines

ئەگەر لارێ دوو راستەهێلان یەکسانبوون دێ ئەو راستەهێل د تەریب بن.

ئەگەر دوو راستەهێلێن نا ستوون تەریبوون دێ لارێ هەردووان یەکسان بن.

نموونە 1

لسەر شێوێ لاری- ئێکوددوبرین هاوکێشەیا وی راستەهێلێ تەریب دگەل راستەهێلێ $y = 3x - 7$ و تەوەرێ y لە 4 دبرت بنڤیسە.

شیکار

لارێ راستەهێلێ دبیتە 3 . چونکی تەوەرێ -y ل 4 دبرت، هاوکێشەیا وی دبیتە $y = 3x + 4$.

بزاڤێ بکە

لسەر شێوەیێ لاری ئێکوددوبرین هاوکێشەیا وی راستەهێلێ تەریب دگەل راستەهێلێ $y = 0.5x + 5$ و تەوەرێ y لە -2 دبرت بنڤیسە.

ل بیرا خو بینە کو دوو راستە ستوون دبن ئەگەر ئێکوددوو ببڕن و گۆشەیێن وەستاو پێکبینن. دڤێ چالاکیێ دا پەیوەندیا لناڤبەرا لارێن دوو راستەهێلێن ستوون دگەل ئێکوددوو دێ دیارکەی.

چالاکی

ڤەدیتنا پەیوەندیا لناڤبەرا ستوونبوونا راستەهێلان و لارێن وان
Explorer Relation between Slope of Perpendicular Lines

بۆ ڤێ چالاکیێ تە پێتڤیاتی ب راستەیەکا وەستاو و کاغەزا چار گۆشەیان هەیە کو هەردوو تەوەرێن رووتەختێ پۆتانێ لسەر بن.

1. ئەرێ هەردوو راستەهێل $y = -2x + 3$ و $y = 0.5x - 2$ ئێکوددوو دبڕن؟ ئەوێ روونبکە.
2. وان هەردوو راستەهێلان دئێک رووتەختێ پۆتانیدا بکێشە، و ب وێنەیێ روونکرنێ پۆتانێ خالا ئێکوددوبرینا وان دیاربکە.
3. ل دووڤ رایێ تە پەیوەندی لناڤبەرا هەردوو راستەهێلان چییە؟ راستەیەکا وەستاو بۆ ساخکرنا بەرسڤا خو بکاربینە.
4. لارێ راستەهێلێ ئێکێ و لارێ راستەهێلێ دووێ لێکبدە، ئەنجامێ لێکدانێ چەندە؟

ستوونبوونا راستەهێلان   Perpendicular Lines

ئەگەر ئەنجامێ لێکدانا لارێ دوو راستەهێلان (-1) بیت، دێ ئەو ستوون بن دگەل ئێکودوو.

ئەگەر دوو راستەهێل ستوونبوون دێ ئەنجامێ لێکدانا لارێن وان (-1) بیت.

نموونە 2

لسەر شێوەێ لاری-ئێکوددوبرین هاوکێشەیا ئەوی راستەهیلی بنڤیسە کو تەوەرێ دووێ لە (4) دبرت و ستوون دبیت دگەل راستەهێلێ $y = 3x + 2$.

شیکار

لارێ راستەهێلێ دبیتە $-\frac{1}{3}$ چونکی ستوونە دگەل راستەهێلێ $y = 3x + 2$ کو لارێ وی (3) .
هاوکێشەیا داخوازکری ئەڤەیە $y = -\frac{1}{3}x + 4$.

بزاڤێ بکە

لسەر شێوەیێ لاری-ئێکوددوبرین، هاوکێشەیا وی راستەهێلێ تەوەرێ دووێ لە (6) دبرت و ستوون بیت ل گەل راستەهێل $y = 4x + 2$ بنڤیسە.

نموونە 3

لسەر شێوەیێ لاری – خال، هاوکێشەیا ئەوێ راستەهێلێ بنڤیسە کو د خالا $(4, 5)$ را دبۆرت و ستوون بیت لسەر راستەهێلێ $2x+3y=7$.

شیکار

هاوکێشەیا راستەهێلێ دیار لسەر شێوەیێ لاری – ئێکودووبڕین بنڤیسە: $y=-\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$ لارێ راستەهێلێ ستوون دبیتە $\frac{3}{2}$. چونکی هاوکێشەیا راستەهێلێ لسەر شێوەیێ لاری – خال ئەڤەیە $y-y_1=m(x-x_1)$ هاوکێشەیا راستەهێلێ داخوازکری $y-5=\frac{3}{2}(x-4)$.

بزاڤێ بکە لسەر شێوەیێ لاری – خال، هاوکێشەیا ئەوێ راستەهێلێ بنڤیسە کو دخالا $(3, -2)$ را دبۆرت و ستوون بیت لسەر راستەهێلێ $4x-2y=-6$.

راهێنـــــــــان

بەردەوامبوون د بیرکارییێدا

1 روونبکە چەوا هاوکێشەیا راستەهێلەکێ تەریب دگەل راستەهێل $y=4x+3$ دێ نڤیسی.

2 لارێ راستەهێلەکێ $\frac{2}{3}$ ، روونبکە چەوا لارێ راستەهێلەکێ ستوون لسەر وێ دێ نڤیسی.

3 چەوا لارێ راستەهێلەکێ ستوون دگەل $y=\frac{1}{3}x+2$ دێ دیار کەی؟

4 روونبکە چەوا هاوکێشەیا راستەهێلەکێ ستوون ل گەل راستەهێلێ $y=4x+3$ دێ نڤیسی.

راهێنانێن ئاڕاستەکری

لسەر شێوەیێ لاری – ئێکودووبڕین، هاوکێشەیا راستەهێلەکێ بنڤیسە کو تەوەرێ **y** لە (5) دبڕت و تەریب بیت دگەل راستەهێلێ دیارکری.

5 $y=2x+3$ **6** $y=-3x$ **7** $4y=x$ **8** $y=-6x+2$

لسەر شێوەیێ لاری – ئێکودووبڕین، هاوکێشەیا راستەهێلەکێ بنڤیسە کو تەوەرێ **y** لە (5) دبڕت و ستوون بیت دگەل راستەهێلێ دیارکری.

9 $y=3x-3$ **10** $y=-3x$ **11** $5y=x$ **12** $-6y=x$

لسەر شێوەیێ لاری – خال، هاوکێشەیا راستەهێلەکێ بنڤیسە کو د خالا $(4, 5)$ را دبۆرت و ستوون بیت ل گەل راستەهێلێ دیارکری.

13 $2x+3y=4$ **14** $x-3y=8$ **15** $-2x-8y=16$

راهێنان و بجهئینان

لارێ هەر راستەهێلەکێ دیاربکە:

16 $y=4x+10$ **17** $3x+y=7$ **18** $10=-5x+2y$

19 $4x-3y=12$ **20** $y=\frac{1}{3}x-3$ **21** $3x-y=7$

22 $2x-y=14$ **23** $3x+2y=51$ **24** $13=20x-5y$

25 $3y=-4x+2$ **26** $\frac{2}{3}x+6y=1$ **27** $4x+\frac{1}{4}y=8$

لارێ راستەهێلی ستوون ل گەل راستەهێلی پێدای دیاربکە.

28 $y=-\frac{1}{3}x+10$ **29** $-\frac{1}{2}x-y=20$ **30** $13=-x+y$

31 $3x+12y=12$ **32** $y=5x+10$ **33** $3x+y=2$

34 $20=-5x+2y$ **35** $4x+4y=12$ **36** $2y=5x+11$

37 $-4x+8y=17$ **38** $12x+3y=10$ **39** $4y=20x-3$

لسەر شێوەیێ گشتی، هاوکێشەیا وی راستەهێلی بنڤیسە کو دخالا (2، 3) را دبۆرت و تەریب بیت دگەل راستەهێلی دیارکری.

40 $x+y=1$ **41** $3x=7y+2$ **42** $y=2x-3$

43 $3y=2x$ **44** $7x-2y=10$ **45** $11=3y+2x$

لسەر شێوەی لاری–ئێکودووبرِین، هاوکێشەیا وی راستەهێلی ب ڤان پێداییان دیارکری بنڤیسە.

	دقێ خالیرا دبۆرت	تەریبە دگەل راستەهێلێ
46	$(3, -5)$	$5x-2y=10$
47	$(-2, 7)$	$y=3x-4$
48	$(2, 4)$	$y=7$
49	$(2, -4)$	$y=3x-4$
50	$(-1, 4)$	$y=2x+5$

	دقێ خالیرا دبۆرت	ستوونە دگەل راستەهێلێ
51	$(3, -3)$	$5x+2y=10$
52	$(2, 7)$	$y=3x-4$
53	$(2, -4)$	$y=7$
54	$(-2, 4)$	$3x+y=5$
55	$(-1, 4)$	$y=2x-5$

وێنەیێ راستەهێلی $y=5x$ بکێشە.

56 وێنەیێ راستەهێلەکی تەریب دگەل راستەهیلی $y=5x$ بکێشە و هاوکێشەیا وی بنڤیسە.

57 وێنەیێ راستەهێلەکی ستوون دگەل راستەهێلێ $y=5x$ بکێشە و هاوکێشەیا وی بنڤیسە.

تو دشێی چ بێژی دەربارەی لارێ هەر راستەهێلەکی ل خوارێ:

58 تەریب بیت بۆ راستەهێلەکی ئاسۆیی. **59** ستوون بیت بۆ راستەهێلەکی ئاسۆیی.

60 تەریب بیت بۆ راستەهێلەکی ستوونی. **61** ستوون بیت بۆ راستەهێلەکی ستوونی.

گرێدان

ئەندازە: هاوکێشەیێن چار راستەهێلان بنڤیسە ئێکودوو برِین و چار گۆشەیەکێ پێك بینن لایێن وێ:

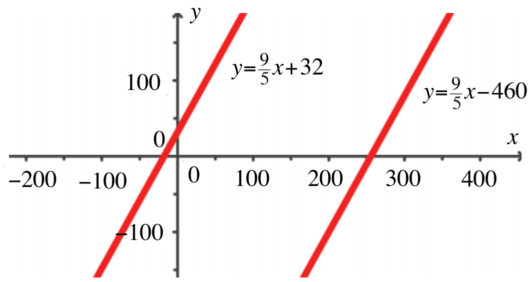
62 تەریب بن دگەل هەر دوو تەوەرێن پۆتانی.

63 تەریب نەبن دگەل هەردوو تەوەرێن پۆتانی.

64 ئەندازە: لایەکی چارگۆشێ بکەڤتە سەر راستەهێلێ $y=\frac{3}{4}x+5$. هاوکێشەیێن وان راستەهێلان بنڤیسە، کو لایێن دی یێن چارگۆشێ بکەڤنە سەر وان.

بجهئینان

65 **فیزیا:** یاسایەکێ بنڤیسە بۆ گۆهۆڕینا پلەیێن گەرماتیێ ژپیڤانا فەرنهایت بۆ پیڤانا سەدی. یاسایەکا دی بنڤیسە بۆ گۆهۆڕینا پیڤانا فەرنهایت بۆ پیڤانا کالڤن، وان هەردوو یاسایان لسەر شێوەیێ هاوکێشەیێ بنڤیسە، بکارئینانا (x) بۆ پلەیێن گەرماتیێ ب پیڤانا فەرنهایت، و (y) بۆ پلەیێن گەرماتیێ ب پیڤانا کالڤن، یان ب پیڤانا سەدی، وێنەیێ هەردوو راستەهێلان بکێشە.



هاوکێشەیا $y=\frac{9}{5}x+32$ گۆهۆڕینە ژ پیڤانا سەدی بۆ پیڤانا فەرهایت، و هاوکێشەیا $y=\frac{9}{5}x-460$ گۆهۆڕینە ژ پیڤانا کالڤن بۆ پیڤانا فەرنهایت.

65 پەیوەندییا لناڤبەرا هەردوو راستەهێلێن راهێنانا 64 چییە؟ لارێ هەر ئێکێ ژ وان بنڤیسە.

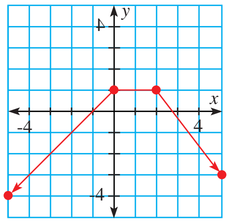
بەرهنگاری

66 پەیوەندییا لناڤبەرا هەردوو راستەهێلێن راهێنانا (65) و هەردوو راستەهێلێن گۆهۆڕینێ ژ پیڤانێن کالڤن و سەدی بۆ پیڤانا فەرنهایت دنوینن، چییە؟

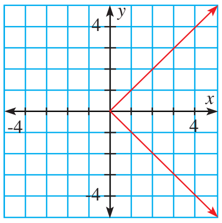
لێنێرینەک بۆ پاش

تاقیکرنا راستەهێلی ستوونی بکاربینە، بۆ بریاردانێ لسەر ڤان وێنەیێن روونکرنێ ل خوارێ، ئەرێ نەخشەیێ دنوینن یان نە؟

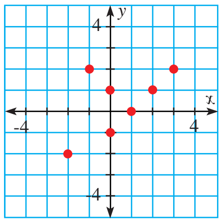
68



69



70



لێنێرینەک بۆ پێش

چەند جووتێن رێکخستی دبنە شیکار بۆ سیستەمێ دوو هاوکێشەیێن هێلەیی ب دوو گۆڕاوان، ئەگەر ئەو هەردوو راستەهێلێن هەردوو هاوکێشەیان دنوینن:

71 تەریب بن؟

72 ستوون بن؟

وانەیا 5

نەخشەییێن دووجای Quadratric Functions

بۆچی

تو دشێی گەلەک حالەتێن ژیانا رۆژانا وەک برەکی دووجای بنوینی. بۆ نموونە ئەو ماوەیێ ترومبێلەک دبڕت هەتا راوەستت دەمێ شوفێرێ وێ هەول ددەت راگرت لدەمێ شوفێر رێگرەکی دبینت.

ئارمانج

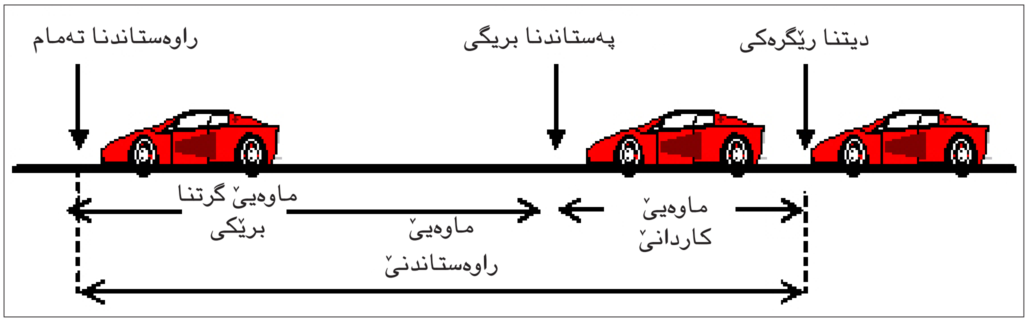
- پۆلێنکرنا نەخشەیا دووجای $f(x) = ax^2 + bx + c$ و نواندنا وێ ب وێنەیێ رونکرنێ.
- وێنەیێن روونکرنێ بۆ نەخشەیا دووجای دنوێنن، و ناڤێ ((برگەیێ هاوتا)) بکاردئیت بۆ وێنەیێ روونکرنا وێ.
- سەرێ برگەیێ هاوتا و تەوەرێ وێ دناسن.
- بەرەڤ زێدەبوون و بەرەڤ کێمبوونا نەخشەیێ ب وێنەیێ روونکرنا وێ دیاردکەن.
- بەرێ ڤەکرنا برگەیێ هاوتا دیاردکەن ب هۆیێ نیشانا هاوکۆلکێ (a).

بجهێنان

فیزیا

برێن جەبری یێن دووجای Quadratic Expressions

ئەو دووریا ترومبێل دبڕت و هەتا راوەستت دەمێ شوفێر هەول ددەت ترومبێلێ راوەستینت، لدەمێ رێگرەکی لپێش خو دبینت، ژ دوو ماوەیان پێکدئێت، وەکی ل وێنەیێ خوارێ یێ دیار:



تو دشێی دووریا پێدڤی بۆ راوەستیانا ترومبێلێ ب ڤی برێ جەبری دەرببری: $d(x) = \frac{1}{5}x + \frac{1}{160}x^2$ کو، (x) لەزا ترومبێلێ ل دەمێ دیتنا رێگری ب (کم/دەمژمێری) دنوێنت،

$d(x)$ دووریا تەمام ب (مێتەران) دنوێنت، و $\frac{1}{5}x$ ماوەیێ کارداندێ و $\frac{1}{160}x^2$ دووریا راگرتنێ دنوێنت. ئەگەر خشتێ بهایان بۆ برێ $d(x)$ بنوێنی ب هویێ بژمێرا روونکرنێ، دێ بینی کو دووریا پێتڤی بۆ راوەستیانێ دبیتە 25m بنێزیکی دەمێ لەزا ترومبێلێ 50km/h بیت، و دبیتە 82m بنێزیکی دەمێ لەزا ترومبێلێ 100km/h بیت.

و دێ هوسا بینی کو دووریا پێدڤی بۆ راوەستیانێ 3 جاران زێدەدبیت دەمێ لەز دووجاران زێدە دبیت.

تەکنۆلۆژیا

بژمێرا روونکرنێ

هزرکرنەکا رەخنەگر

ئەرێ پەیوەندیا لناڤبەرا لەزێ (x) و دووریا راوەستیانێ (d) پەیوەندیەکا هیلییە؟ ئەوێ روونبکە.

بڕێن دووجای Quadratic Expressions

بڕێن دووجای ئەو بڕەنە کو ب شێوەیێ ax^2+bx+c ئێنە نڤیسین، کو a ، b ، c ژمارەیێن ڕاستینە. و $a \neq 0$ دبێژنە a ، b ، c هاوکولکە **Coefficients** بۆ بڕێ دووجای.

سادەترین بڕێ دووجای دبیتە بڕێ x^2 ب شێوەیێ گشتی، ئەگەر بڕەکی دی یێ هێلی دگەل وی لێکبدەی. دێ بڕەکی دووجای بدەست تەکەڤت وەکی ل ڤێ چالاکیا ل خوارێ یا دیار:

چالاکی 1

بڕێن دووجای و بڕێن هێلی Quadratic and Linear Expressions

1. ڤێ خشتێ تەمامبکە.

بڕێ ئێکێ	بڕێ دووێ	ئەنجامێ لێکدانا هەردوو بڕان
$2x-2$	$2x+1$	$(2x-2)(2x+1)=4x^2-2x-2$
$x+1$	$x+1$	
$2x$	$-2x+1$	
$-x+2$	$0.5x+1$	

2. هاوکولکێن بڕێ دووجای ل هەر بارەکی پرسیارا پێشتر دیاربکە.

نەخشەیێن دووجای Quadratic Functions

ل وانەیا دووێ یا ڤی بەشی تو فێری نەخشەیێن هێلی بووی، دڤێ وانێدا دێ فێری جورەکی نوو ژ نەخشان بی، ئەو نەخشەیێن دووجاینە. ل بیرا تە بیت کو شێوەیێ گشتی بۆ نەخشەیا هێلی ئەڤەیە $f(x)=mx+b$ ، ئەو یا پێناسەکرییە ب بڕەکی جەبری هێلی. لێ نەخشەیا دووجای ب بڕەکی جەبری دووجای دهێتە پێناسەکرن.

نەخشەیا دووجای Quadratic Function

نەخشەیا دووجای: نەخشەیەکە ڕێسایا وێ ب هۆیێ بڕەکی دووجای ئێك گۆڕاو دهێتە نڤیسین، ئانکو ب ڤی شیوەی دهێتە نڤیسین $f(x)=ax^2+bx+c$ کو a ، b ، c ژمارەیێن ڕاستینە و $a \neq 0$. دبێژنە a ، b ، c هاوکۆلکێن نەخشەیا دووجای.

سادەترین شێوەیێ نەخشەیێن دووجای دبیتە $f(x)=x^2$. تو دکاری هەموو نەخشەیێن دووجای ژ ڤێ نەخشێ پێکبینی بکارئینانا جهگۆهۆڕکێن سادە یان یێن ئاوێتە، و ژبەر ڤێ ئێکێ نەخشەیا $f(x)=x^2$ دبیتە نەخشەیا بنەڕەت بۆ هەموو نەخشەیێن دووجای. نەخشەیا $d(x)=\frac{1}{5}x+\frac{1}{160}x^2$ نموونەیەکە بۆ نەخشەیا دووجای.

هزرکرنەکا ڕەخنەگر هاوکولکێن نەخشەیا دووجای ئەوا دووریا ڕاوەستیانا ترومبێلێ دنوێنت، کیژ وانن؟

نموونە 1

رووNبکە کو نەخشەیا $f(x)=(2x-1)(3x+5)$ نەخشەیەکا دووجاییە، و هاوکولکێن وێ a و b و c دیاربکە.

شیکار

ڕێیا ئێکێ

$$f(x)=(2x-1)(3x+5)$$
$$=2x(3x+5)-(3x+5)$$
$$=6x^2+10x-3x-5$$
$$=6x^2+7x-5$$

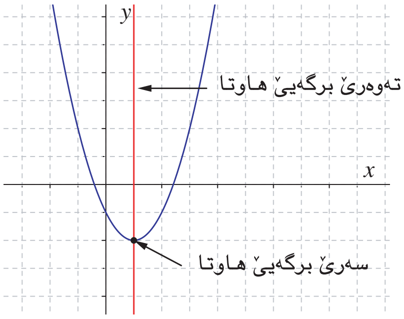
ڕێیا دووێ

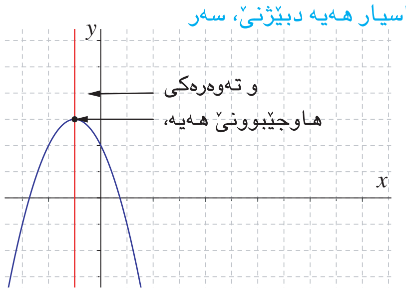
$$f(x)=(2x-1)(3x+5)$$
$$=(2x-1)3x+(2x-1)5$$
$$=6x^2-3x+10x-5$$
$$=6x^2+7x-5$$

$f(x)=6x^2+7x-5$ نەخشەیەکا دووجاییە و هاوکولکێن وێ $a=6$ ، $b=7$ ، $c=-5$.

بزاڤێ بکە رووNبکە کو نەخشەیا $f(x)=(2x-5)(x-2)$ نەخشەیەکا دووجاییە و هاوکولکێن وێ دیاربکە.

وێنەیێ رووNکرنا نەخشەیا دووجای ناڤەکی تایبەت هەیە دبێژنێ **بڕگەیێ هاوتا** ***Parabola*** . وێنەیێن ل خوارێ دوو جورێن بڕگەیێن هاوتا دیاردکەن.





تێبینیێ بکە کو هەر بڕگەیەکی هاوتا خالەکا ناسیار هەیە دبێژنێ **سەر** ***Vertex*** ، و تەوەرەکی هاوجێبوونێ هەیە، بڕگەیێ دابەشدکەت بۆ دوو بەشێن جووتبووی. و هەر وەسا تێبینیێ بکە کو لسەر وێنەیێ نەخشەیا دووجای، مەزنترین یان بچووکترین بەهایێ نەخشێ دیاردبیت.

ئەگەر بهووری بەرێ خۆ بدەیە نەخشەیا دووجای $f(x)=ax^2+bx+c$ ، بۆتە دێ دیاربیت کو بەهایێ $f(x)$ دئێتە هەژمارتن هەر بهایێ (x) چەند بیت. ئەڤە وێ ئێکێ دگەهینت کو بوارێ نەخشەیا دووجای یەکسانە کومەلا ژمارەیێن راستی ب تەمامی. لێ مەودایێ نەخشێ هەر وەکی ل وێنەی دیار، دبیتە کومەلا وان ژمارەیێن راستی کو نە کێمترن ژ بچووکترین بەهایێ نەخشێ (ل جۆرێ ئێکێ)، یان دبیتە کۆمەلا وان ژمارەیێن راستی ئەوێن نە زێدەترین ژ مەزنترین بهایێ نەخشێ [ل جورێ دووێ].

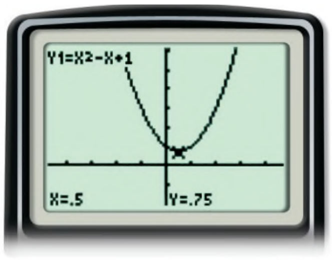
نموونە 2

ئەرێ سەرێ ڤی نەخشەیا دووجای $f(x)=x^2-x+1$ مەزنترین یان بچووکترین بەهای دنوێنت؟ تو دکاری بژمێرا رووونکرنێ یان خشتێ بەهایان بکاربینی.

شیکار

رێیا ئێکێ

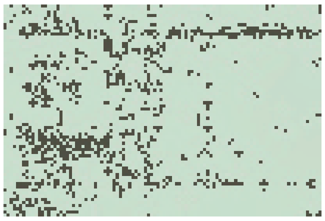
تو دشێی بژمێرا رووونکرنێ بکاربینی دا دیاربکەی کو نەخشێ بچووکترین بەها هەیە.



ئەگەر ل دووڤ وێنەیێ رووونکرنێ بچی، دێ بۆ تە دیاربیت کو پۆتانێ سەرێ وی دبیتە $(0.5, 0.75)$

رێیا دووێ

تو دشێی بژمێرا رووونکرنێ بکاربینی بۆ دروستکرنا خشتەیێ بەهایان بۆ نەخشەیێ. ژ خشتەی دیاردبیت کو نەخشە دگەهتە بچووکترین بەها دەمێ بهایێ x دبیتە 0.5 و ئەڤە بچووکترین بەهایە، دبیتە 0.75 .



ژڤێ خشتەی دیاردبیت کو سەرێ برگەیێ هاوتا دبیتە خالا $(0.5, 0.75)$.

بزاڤێ بکە

ئەرێ سەرێ نەخشەیا دووجای $f(x)=-2x^2-4x+1$ مەزنترین یان بچووکترین بەها دنوێنت؟

تو دشێی ب بەرێ خودانا نیشانا هاوکۆلکێ (a) بزانی کو نەخشەیا دووجای $f(x)=ax^2+bx+c$ مەزنترین یان بچووکترین بەها هەیە.

مەزنترین یان بچووکترین بەها؟ Maximum and Minimum values

- وێنەیێ رووونکرنا نەخشەیا دووجای $f(x)=ax^2+bx+c$ ، کو a و b و c ژمارەیێن راستینە و $a \neq 0$ برگەیێ هاوتا دنوێنت.
- ئەگەر (a)هاوکولکێ x^2 یێ موجەب بیت، برگەیێ هاوتا دێ بەرەڤ ژۆر یێ ڤەکری بیت، و سەرێ وێ نزمترین خالا برگێیە، وتانێ خالا سەرێ وێ **بچووکترین بەهایە Minimum Value** بۆ نەخشەیێ.
- ئەگەر (a)، هاوکولکێ x^2 یێ سالب بت، برگەیێ هاوتا بەرەڤ ژێر دێ ڤەکری بیت. و سەرێ وێ مەزنترین خالا برگێیە، وتانێ خالا سەرێ وێ **مەزنترین بەهایە Maximum Value** بۆ نەخشەی.
- تانێ سەرێ برگەیێ هاوتا دبیتە پەرە بەها **Extremum Value** بۆ نەخشەیا دووجای، ئەڤ پەرە بەها دبیتە مەزنترین یان بچووکترین بەها.

نموونە 3

ئەرێ برگەیێ هاوتا بەرەڤ ژۆر یان بەرەڤ ژێر یێ ڤەکرییە؟ ئەرێ سەرێ وێ مەزنترین یان بچووکترین بەها دنوێنت؟

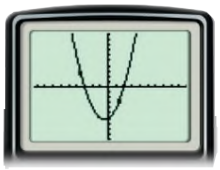
أ $f(x)=x^2+x-6$

ب $f(x)=5+4x-x^2$

شیکار

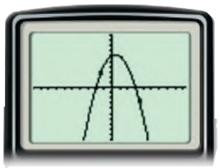
أ ل نەخشەیا $f(x)=x^2+x-6$ هاوکولکێ x^2 دبتە (1)، و چونکی ئەوی مووجەبە برگەیێ هاوتایێ ڤەکرییە بەرەڤ ژۆر نەخشێ بچووکترین بها هەیە دسەرێ وێدا.

ساخبکە



ب ل نەخشەیا $f(x)=5+4x-x^2$ هاوکولکێ x^2 دبتە (-1)، و چونکی ئەوی سالبە برگەیێ هاوتایێ ڤەکرییە بەرەڤ ژێر، نەخشەی مەزنترین بها هەیە دسەرێ وێدا.

ساخبکە



چالاکی 2

جهگۆهۆرینا نەخشەیا دووجایا بنەڕەت Transforming Quatratic Parent Function

تە پێدڤیاتی هەیە ب کاغەزێن چارگۆشەی یان بژمێرا روونکرنێ.

1. خشتێ بهایان دروستبکە پاشی چەماوەیێ هەر نەخشەیەکێ بکێشە.

$y=x^2$ $y=x^2+1$ $y=x^2-1$

2. چ گۆهۆرین بسەر چەماوەیێ نەخشەیا بنەڕەت ئەنجامددەت، ئەگەر (1) ێ زێدەبکەی یان کێمبکەی ژ نەخشێ؟

3. خشتێ بهایان دروستبکە، پاشی هێلکارێ هەر نەخشەیەکێ بکێشە.

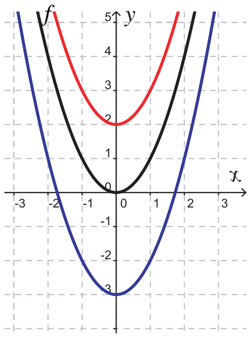
$y=x^2$ $y=(x+2)^2$ $y=(x-2)^2$

4. چ گۆهۆرین بسەر هێلکارێ نەخشەیا بنەڕەت ئەنجامددەت، ئەگەر (2) ێ زێدەبکەی یان کێمبکەی بۆ گوراوێ سەربەخۆ (x).

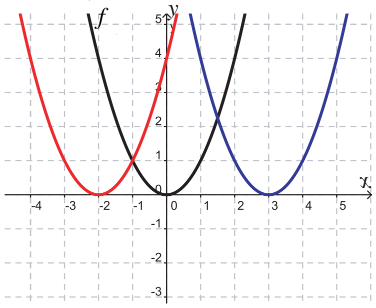
5. خشتێ بهایان دروستبکە، پاشی هێلکارێ هەر نەخشەیەکی بکێشە.   خالا چاڤدێریێ √

$y=x^2$ $y=(x-2)^2+1$ $y=(x-2)^2-1$ $y=(x+2)^2+1$

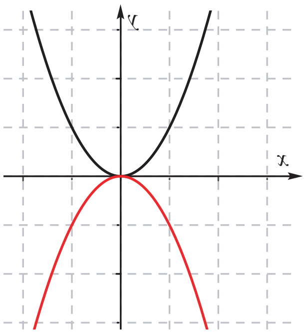
6. چ گۆهۆرین بسەر چەماوەیێ نەخشەیا بنەڕەت ئەنجامددەت، ئەگەر (2) ژ x کێمبکەن و (1) بۆ نەخشێ زێدەبکەن؟ و ئەگەر (2) بۆ x زێدەبکەن و (1) ژ نەخشێ کێمبکەن؟   خالا چاڤدێریێ √



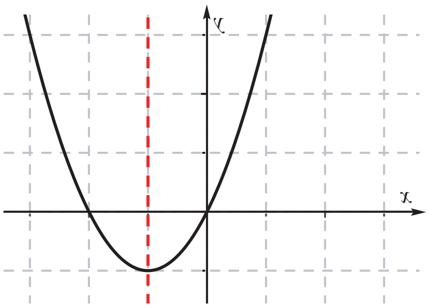
هەر ئێک ژ هەردوو نەخشەیان $y=x^2+2$ و $y=x^2-3$ راکێشانەکا ستوونی **Vertical Translation** بۆ هێلکارێ بنەڕەت $y=x^2$ دنوێنت. ئانکو زێدەکرنا ژمارەکێ یان کێمکرنا وێ بۆ نەخشەیێ دبیتە هویێ راکێشانا هێلکارێ وێ بەرەڤ ژۆر یان بەرەڤ ژێر



هەر ئێک ژ هەردوو نەخشەیان $y=(x+2)^2$ و $y=(x-3)^2$ راکێشانەکا ئاسۆیی **Horizontal Translation** بۆ هێلکارێ نەخشەیا بنەڕەت $y=x^2$ دنوێنت. ئانکو زێدەکرنا ژمارەیەکێ بۆ گۆڕاوێ سەربەخو یان کێمکرنا ژمارەکێ ژ وێ دبیتە هویێ راکێشانا هێلکارێ نەخشەیا بنەڕەت بۆ لایێ چەپێ یان بۆ لایێ راستێ.



چەماوەیێ نەخشەیا $y = -x^2$ دبیتە وێنە دانەوەیێ نەخشەیا بنەرەت لدۆر تەوەرێ x ، لێ سەرێ برگەیێ هاوتایی بنەرەت کو بچووکترین بها دنوێنت دبیتە مەزنترین بەها بۆ نەخشەیا $y = -x^2$.



ئەڤ راستەهێلی ستوون کو د سەرێ برگەیێ هاوتا رادبۆرت، دبیتە تەوەرێ هاوجێبوونێ بۆ چەماوەیێ نەخشەێ، چونکی ئەو راستەهێلە برگەیێ هاوتا دابەش دکەت بۆ دوو بەشێن جووتبووی، دبێژنە وی راستەهێلی تەوەرێ برگەیێ هاوتا **Axis of Symmetry** .

نموونە 4

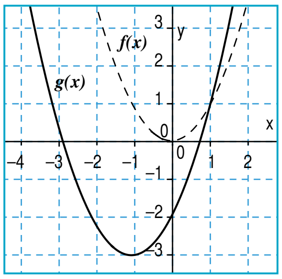
جهگۆهۆرکیا وێنەیێ روونکرنا نەخشەیا دووجای $f(x)=x^2$ چەوە جهگۆهۆرکیا نەخشەیا دووجاییا بنەرەت دکەی بۆ بدەست کەفتنا وێنەیێ نەخشەیا ل خوارێ:

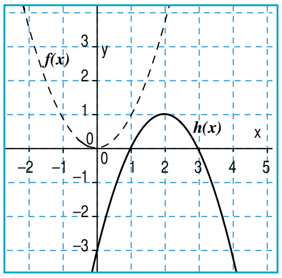
أ $g(x)=-(x+1)^2-3$

راکێشانا نەخشەیا بنەرەت ب 1 یەکە بۆ رەخێ چەپێ، پاشی وێنەدانەوە ل دۆر تەوەرێ ئێکێ، پاشی راکێشانا ب 3 یەکەیان بەرەڤ ژێر.

ب $h(x)=-(x-2)^2+1$

راکێشانا نەخشەیا بنەرەت ب 2 یەکەیان بۆ رەخێ راستێ، پاشی وێنەدانەوە ل دۆر تەوەرێ ئێکێ پاشی راکێشان ب 1 یەکە بەرەڤ ژۆر.





بزاڤێ بکە چەوە جهگۆهۆرکیا وێنەیێ نەخشەیا دووجاییا بنەرەت $f(x)=x^2$ دکەی بۆ بدەست کەفتنا وێنەیێ هەر نەخشەیەکا ل خوارێ؟

أ $g(x)=(x-2)^2+4$ ب $h(x)=(x+3)^2-2$

ڕاهێنان

بەردەوامبوون د بیرکارییدا

1 جیاوازی لناڤبەرا وێنەیێ روونکرنا نەخشەیا هێلی و وێنەیێ نەخشەیا دووجای روونبکە.

2 جیاوازی لناڤبەرا برێ جەبریێ نەخشەیا هیلی و برێ جەبریێ نەخشەیا دووجای روونبکە.

3 چەوا دزانی کو سەرێ برگەیێ هاوتا بچووکترین بها یان مەزنترین بها بۆ نەخشەیا دووجای دنوێنت.

4 پەیوەندی چییە لناڤبەرا وێنەیێ روونکرنا نەخشەیا بنەرەت و وێنەیێ روونکرنا نەخشا $y = x^2 - 8$ ؟

5 پەیوەندی چییە لناڤبەرا وێنەیێ روونکرنا نەخشەیا بنەرەت و روونکرنا نەخشەیا $y = (x-8)^2$ ؟

ڕاهێنانێن ئاڕاستەكری

ڕوونبكە كو نەخشە دبیتە نەخشەیەكا دووجای و هاوكۆلكێن وێ دیاربكە:-

6 $f(x)=(x+1)(x-7)$ 7 $f(x)=(x+2)(x+5)$ 8 $f(x)=(2x+5)(3x+1)$

مەزنترین بەها یان بچووكترین بەها؟ ل ڕاهێنانێن 9 هەتا 14 بەرسڤا ئەڤان پرسیاران بدە؟

أ ئەرێ برگەیێ هاوتا بەرەڤ ژۆر یان بەرەڤ ژێرەی ڤەكرییە؟

ب ئەرێ ئەو بەهایێ نەخشەیی دبیتە مەزنترین بەها یان بچووكترین بەها؟

9 $f(x)=x^2-3x+5$ 10 $f(x)=2-3x-x^2$

11 $f(x)=x^2+5x+3$ 12 $f(x)=x^2-2x+7$

13 $f(x)=-x^2+8x+14$ 14 $f(x)=-2x^2-5x+1$

ڕاهێنان و بجهئینان

ڕوونبكە كو نەخشە نەخشەیەكا دووجاییە و هاوكۆلكێن وێ دیاربكە:-

15 $f(x)=(x-3)(x+8)$ 16 $f(x)=(4-x)(7+x)$

17 $f(x)=-(x-2)(x-6)$ 18 $f(x)=(2x+3)(4-x)$

19 $f(x)=x(x-3)$ 20 $f(x)=(x-6)(x+6)$

ئەرێ نەخشەیا دووجاییە یان نە؟ ئەڤێ ڕوونبكە:

21 $y=3-x^2$ 22 $y=3-x$

23 $y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}$ 24 $y=\frac{2x^2+5}{x+3}$

25 $y=x^2-x^2(x+7)$ 26 $y=\left|x^2+5x-2\right|$

ئەرێ برگەیێ هاوتا بەرەڤ ژۆر یان بەرەڤ ژێرەی ڤەكرییە؟ ئەرێ ئەو پەرە بەهایێ نەخشەیێ دبیتە بچووكترین بەها یان مەزنترین بەها؟

27 $y=2x^2-2x$ 28 $y=-8x^2-x$

29 $y=3-x^2$ 30 $y=4-x^2-2x$

چەوا جهگۆهوركێ لسەر چەماوەیێ نەخشەیا بنەرەت ئەنجام ددەی بۆ بدەستڤەئینانا وێنەیێ ڕوونكرنێ [چەماوە] بۆ هەر نەخشەیەكا ل خوارێ؟

31 $y=(x-2)^2-1$ 32 $y=(x-5)^2-2$

33 $y=-(x-2)^2+1$ 34 $y=-(x+6)^2-2$

35 $y=-(x-3)^2-2$ 36 $y=(x+4)^2-7$

37 **جهگۆهۆركی:** وێنەیێ ڕوونكرنا نەخشەیێ [چەماوە] بكێشە، پاشی بەرسڤا ئەڤان پرسیاران بدە:

أ $y=(x+2)(x-4)$ ب $y=2(x+2)(x-4)$

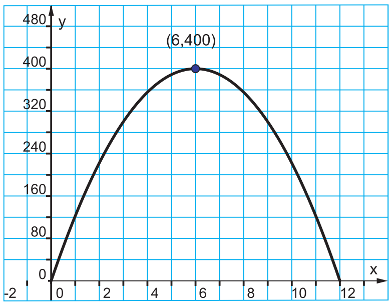
ج $y=\frac{1}{2}(x+2)(x-4)$ د $y=-(x+2)(x-4)$

هـ $y=-2(x+2)(x-4)$ و $y=-\frac{1}{2}(x+2)(x-4)$

- ئەڤ هەر شەش وێنەیێن ڕوونكرنێ ب چ دگەل ئێكودوو هاوبەشن؟
- كیژ وان بەرەڤ ژێرەی ڤەكرییە؟
- كیژ وان بەرەڤ ژۆرێ ڤەكرییە؟

بجهئینان

فیزیا: وێنەیێ روونکرنێ یێ بەرامبەر، پەیوەندییێ لناڤبەرا دەمی ب چرکان و بلنداهیا گۆللە تۆپەکێ ب مێتران بەرەڤ سەری هەلدا بیت دنوێنت.



38 مەزنترین بلنداهی چەندە کو گۆللە تۆپ دگەهتێ؟

39 ب چەند چرکەیان دگەهتە مەزنترین بلنداهی؟ تەوەرێ هاوجێبوونێ بۆ وێنەیێ روونکرنێ دیاربکە.

40 **فیزیا:** جوامێرێ تیرەك بەرەڤ سەری هاڤێت ب لەزا 40 مەتران د چرکەکێدا، بلنداهیا ئەو تیرە دگەهتێ پشتی 5 چرکەیان چەندە بکارئینانا نەخشەیا $y = 40x - 5x^2$ ، ئەگەر (x) دەمی بنوێنت ب چرکەیان و (y) بلنداهیێ بنوێنت ب مێتران. بەرسڤا خو بۆ نێزیکترین دەهێك نێزیکبکە.

لێنێرینەك بۆ پاش

بریێ $2(x-3)^2 + 1$ لێکدان و کردارێ لێدەرکرنێ دناڤ کڤانەکێ بلندکری بو توان 2 و کردارێ کومکرنێ بخۆڤەدگرت.

41 کیژ ڤان کرداران پیشتر ئەنجام ددەی؟

42 ل جارا دووێ کیژ کردارێ ئەنجام ددەی؟

43 ل جارا سێێ کیژ کردارێ ئەنجام ددەی؟

هەر هاوکێشەیەکا ل خوارێ لسەر شێوەیێ لاری – ئێکودووبرین بنڤیسە، پاشی وێنەیێ روونکرنێ بۆ نەخشەیێ بکێشە.

44 $2x + 5y = 14$

45 $x = -\frac{1}{2}y = 4$

لێنێرینەك بۆ پێش

46 دئێك رووتەختێ پۆتانیدا وێنەیێ روونکرنێ بۆ ڤان هەرسێ نەخشان بکێشە: $y = x^2 - 3x + 5$ و $y = x^2 + 7x + 6$ و $y = x^2 - 14x + 49$ ، ئەرێ ژمارا خالێن هاوبەش لناڤبەرا تەوەرێ x و وێنەیێ روونکرنێ بۆ هەر برگەیەکێ هاوتا چەندە؟

سیستەمێ هاوکێشەیێن هێلی

Systems Of Linear Equations

بەشێ
3

وانە

1. شیکارکرنا سیستەمێ هێلی ب لجهدانانێ
2. شیکارکرنا سیستەمێ هێلی ب لادانێ
3. شیکارکرنا سیستەمێ هێلی ب وێنەیێ روونکرنێ

ساڵنامەیێن رزگارکرنێ
دشێن سیستەمێ هاوکێشەیێن هێلی بکاربینن بۆ پلاندانانا کردارێ چاپکرنێ و فرۆتنا سالنامەیان بۆ کۆمکرنا دارایی. و دئێتە بکارئینان بۆ پارستنا هندەک جۆرێن بالندێن بەرەڤ نەمانێ دچن.

وانەیا 1

شیکارکرنا سیستەمێ هێلی ب لجهدانانێ

Solving Linear Systems by Substitution

بۆچی گەلەك جاران تە پێدڤیاتی ب شیکارکرنا سیستەمەکێ دوو هاوکێشەیێن هێلی هەیە و بەرسڤەکا دروست ددەت بێی نێزیککرن. فرۆشیار ل بازاڕی ب هووری پیتڤی ب دیارکرنا نرخێ هەر متایەکێ هەیە بو دەستکەفتنا قازانجی وی دڤێت.

ئارمانج

- سیستەمەکێ دوو هاوکێشەیێن هیلی شیکاردکەن ب رێیا لجهدانانێ.

زاراڤ

Vocabulary

رێیا لجهدانانێ
Substitution Method

ل پۆلێن پێشتر تو فێری سیستەمێ هاوکێشەیێن هیلی بووی و تە هندەك ژ وان شیکارکرن. ل ڤێ پۆلێ دێ فێری هندەك رێیان بی بۆ شیکارکرنا ڤی جورێ سیستەمێ. و ل دەستپێکێ دێ فێری رێیا لجهدانانێ بی.

چالاکی

ڤەدیتنا رێیا لجهدانانێ — Exploring Substitution

بجهئینان: پێشبرکیا ترومبیلان

پێشبرکیا ترومبیلان ئەوا ل باژێری سبرنگ ل ویلایەتێن ئێککرتیا ئەمریکا برێڤە دچیت دبێتە ئێك ژ گرنگترین بەریکانێن ترومبیلان، هەر ترومبێلەکا ڤێ پێشبرکیێ دوو شوفێر بهاژۆتنا وێ رادبن، هەر ئێك ژ وان چەند خوّلان ئەنجامددەت. تیپا ستیڤ و مایکل 157 خول ئەنجامداینە، ئەگەر مایکل 21 خول ژ ستیڤ کێمتر ئەنجامدا بن، ئەرێ هەر ئێکی ژ وان چەند خوّل ئەنجامداینە.

1. دەستپێبکە بنڤیسنا هاوکێشەیان ب مەراما دانانا نموونەیەکا بیرکاریێ بۆ شیکارکرنا پرسیارێ. نەزانراوێ (x) هەلبژێرە بۆ نواندنا وان خولێن کو ستیڤ ئەنجامداین و نەزانراوێ (y) هەلبژێرە بۆ نواندنا وان خولێن کو مایکل ئەنجامداین. ب ڤێ چەندێ سیستەمەکێ دوو هاوکێشەیێن هێلی دێ بدەست تە کەڤن ب دوو نەزانراوێن x ، y.

$$\begin{cases} x + y = 157 \\ y = x - 21 \end{cases}$$

2. رێیا خەملاندن و ساخکرنێ بکاربینە بۆ دەرئینانا بەهایێن x و y کو دبنە شیکار بۆ هەردوو هاوکێشەیان.

3. بەرێ خو بدە هاوکێشەیا دووێ $y = x - 21$، ڤێ زانیاریێ دەربارەی (y) دێ چەوا بکارئینی د هاوکێشا ئێکێدا؟

4. $y = x - 21$. ل جهێ نەزانراوێ y ل هاوکێشەیا ئێکێ بەهایێ $x - 21$ دانە، پاشی ئەوێ هاوکێشەیا بدەست تە دکەڤیت شیکاربکە بۆ دیارکرنا بەهایێ x .

5. بەهایێ نەزانراوێ x کو ل پرسیارا پێشتر بدەست تە کەفتی د هاوکێشەیا دوویدا دانە بۆ دەرئینانا بەهایێ y.

6. بەهایێن x و y ئەوێن بدەست تە کەفتین بەراوردبکە دگەل وان هەردوو بەهایێن بدەست تە کەفتین ب رێیا بخەملینە و ساخبکە. ئەرێ ئەڤ هەردوو ئەنجامە جووتن؟ ئەڤێ روونبکە.

شیکارکرنا پرسیاران

خالا چاڤدێریێ ✓

هەکەر بهایێ ئێکی ژ هەردوو نەزانراوین سیستەمێ دوو هاوکێشەیێن هێلی بزانی، تو دێ شێی وی سیستەمێ شیکاربکەی، ب دانانا بەهایێ ڤێ نەزانراوی د هاوکێشەیەکێ دا. دبێژنە ڤێ ڕێکێ ڕێیا لجهدانانێ **Substitution method**

نموونە 1 سیستەمێ $\begin{cases}8x+2y=19\\x=3\end{cases}$ شیکاربکە ب ڕێیا لجهدانانێ

شیکار

چونکی $x=3$، تو دشێی ڤێ بهایی ل جهێ (x) د هاوکێشەیا ئێکێدا دانێی:

ئەو هاوکێشەیا بدەست تە کەفتی شیکاربکە

$$8(3)+2y=19$$
$$24+2y=19$$
$$2y=-5$$
$$y=-2.5$$

جووتێ ڕێکخستی $(3, -2.5)$ دبیتە شیکار بۆ سیستەمی.

دروستیا شیکارێ ساخبکە ب لجهدانانا بەهایێن x و y د هاوکێشا ئێکێ دا:

$$8(3)+2(-2.5)\overset{?}{=}19$$
$$24+(-5)\overset{?}{=}19$$
$$19=19$$ دروستە

بزاڤێ بکە سیستەمێ $\begin{cases}2y+3x=19\\y=5\end{cases}$ شیکاربکە ب ڕێیا لجهدانانێ

نموونە 2 سیستەمێ $\begin{cases}15x-5y=30\\y=2x+3\end{cases}$ شیکاربکە ب ڕێیا لجهدانانێ

شیکار

ل جهێ y بەهایێ $2x+3$ دهاوکێشەیا ئێکێ دا دانە، پاشی ئەوێ هاوکێشا بدەست تە کەفتی شیکاربکە.

$$15x-5(2x+3)=30$$
$$15x-10x-15=30$$
$$5x-15=30$$
$$5x=45$$
$$x=9$$

ل جهێ x بەهایێ (9) د هاوکێشەیا دووێدا دانە، پاشی هاوکێشەیا بدەست ت کەفتی شیکاربکە:

$$y=2(9)+3$$
$$=18+3$$
$$=21$$

شیکار دبیتە جووتێ ڕێکخستی $(9, 21)$

دروستیا شیکارێ ساخبکە ب لجهدانانا بەهایێن x و y د هەردوو هاوکێشەیێن سەرەکێدا.

$$15(9)-5(21)\overset{?}{=}30$$
$$135-105\overset{?}{=}30$$
$$30=30$$ دروستە

$$21\overset{?}{=}2(9)+3$$
$$21\overset{?}{=}18+3$$
$$21=21$$ دروستە

بزاڤێ بکە ڤان سیستەمان ب ڕێیا لجهدانانێ شیکاربکە.

أ $\begin{cases}2x+5y=14\\y=5\end{cases}$

ب $\begin{cases}-3x+2y=31\\x=0.5y+6\end{cases}$

نموونە 3 سیستەمێ $\begin{cases}3x+y=4\\5x-7y=11\end{cases}$ ب رێیا لجهدانانێ شیکاربکە

شیکار

دا رێیا لجهدانانێ بێتە بکارئینان، هاوکێشەیا ئێکێ شیکاربکە بهەژمارتنا بهایێ y پێ x

$3x+y=4$

$3x+y-3x=4-3x$

$y=4-3x$

ساناهیترین هاوکێشە هەلبژێرە بۆ شیکارکرنێ

ل جهێ y بەهایێ $4-3x$ دانە ل هاوکێشەیا دووێ پاشی هاوکێشێ شیکاربکە.

$5x-7y=11$

$5x-7(4-3x)=11$

$5x-28+21x=11$

$26x-28=11$

$26x=39$

$x=1.5$

ل جهێ x بەهایێ 1.5 دانە ل هاوکێشەیا ئێکێ، پاشی هاوکێشێ شیکاربکە.

$3(1.5)+y=4$

$4.5+y=4$

$y=-0.5$

شیکار دبیتە جووتێ رێکخستی $(1.5, -0.5)$، دروستیا شیکارێ ساخبکە ب لجهدانانا بهایێن x و y د هاوکێشەیێن بنەرەتیدا.

هزرکرنەکا رەخنەگر بۆچی ل نموونە (3) تە نەزانراوێ y پێ x هەژمارت ل هاوکێشەیا ئێکێ ل جهێ x پێ y بهەژمێری؟

بزاڤێ بکە سیستەمێ $\begin{cases}6x-2y=11\\x+3y=4\end{cases}$ ب رێیا لجهدانانێ شیکاربکە

نموونە 4 **بجهئینان بازرگانی**

سالار ل یاریێن دوماهیا تەپا پێ کولاڤان دفرۆشت. 100 کولاڤێن وەرزێ پێشتر و 300 کولاڤێن نوو لنك هەبوون. سالارێ دڤێت ل ڤی وەرزی هەموو کولاڤان ب بهایێ 5300000 دیناران بفرۆشت. دڤێت چ نرخی بۆ کولاڤێن نوو و کەڤن دانت دا بگەهتە ئارمانجا خو، ئەگەر بزانی کو نرخێ کولاڤێ نوو ب 7000 دیناران زێدەترە ژ نرخی کولاڤێ کەڤن؟

شیکار

بلا نەزانراوێ d هیما بیت بۆ نرخێ کولاڤێ کەڤن، و هێمایێ n نرخێ کولاڤی نوو بیت.

سیستەمی دوو هاوکێشەیان بنڤیسە بۆ شیکارکرنا پرسیارێ:

$$\begin{cases}300n+100d=5\ 300\ 000\\n=d+7000\end{cases}$$

ل جهێ n ل هاوکێشەیا ئێکێ بهایێ $d+7000$ دانە، پاشی هاوکێشێ شیکاربکە

$300(d+7000)+100d=5\ 300\ 000$

$300d+2\ 100\ 000+100d=5\ 300\ 000$

$400d+2\ 100\ 000=5\ 300\ 000$

$400d=3\ 200\ 000$

$d=8000$

ل جهێ d بەهایێ 8000 دانە د هاوکێشا دووێدا، پاشی هاوکێشێ شیکاربکە.

$n=8000+7000$

$n=15\ 000$

شیکار دبیتە $(15000, 8000)$، ئانکو دڤێت سالار کولاڤێن نوو ب نرخێ 15000 دیناران و کولاڤێن کەڤن ب نرخێ 8000 دیناران بفروشت.

بزاڤێ بکە دڤێت نرخی چەند دانت بۆ کولاڤێن کەڤن و نوو؛ هەگەر بڤێت 6200000 دینار بدەست بکەڤت.

ڕاهێـــــنـــــان

بەردەوامبوون د بیر کارییێدا

1 ئەگەر بزانی کو $y = 42$، چەوا لجهدانانێ بکاردئینی بۆ شیکارکرنا هاوکێشەیا $y = x + 8$.

2 ل ڤان هەردوو هاوکێشەیان $-4x + y = 2$ و $2x + 3y = 34$ ، ساناهیترین نەزانراو و ساناهیترین هاوکێشە هەلبژێرە بۆ دەستپێکرنا شیکارکرنێ، هویێ هەلبژارتنا خو دیاربکە، پاشی شیکاربکە.

3 ڕوونبکە چە لجهدانانێ بکاردئینی بۆ شیکارکرنا سیستەمێ $\begin{cases} x - 2y = 8 \\ 2x + 3y = 23 \end{cases}$.

ڕاهێنانێن ئاراستەکری

ئەڤان سیستەمان ب لجهدانانێ شیکاربکە، پاشی شیکارێ ساخبکە.

4 $\begin{cases} 5x = 3y + 12 \\ x = 5 \end{cases}$

5 $\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ y = 2x + 8 \end{cases}$

6 $\begin{cases} 5x - y = 1 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

7 $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 10x = 4y + 2 \end{cases}$

ڕاهێنان و بجهئینان

8 سەرجەمێ دوو ژماران دبیتە 27، یێ مەزن ب (3) ێ زێدەترە ژیێ دی. وان هەردوو ژماران دیاربکە.

ئەڤان سیستەمان شیکاربکە.

9 $\begin{cases} 2x + 8y = 1 \\ x = 2y \end{cases}$

10 $\begin{cases} x = 7 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

11 $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$

12 $\begin{cases} y = 5 - x \\ 1 = 4x + 3y \end{cases}$

13 $\begin{cases} 2x + y = -92 \\ 2x + 2y = -98 \end{cases}$

14 $\begin{cases} 4x + 3y = 13 \\ x + y = 4 \end{cases}$

15 $\begin{cases} 6y = x + 18 \\ 2y - x = 6 \end{cases}$

16 $\begin{cases} 5x + y = 2 \\ 10x = 4y + 2 \end{cases}$

17 $\begin{cases} 2y + x = 4 \\ y - x = -7 \end{cases}$

18 $\begin{cases} 4y - x = 15 \\ y + x = 6 \end{cases}$

19 $\begin{cases} y = x - 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$

20 $\begin{cases} 2x + 3y = 21 \\ -3x - 6y = -24 \end{cases}$

21 $\begin{cases} 5x - 7y = 31 \\ -4x + 2y = -14 \end{cases}$

22 $\begin{cases} 3x + y = 21 \\ 10x + 5y = 65 \end{cases}$

23 $\begin{cases} -3y = 9x + 24 \\ 6y + 2x = 32 \end{cases}$

24 $\begin{cases} 12x + 4y = 22 \\ 3x - 8y = -10 \end{cases}$

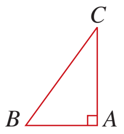
25 $\begin{cases} 11x + 4y = -17 \\ -6x + y = 22 \end{cases}$

26 $\begin{cases} -5x + 7y = -41 \\ 7x + y = 25 \end{cases}$

گرێدان

27 **ئەندازە:** درێژی و پانیا لاکێشەیەکێ بهەژمێرە، ئەگەر چێوەیێ وێ 210m بیت، و درێژیا وێ یەکسان بیت ب سێ جارانێ پانیا وێ.

28 **ئەندازە:** سەرجەمێ پیڤانێن هەردوو گۆشەیان B و C ل سێگۆشەیا بەرامبەر دبیتە 90° پلە، پیڤانا هەر گۆشەیەکێ ل سێگۆشەیێ بهەژمێرە، ئەگەر پیڤانا گۆشا B ب 30° پلە کێمتر بیت ژ دووجارانێ پیڤانا گۆشا C.



گرێدان

29 **بیردوزا ژماران:** ژمارە x ب (4)ێ کێمترە ژ سێ جارانێ ژمارە y. ئەگەر دوو جارانێ ژمارە y کێمبکەی ژ سەرجەمێ 3 دگەل دوو جارانێ x دێ ئەنجام بیتە 11. وان هەردوو ژماران دیاربکە:

سیستەمێ دوو هاوکێشەیێن هیلی بۆ هەر پرسیارەکێ بنڤیسە، پاشی شیکاربکە

30 **کارێن خێرخوازیێ:** کۆمەلەکا خێرخوازیێ ئاهەنگەك سازکر. تەزیاتی پێشکێشکرن بۆ ژمارەکا مەزنان و زارۆکان کو ژمارا وان 210 کەس بوون، و ب ڤی کاری 935 هزار دینار کۆمکرن، ئەگەر نرخێ تەزیاتیێ بۆ مەزنان 6 هزار دینار بیت و بۆ زارۆکان 3.5 هزار دینار بیت.

أ هاوکێشەکێ بنڤیسە دیاربکەت چەوا پارە ب تەمامی هاتە کۆمکرن.

ب هاوکێشەکێ بنڤیسە کو ژمارا کەسان ب تەمامی دیاربکەت.

ج سیستەمێ دوو هاوکێشەیێن بدەست تە کەفتین شیکاربکە، ژمارا مەزنان چەند بوو؟ و ژمارا زارۆکان چەند بوو؟

31 **دەروازەیەك لسەر رەوشەنبیریا چینێ:** ژمارەکا جۆتیارێن چینێ پشکداری کرن ل دابینکرنا ئامیرەکێ کشتوکالیێ. ئەگەر هەر جوتیارەك 8 پارچەیێن دراڤی بدەت، دێ بریێ 3 پارچەیان زێدەتر بیت ژ بریێ داخوازکری، و ئەگەر هەر ئێك 7 پارچەیان بدەت، دێ بریێ 4 پارچە یان کێمتر بیت ژ بریێ داخواز کری. ئەرێ ژمارا جوتیاران چەندە؟ و نرخێ ئامیرێ چەندە؟

لێنێرینەك بۆ پاش

32 **بۆ خۆشی:** ل بەریكانا غاردانێ، نەسرین 20m ل پێش روناكێیە و روناك 5m ل پشت ژیانێیە، و ژیان 10m ل پشت بەهارێیە، لێ شیرین ب 15m ل پێش بەهارێیە، ریزكرنا وان دیاربكە؟

ئەڤان هاوكێشان شیكاربكە؟

33 $\frac{x}{15} = 3$

34 $\frac{3}{x} = 15$

35 $\frac{15}{x} = 3$

36 $\frac{x}{3} = 15$

37 42% ژ ژمارەكێ دبیتە 12.6 ، ژمارێ دیاربكە.

لێنێرینەك بۆ پێش

لجهدانانێ بكاربینە بۆ شیكاركرنا هەر سیستەمەكی
(تێبینیێ بكە 3 هاوكێشە و 3 نەزانراو هەنە).

38 $\begin{cases} x + 2y + 3z = 8 \\ y + 3z = 3 \\ z = 2 \end{cases}$

39 $\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 44 \\ 2y - 6z = 4 \\ z = 4 \end{cases}$

وانەیا 2

شیکارکرنا سیستەمێ هێلی ب لادانێ

Solving Linear Systems by Elimination

ئارمانج

- شیکارکرنا سیستەمەکی دوو هاوکێشەیێن هێلی ب رییا لادانێ.

بۆچی

لادان رێیەکا نوویە شیکارکرنەکا بلەز پەیدادکەت بۆ سیستەمەکی دوو هاوکێشەیێن هیلی یێن ئالوز ئەوێن دڤێ وانیدا دێ بینی.

بجهئینان

بکرێ دانا ترومبێلان

زاراڤ
Vocabulary

رێگای لابردن
Elimination Method

نڤیسینگەها هەوار رادبت ب کرێدانا ترومبێلان. گەشتیار هندەك پارەی ددەت بەرامبەر هەر رۆژەکا کرێکرنا ترومبێلێ، و برەکی پارێ دی ددەت بۆ هەر کیلۆمەترەکا ترومبێل ببرت. هەر ئێکێ ژ هەر دوو هەڤالان رزگار و زانا ترومبێلەك ژ نڤیسینەگەها هەوار کرێکرن بۆ گەشتەکێ، گەشتا رزگاری دوو رۆژان ڤەکێشە و 125km برین، و گەشتا زانا 4 رۆژان ڤەکێشە و 350km برین، رزگاری 250 287 دینار دان و زانای 500 697 دینار دان. کرێیا ترومبێلێ ل رۆژەکی و پارێ ئێك کیلۆمەتری دیاربکە.

تو دشێی سیستەمەکی دوو هاوکیشەیێن هێلی بنڤیسی، پاشی شیکاربکەی بۆ دیارکرنا هەردوو کرێیان. ب پێناسەکرنا هەردوو نەزانراوێن پرسیارێ دەستپێبکە.

بلا نەزانراوێ d : هێمایێ کرێیا ترومبێلی بیت د رۆژەکێدا.

و نەزانراوێ k : هێمایێ پارێ ئێك کیلۆمەتر بیت.

ژ زانیارییێن سەری تو دکاری سیستەمێ هەردوو هاوکێشان بنڤیسی.

$$\begin{cases} 2d + 125k = 287\ 250 \\ 4d + 350k = 679\ 500 \end{cases}$$

تو دشێی ڤی سیستەمی ب رێیا لجهدانانێ شیار بکەی، لێ ئەڤەنە کارەکی ساناهیە. دڤێ وانێدا دێ فێری رێیەکا نوویی بۆ شیکارکرنا سیستەمێن ئالۆز.

چالاکی

بکارئینان دژان — Using Inverses

دێ سیستەمی ڤان هەردوو هاوکێشان $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ 5x-2y=9 \end{cases}$ شیکارکەی.

1. ئەڤ هەردوو هاوکێشە دوو رادێن دژێن ئێکودوو بخوڤەدگرن، کیژ وانن؟
2. سیفەتا کومکرن د یەکسانبوونێدا بکاربینە دا هاوکێشەکا نوو بدەست تە بکەڤت. هەردوو هاوکێشان کۆمبکە $3x+2y$ دگەل $5x-2y$ و 7 ل گەل 9 . هاوکێشا نوو چەند نەزانراو تێدا هەنە؟
3. هاوکێشەیا نوو شیکاربکە بۆ دیارکرنا بهایێ نەزانراوەکی، پاشی بهایێ ڤی نەزانراوی د هاوکێشەکا سەرەکیدا دانە، و وێ هاوکێشەیا دەرکەڤتی شیکار بکە بۆ دیارکرنا بهایێ نەزانراوێ دووێ.
4. ساخبکە کو ئەو هەردوو بهایێن بدەست کەفتین بۆ x و y دبنە شیکار بۆ سیستەمێ هەردوو هاوکێشەیان.

خالا چاڤدێریێ √

5. رووبکە چەوا دژان بکاردئینی بۆ شیکارکرنا سیستەمی هاوکێشەیان.

رێیا لادانێ — Elimination Method

ل چالاکیا بۆری رێیا لادانێ **Elimination Method** هاتە بکارئینان بۆ شیکارکرنا سیتەمێ دوو هاوکێشەیان. ئەڤ رێیە دژان بکاردئینت بۆ لادانا ئێک ژ نەزانراوەکی ژ هەردوو نەزانراوان.

نموونە 1

رێیا لادانێ بکاربینە بۆ شیکارکرنا ڤی سیستەمی $\begin{cases} \mathbf{3x+4y=7} \\ \mathbf{2x-4y=13} \end{cases}$

شیکار

سیفەتا کۆمکرن د یەکسانبوونێدا بکاربینە بۆ دەستکەفتنا هاوکێشەیەکێ ژ هەردوو هاوکێشان و بتنێ x تێدا هەبت، ڤێ هاوکێشەیێ شیکاربکە.

$$3x+4y=7$$
$$2x-4y=13$$
$$5x+0=20$$
$$5x=20$$
$$x=4$$

تێبینیێ بکە $4y$ و $-4y$ دژێ ئێکودوونە

بۆ دیارکرنا بهایێ y بهایێ x ب (4) دانە د هاوکێشەیا ئێکێدا.

$$3x+4y=7$$
$$3(4)+4y=7$$
$$12+4y=7$$
$$4y=-5$$
$$y=-1.25$$

شیکارا سیستەمی دبیتە $(4, -1.25)$

بهایێ x ب 4 و بهایێ y ب -1.25 د هەردوو هاوکێشەیێن سەرەکیدا دانە بۆ ساخکرنا شیکاری:

$$3(4)+4(-1.25)\overset{?}{=}7$$
$$12+(-5)\overset{?}{=}7$$
$$7=7 \quad \text{دروستە}$$

$$2(4)-4(-1.25)=13$$
$$8-(-5)=13$$
$$13=13 \quad \text{دروستە}$$

بەرێ خو بدێ کو هاوکۆلکێن y ل هەردوو هاوکێشەیان دژێ ئێکو دوونە، و ئەڤە وەسا دکەت کو شیکارکرنا ڤی جورێ سیستەمان یێ ساناهییت.

بزاڤێ بکە سیستەمێ ب رێیا لادانێ شیکاربکە.

أ $\begin{cases} 3y-x=5 \\ 4y+x=9 \end{cases}$

ب $\begin{cases} 3y+2x=21 \\ 5y-2x=14 \end{cases}$

هندەك جاران پێدڤێت هەردوو رەخێن هاوكێشەیەكێ یان هەردوو هاوكێشەیان لێكبدەی ل گەل ژمارەكێ بۆ بدەستكەفتنا دوو دژان كو رێبدەت بۆ لادانا ئێكێ ژ هەردوو نەزانراوان، ئەگەر هاوكۆلكێ ئێكێ ژ هەردوو نەزانراوان (1) بیت ئەو كارە دێ یێ ساناهیبت، تو دشێی ڤێ تەكنیكێ بجهبینی لسەر وان سیستەمێن زێدە ئالۆز وەكی سیستەمێ نموونە (2) .

نموونە 2

رێیا لادانێ بكاربینە بۆ شیكاركرنا سیستەمێ $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 5x+7y=3 \end{cases}$

شیكار

هەردوو رەخێن هاوكێشیا ئێكێ ل ژمارە (5) بدە، و هەردوو رەخێن هاوكێشەیا دووێ ل ژمارە (-2) بدە بۆ بدەستكەفتنا دوو دژان.

$$\begin{cases} (5)2x+(5)3y=(5)1 \\ (-2)5x+(-2)7y=(-2)3 \end{cases} \quad \text{یان} \quad \begin{cases} 10x+15y=5 \\ -10x-14y=-6 \end{cases}$$

سیفەتا كۆمكرن د یەكسانبوونێدا بكاربینە

دا هاوكێشەكا نوو بدەست تە بكەڤیت بتنێ ئێك نەزانراو

تێدا هەبت ئەو ژی (y) یە.

وێ هاوكێشەیێ شیكاربكە. بهایێ y د هاوكێشەیا ئێكێدا دانە، شیكار دبیتە $(2, -1)$.

شیكارێ ساخبكە ب دانانا بهایێن هەردوو نەزانراوان د هەردوو هاوكێشەیاندا.

$$\begin{array}{r} 10x+15y=5 \\ -10x-14y=-6 \\ \hline y=-1 \end{array}$$

$$2x+3y=1$$
$$2x+3(-1)=1$$
$$2x-3=1$$
$$2x=4$$
$$x=2$$

$$2(2)+3(-1)\overset{?}{=}1 \qquad 5(2)+7(-1)\overset{?}{=}3$$
$$4+(-3)\overset{?}{=}1 \qquad 10+(-7)\overset{?}{=}3$$
$$1=1 \text{ دروستە} \qquad 3=3 \text{ دروستە}$$

بزاڤێ بكە رێیا لادانێ بكاربینە بۆ شیكاركرنا سیستەمێ $\begin{cases} 5x-3y=2 \\ 2x+4y=6 \end{cases}$.

نموونە 3

رێیا لادانێ بكاربینە بۆ شیكاركرنا وێ پرسیارا ل دەستپێكا وانێ هاتی.

$$\begin{cases} 2d+125k=287\ 250 \\ 4d+350k=679\ 500 \end{cases}$$

شیكار

هەردوو رەخێن هاوكێشەیا ئێكێ ل (-2) بدە

$$\begin{cases} (-2)2d+(-2)125k=(-2)287\ 250 \\ 4d+350k=679\ 500 \end{cases}$$

سیفەتا كومكرن د یەكسانبوونێدا بكاربینە بۆ پەیداكرنا هاوكێشەكا نوو كو ئێك نەزانراوتێدا هەبت ئەو ژی (k). پاشی هاوكێشەیێ شیكاربكە:

$$\begin{array}{r} -4d+(-250k)=-574\ 500 \\ 4d+\ \ 350k\ =\ \ 679\ 500 \\ \hline 100k=105\ 000 \\ k=1050 \end{array}$$

ل جهێ k بهایێ وێ دانە د هاوكێشا ئێكێدا بۆ دیاركرنا بهایێ d .

$$2d+125(1050)=287\ 250$$
$$2d+131\ 250=287\ 250$$
$$2d=156\ 000$$
$$d=78\ 000$$

شیكارا سیستەمێ هاوكێشەیێن ل دەستپێكا وانێ هاتی دبیتە (78 000; 1050) ، تو دكاری دروستیا وێ ساخبكەی. كرێیا ترومبێلێ ل رۆژەكێ 78 هزار دینارە، و بریێ پارێ ئێك كیلومەتری 1050 دینارە.

بزاڤێ بكە هەر سیستەمەكی ل خوارێ ب رێیا لادانێ شیكاربكە.

أ $\begin{cases} 2x-y=7 \\ 5x+4y=11 \end{cases}$

ب $\begin{cases} 3x-2y=6 \\ 5x+7y=41 \end{cases}$

ڕاهێـــــــنـــان

بەردەوامبوون د بیرکارییێدا

هەردوو دژێن ئێکدوو دهەر سیستەمەکیدا دیاربکە، و روونبکە چەوا شیکار دکەی:

1) $\begin{cases} x+7y=13 \\ x-7y=5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x-3y=8 \\ 5x+3y=20 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2a+b=6 \\ -2a-3b=8 \end{cases}$

بجهئینان

وان پێنگاڤێن پێتڤی بۆ شیکارکرنا هەر سیستەمەکی ب رێیا لادانێ روون بکە:

4) $\begin{cases} 2x+3y=9 \\ 3x+6y=7 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x-5y=1 \\ 3x-4y=-2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 9a+2b=2 \\ 21a+6b=4 \end{cases}$

ڕاهێنانێن ئاراستەکری

هەر سیستەمەکی ب رێیا لادانێ شیکاربکە، پاشی شیکارێ ساخبکە:

7) $\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 5x-2y=7 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 4x+3y=13 \\ 2x-4y=1 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x-2y=4 \\ 3x+5y=-10 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -3x-4y=0 \end{cases}$

ڕاهێنان و بجهئینان

سیستەمی ب رێیا لادانێ شیکاربکە و شیکارێ ساخبکە:

11) $\begin{cases} -x+2y=12 \\ x+6y=20 \end{cases}$

12) $\begin{cases} 2a+3b=18 \\ 5a-b=11 \end{cases}$

13) $\begin{cases} -4x+3y=-1 \\ 8x+6y=10 \end{cases}$

14) $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ 5x-3y=11 \end{cases}$

15) $\begin{cases} 2x=2-9y \\ 21y=4-6x \end{cases}$

16) $\begin{cases} -x-7=3y \\ 6y=2x-14 \end{cases}$

17) $\begin{cases} \frac{2}{3}x=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}y \\ y=3x-12 \end{cases}$

18) $\begin{cases} 0.6x=3.2y+4.6 \\ 2.9y=0.3x+4.8 \end{cases}$

19) $\begin{cases} b=1.5k+4 \\ 0.8b+0.4k=0 \end{cases}$

20) $\begin{cases} 2x=3y-12 \\ \frac{1}{3}x=4y+5 \end{cases}$

21) $\begin{cases} 2x-7y=20 \\ 5x+8y=-1 \end{cases}$

22) $\begin{cases} 2x-5y=-14 \\ -7x+4y=-5 \end{cases}$

23) $\begin{cases} 3x-2y=-26 \\ 5x+3y=9 \end{cases}$

24) $\begin{cases} \frac{2}{3}x-\frac{3}{5}y=-\frac{17}{15} \\ \frac{8}{5}x-\frac{7}{6}y=-\frac{3}{10} \end{cases}$

گرێدان

25) **ئەندازە:** لاكێشەیەك چێوێ وێ 24m، درێژیا وێ یەكسانە ب 3 جارانی پانیا وێ، درێژی و پانیا وێ چەندە؟

سیستەمێ دوو هاوکێشەیان بۆ هەر پرسیارەکێ بنڤیسە، باشترین رێ هەلبژێرە بۆ شیکارکرنا وی سیستەمی و شیکارێ ساخبکە:-

بجهئینان

26 **بیرکاریا بکاربەری**: ماموستایێ بیرکاریێ بریاردا ئاهەنگەکێ سازبکەت ب هەلکەفتا بیرهاتنا ژ دایکبوونا زانایێ بیرکاریێ خوارزمی، ماموستای، 3 کارتۆن کێك و 3 شووشەیێن شەربەتێ بۆ قوتابیێن هۆبا «أ» کرین ب 54 هزار دیناران، و 4 کارتۆن کێك و 6 شووشەیێن شەربەتێ بۆ قوتابیێن هۆبا «ب»ب 78 هزار دیناران کرین، نرخێ کارتۆنەك کێك و شووشەکێ شەربەتێ چەندە؟

27 **داهات**: بارام زێرەڤانە ل گۆرەپانەکا راوەستیانا ترومبێلان، کرێیەکا نەگۆر وەردگرت بەرامبەر 15 دەمژمێرێن کارکرنێ د حەفتیەکێدا، و بۆ هەر دەمژمێرەکا کارکرنێ یازێدە کرێیەکا زێدە هەیە. بارامی 25 دەمژمێران د حەفتیا ئێکێدا کارکر و 710 هزار دینار وەرگرتن و 22.5 دەمژمێران د حەفتیا دووێدا کارکر و 641.25 هزار دینار وەرگرتن. کرێیا نەگۆر و کرێیا دەمژمێرا زێدە چەندە؟

28 **بازرگانی**: تۆمارگەهەك دوو جۆرێن کاسێتێن مۆزیکێ دفرۆشت. کاسێتێن جۆرا و جۆر و کاسێتێن مۆزیکا کلاسیکی. نرخێ کاسێتێ جۆرا و جۆر 2 هزار دینارە و نرخێ کاسێتێ مۆزیکا کلاسیکی 3 هزار دینارە. تۆمارگەهێ رۆژەکێ 25 کاسێت ژ هەردوو جۆران فرۆتن بەرامبەر 69 هزار دیناران. چەند کاسێت ژ هەر جۆرەکی فرۆتن؟

29 **ب کرێدانا خانیان**: کرێدارەك دابینکرنێ دگەل کرێیا مەها ئێکێ ددەت. جوامێری 2700000 دینار ل مەها ئێکێ دان و 20850000 دینار ل درێژیا سالێ دان. بهایێ دابینکرنێ و بهایێ کرێیا خانی ل مەهەکێ چەندە؟

30 **گەشت و گۆزار**: ئۆوتێلا دمدم دوو جۆرێن پێشاندانێ دیارکرن ل بێهنڤەدانا دوماهیا حەفتیێ. جۆرێ ئێکێ پێکدئێت ژ دوو شەڤان و 4 دانێن خوارنێ ب نرخێ 615 هزار دیناران، و جۆرێ دوو ژ 3 شەڤان و 8 دانێن خوارنێ پێکدئێت ب نرخێ 1027.5 هزار دیناران. کرێیا شەڤەکێ و نرخێ دانەکی خوارنێ چەندە؟

لێنێرینەك بۆ پاش

31 **دەروازەیەك بۆ رەوشەنبیریا فیرعەونیان**: زانایێن شوونواران لسەر کاغەزێن فیرعەونیان ئەڤ پرسیارە دیتن: نرخێ تویرکەکێ کو هەمان کێشێن زێر و زیڤ و سفری تێدا دبیتە 84 شەعتە «یەکەیا پارێ فەرعەونیایە».کێشا هەر ئێکێ ژ زێر و زیڤ و سفرێ دناڤ تویرکێدا چەندە، ئەگەر نرخێ دبن «یەکەیا پیڤانا کێشا فیرعەونیایە» ژ زێرێ 12 شەعتە بیت و نرخێ ئێك دبن ژ زیڤی 6 شەعتە بیت و نرخێ ئێك دبن ژ سفری 5 شەعتە بیت؟

هەر هاوکێشەکێ شیکاربکە

32 $-5=-x+7$ 33 $3x-2=2x+1$ 34 $\frac{1}{2}x+3=2$

لێنێرینەك بۆ پێش

35 **تەکنۆلۆژیا**: وێنەیێ هەردوو راستەهێلاك بکێشە دئێك رووتەختێ پۆتانیدا $2x-3y=6$ و $4x-6y=18$، بەحسێ ئەوا بدەست تە کەفتی بکە. (بژمێرا روونکرنێ بکاربینە ئەگەر دشیاندابیت).

وانەیا 3

شیکارکرنا سیستەمێن هاوکێشەیێن هیلی ب وێنەیێ روونکرنێ Solving Linear Systems Graphically

ئارمانج

- سیستەمێ دوو هاوکێشەیین هیلی ب وێنەیێ روونکرنێ شیکاردکەن.
- سیستەمێ دوو هاوکێشەیێن پۆلیندکەن.

بۆچی

گەلەك جاران سیستەمێ هاوكێشەیێن هیلی بۆ شیكاركرنا پرسیارێن ژیانا رۆژانە دئێنە بكارئینان، ب تایبەت ل كارگێرییێ و ئابووریێ. ل هندەك باران دەرئینانا شیكارا دروست نە گەلەكا گرنگە. لێ پێدڤی ب شیكارەكا نێزیككری هەیە و ل هندەك باران داخوازی ئەوە ئەرێ شیكار هەیە و ئێك شیكار هەیە یان پتر ژ شیكارەكێ هەیە. دڤان باراندا شیكاركرنا سیستەمێ هیلی ب وێنەیێ روونكرنێ هاریكاریا مە دكەت بۆ بەرسڤدانا ڤان پرسیاران.

شیکارکرنا سیستەمێن هاوکێشەیێن هێلی ب وێنەیێن روونکرنێ
Solving Linear Systems Graphically

ل بەشێ پێشتر تو فێربووی چەوا سیستەمێن هاوکێشەیێن هێلی شیکاردکەی بکارئینانا لادان و لجهدانانێ، لێ هەر رێیەکێ ژوان دڤێت تو بهایێ نەزانراوەکی دیاربکەی پاشی بهایێ نەزانراوێ دی. ل رەخەکی دی چێدبیت شیکارکرنا پرسیارەکێ پێدڤی ب دیارکرنا بهایەکی نێزیککری بتنێ هەبت بۆ شیکاریێ، و چێدبیت پێدڤی ب بەرسڤدانا پرسیارەکا سادە هەبت وەك ئەرێ شیکار هەنە بۆ سیستەمێ هاوکێشان؟ و ژمارا وان چەندە ئەگەر هەبن؟ دڤێ وانێدا دێ فیری رێیەکێ بی بۆ شیکارکرنا ڤان سیستەمان کو بەرسڤەکا بلەز بۆ ڤان جورێن پرسیاران مسۆگەر بکەت.

زاراوەکان
Vocabulary

سیستمی دیار

Independent System

سیستمی نادیار

Dependent System

سیستمی ستەم

Inconsistent System

چالاکی

شیکارکرنا سیستەمێن هاوکێشەیێن هێلی ب وێنەیێن روونکرنێ
Solving Linear Systems Graphically

تە پێتڤیاتی هەیە ب بژمێرا روونکرنێ یان پەرێن چارگۆشەی [اوراقه بیانیه].

دێ ڤی سیستەمی $\begin{cases} y = 3x+1 \\ y = -x+5 \end{cases}$ ب وێنەیێ روونکرنێ شیکارکەی.

1. چ دبێژنە خالا (c, d) ل گۆرێ هەر دوو راستەهێلان $y = 3x+1$ و $y = -x+5$ ئەگەر جووتێ رێکخستی (c, d) شیکار بیت بۆ ڤی سیستەمێ؟

2. هەردوو راستەهێلان دئێك رووتەختێ پۆتانیدا بکێشە.

3. بهایەکی نێزیککری بۆ پۆتانێ خالا ئێکو دووبرینا هەردوو راستەهیلان دیاربکە.

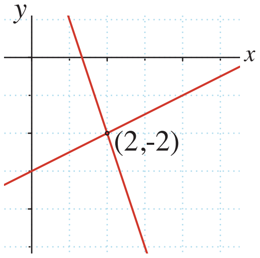
4. شیکارەکا نێزیککری بۆ سیستەمی بینەدەر.

خالا چاڤدێریێ √

نموونـــــه 1 ب وێنەیێ رۆونکرنێ ڤی سیستەمی شیکاربکە $\begin{cases} 3x+y=4 \\ x-2y=6 \end{cases}$.

شیکار

بۆ وێنەکێشانا راستەهێلێ $3x+y=4$ ، خالا ئێکو دووبڕینا وی ل گەل تەوەرێ دووێ دیاربکە ب دانانا 0 ل جهێ گۆڕاوێ x و دەرئینانا بهایێ y یێ بەرامبەر وێ ، دێ $y=4$ بدەست تە کەڤیت، ڤێجا راستەهێل د خالا$(0,4)$ را دبۆرت، دیسا خالا ئێکودووبڕینا وی راستەهێلی ل گەل تەوەرێ ئێکێ دیاربکە ب دانانا 0 ل جهێ گۆڕاوێ y و دەرئینانا بهایێ x یێ بەرامبەری وێ، دێ $x=\frac{4}{3}$ بدەست تە کەڤیت، ڤێجا راستەهێل د خالا $\left(\frac{4}{3},0\right)$ را دبۆرت. نۆکە وی راستەهێلی بکێشە. بۆ وێنەکێشانا راستەهێلێ $x-2y=6$ هەر ئەوێ رێێ بکاربینە. هەردوو راستەهێڵ ل خالا (2,-2) ئێکودوو دبڕن.



شاشێ وەکی ل خوارێ دیارکریە: 7 ;3– ئاسویی 3 ;7– ستوونی بۆ دەستکەفتنا وێنەیێ بەرامبەر.

ژ دروستیا شیکارێ پشتراستببە ب دانانا (2) ل جهێ x و (2–) ل جهێ y .

$3x+y\overset{?}{=}4$	$x-2y\overset{?}{=}6$
$3\times 2+(-2)\overset{?}{=}4$	$2-2(-2)\overset{?}{=}6$
$6-2\overset{?}{=}4$ دروستە	$2+4\overset{?}{=}6$ دروستە

چالاکی 2

پۆلینکرنا سیستەمێن هاوکێشەیێن هێلی — Classifying Linear Systems

تە پێتڤیاتی هەیە ب بژمێرا رۆونکرنێ یان پەرێن چارگۆشەیان [اوراق بيانيه].

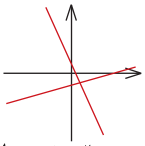
$\begin{cases} y=2x+1 \\ y=-x+5 \end{cases}$
$\begin{cases} y=2x-1 \\ y=2x+1 \end{cases}$
$\begin{cases} y=\frac{8-3x}{4} \\ y=-\frac{3}{4}x+2 \end{cases}$

1. ب وێنەیێ رۆونکرنێ سیستەمێ ئێکێ ل خشتێ بەرامبەر بنوێنە.
   أ. ئەرێ هەر دوو راستەهێل ئێکودوو دبڕن؟
   ب. ئەرێ ئەڤی سیستەمی بتنێ ئێك شیکار هەیە؟ ئەو شیکارە چییە ئەگەر هەبت؟ و ئەگەر ئەڤی سستەمی شیکارنەبیت، ئەوی بگۆهۆڕە بۆ سیستەمەکی دی کو بتنێ ئێك شیکار هەبت، و ئەوێ شیکارێ بینەدەر.
2. ئەوا تە ئەنجامدای دووبارەبکە لسەر سیستەمێ دووێ پاشی لسەر سیستەمێ سێێ.
3. پەیوەندییا لناڤبەرا وان هەردوو راستەهێلان روونبکە.
   • ئەگەر سیستەمێ شیکارنەبیت.
   • ئەگەر سیستەمی ژمارەکا بێ دوماهیك یا شیکاران هەبت.
   • ئەگەر سیستەمی بتنێ ئێك شیکار هەبت.

هزرکرنەکا رەخنەگر

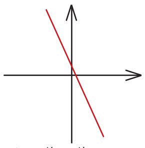
دەمێ تو هەولدەی سیستەمەکی دوو هاوکێشەیێن هیلی شیکار بکەی ب وێنەیێ روونکرنێ، ئێك ژ ڤان بارێن ل خوارێ بۆ تە دیار دبیت:

دوو راستەهێلێن ئێکودوو بڕ



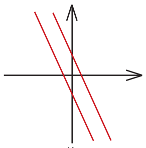
سیستەمێ سنووردار

دوو راستەهێلێت جووت



سیستەمێ بێ سنوور

دوو راستەهێلێن تەریب



سیستەمێ ستەم

پۆلینکرنا سیستەمێن هاوکێشەیێن هێلی Classifying Linear Systems

سیستەمێن هاوکێشەیێن هێلی دهێنە پۆلینکرن بۆسێ جۆرێن بنەڕەتی ل خوارێ:

- سیستەمێ ستەم **Inconsistent**: ئەو سیستەمەکە شیکار نینە
- سیستەمێ سنووردار **Independent**: ئەو سیستەمەکە بتنێ ئێك شیکار هەیە
- سیستەمێ بێ سنوور **Dependent**: ئەو سیستەمەکە بێ سنوور شیکار هەنە

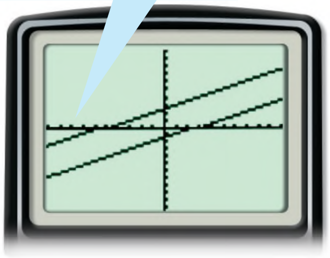
نموونە 2

هەر سیستەمەکێ پۆلینبکە، و شیکارا وێ دیاربکە ئەگەر هەبیت

أ $\begin{cases} x+y=5 \\ x-5y=-7 \end{cases}$ ب $\begin{cases} x-2y=3 \\ x+5=2y \end{cases}$

شیکار

چونکی هەردوو راستەهێل ئێکو دوو دبڕن دێ سیستەمی سنووردار بیت و شیکار دبیتە (3, 2)



چونکی هەردوو راستەهێل تەریبن دێ سیستەمی ستەم بیت.

بزاڤێ بکە سیستەمی پۆلینبکە $\begin{cases} y=3x+4 \\ y=-2x+4 \end{cases}$ شیکارێ دیاربکە ئەگەر هەبت.

نموونە 3

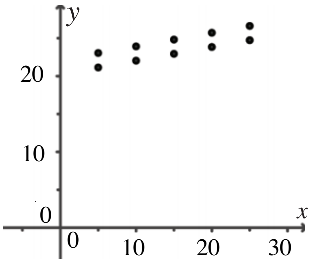
بجهئینان
زانستێن کۆمەلایەتی

ئامارێ دەربارەی ژیێ هاوسەرگیریێ بۆ نێر و مێیان ل وەلاتەکی، پێدایێن لسەر ل وێنەیێ بەرامبەر دیارکرن.
خشتەیەکی دروستبکە بۆ پۆختەکرنا وان پێدایان.
ئەگەر لسەر شێوازی بەردەوام بن، ئەرێ دەمەک دێ ئێت ژیێ هاوسەرگێریێ لنك هەردوو رەگەزان یەکسان بیت.

شیکار

بۆ بەرسڤدانا ڤێ پرسیارێ، پێدایێن تایبەت لسەر هەردوو رەگەزان دئێك رووتەختێ پۆتانیدا بنوێنە.

پشتی سالا 1970	ژیێ هاوسەرگێریێ بۆ زەلامان	ژیێ هاوسەرگێریێ بۆ ئافرەتان
5	23.02	21.14
10	23.92	22.04
15	24.82	22.94
20	25.72	23.84
25	26.62	24.74

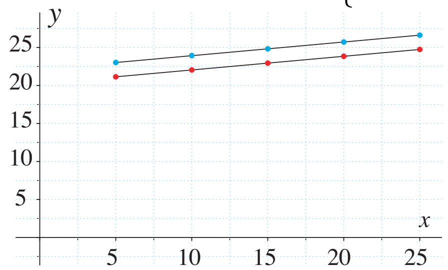


بەریٚ خو بدیٚ کو خالیٚن پەیوەست بوٚ هەردوو رەگەزان دکەڤنە سەر دوو راستەهیٚلیٚن تەریب.

لاریٚ وی راستەهیٚلیٚ پیٚداییٚن زەلامان دنویٚنت دبتە $m_1 = \frac{24.82-23.02}{15-5} = 0.18$. لاریٚ وی راستەهیٚلیٚ پیٚداییٚن ئافرەتان دنویٚنت دبتە $m_2 = \frac{22.94-21.14}{15-5} = 0.18$. بوٚ دیارکرنا هاوکیٚشەیا ئەوی راستەهیٚلیٚ پیٚداییٚن زەلامان دنویٚنت، بنڤیسە $y = 0.18x + b$ و بکارئینانا خالا $(10, 23.92)$ بهاییٚ b دیاربکە، ئانکو $23.92 = 0.18(10) + b$ ، $b = 23.92 - 1.8 = 22.12$. ڤیٚجا هاوکیٚشەیا راستەهیٚلیٚ پیٚداییٚن زەلامان دنویٚنت دبتە $y = 0.18x + 22.12$. هەر ب ویٚ ریٚییٚ تو دشیٚی هاوکیٚشەیا ئەوی راستەهیٚلیٚ پیٚداییٚن ئافرەتان دنویٚنت دیاربکەی و ئەو دبتە $y = 0.18x + 20.24$.

ژییٚ هاوسەرگیٚرییٚ لنك نیٚر و میٚیان دیٚ یەکسان بیت ئەگەر سیستەمیٚ هاوکیٚشەییٚن ل خواریٚ شیکار هەبت:

$$\begin{cases} y = 0.18x + 22.12 \\ y = 0.18x + 20.24 \end{cases}$$



بوٚ دیارکرنا بەرسڤیٚ. ئەڤی سیستەمی ب ویٚنەییٚ روونکرنیٚ شیکاربکە. ب نواندنا هەردوو راستەهیٚلان ب ویٚنەییٚ روونکرنیٚ دوو راستەهیٚلیٚن تەریب بوٚ مە دیاردبن ئانکو سیستەمی ستەمە ئانکو ئەگەر ب ڤی شیٚوازی بەردەوام بن هیٚچ دەمەك ناهیٚت ژییٚ هاوسەرگیرییٚ لنك هەردوو رەگەزان یەکسان بیت.

بزاڤیٚ بکە سیستەمیٚ $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 18x - 2y = 4 \end{cases}$ ب ویٚنەییٚ روونکرنیٚ شیکاربکە پاشی شیکاریٚ ساخبکە.

راهیٚنان

بەردەوامبوون د بیرکاریٚیدا

1 روونبکە چەوا ب ویٚنەییٚ روونکرنیٚ سیستەمیٚ $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ x + 4y = -9 \end{cases}$ شیکاردکەی.

2 چەوا ب ویٚنەییٚ روونکرنیٚ سیستەمیٚ $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 4 \end{cases}$ دنویٚنی، چەوا شیکاریٚ دیٚ خەملینی ب تەماشەکرنا ویٚنەییٚ روونکرنیٚ. بوٚچی دڤیٚت تو دروستیا خەملاندنا خو ساخبکەی؟

3 روونبکە چەوا ریٚسایا نەخشەیا هیٚلیٚ دیٚ ئینیەدەر ب زانینا ویٚنەییٚ روونکرنیٚ.

راهیٚنانیٚن ئاراستەکری

هەر سیستەمەکی ب ویٚنەییٚ روونکرنیٚ شیکاربکە.

4 $\begin{cases} -2x + y = 1 \\ y = -x + 4 \end{cases}$

5 $\begin{cases} y + 2x = 0 \\ 2y = -x - 9 \end{cases}$

6 $\begin{cases} 2x + 3y = -12 \\ 4x - 4y = 4 \end{cases}$

هەر سیستەمەکی ب ویٚنەییٚ روونکرنیٚ بنویٚنە و شیکاریٚ بخەملینە، و خەملاندنا خوٚ بوٚ نیٚزیکترین بەش ژ دەهیٚ نیٚزیکبکە:

7 $\begin{cases} \frac{1}{2}x - y = 2 \\ y = -\frac{2}{3}x \end{cases}$

8 $\begin{cases} 2y - x = 6 \\ 3x + y = -5 \end{cases}$

9 لانا 5000 دینار هەنە ژ چەشنێن 250 دیناری و 500 دیناری. ژمارە پارچێن هەر چەشنەکێ چەندە؟ ئەگەر ژمارا هەمووان 17 پارچە بن.

راهێنان و بجهئینان

هەر سیستەمەکێ پۆلینبکە:

10 $\begin{cases} x-y=-4 \\ 3x+y=8 \end{cases}$

11 $\begin{cases} 3x+4y=12 \\ 4y-12=-3x \end{cases}$

ب وێنەیێ روونکرنێ هەر سیستەمەکێ بنوێنە و پولینبکە. شیکارا وی ب وێنەیێ روونکرنێ دیاربکە ئەگەر ئەو سیستەمە یێ سنووردار بیت:

12 $\begin{cases} 6x+4y=12 \\ 2y=6-3x \end{cases}$

13 $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -3x+4y=-10 \end{cases}$

14 $\begin{cases} y=2x-1 \\ 6x-y=13 \end{cases}$

15 $\begin{cases} x+3y=13 \\ 2x-3y=-9 \end{cases}$

16 $\begin{cases} y=-2x-7 \\ 4x+2y=6 \end{cases}$

17 $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 4x+2y=6 \end{cases}$

18 $\begin{cases} -\frac{1}{2}x+y=4 \\ x+2y=8 \end{cases}$

19 $\begin{cases} 3x-6y=9 \\ \frac{1}{2}x=y+\frac{3}{2} \end{cases}$

20 $\begin{cases} 4x+5y=-7 \\ 3x-6y=24 \end{cases}$

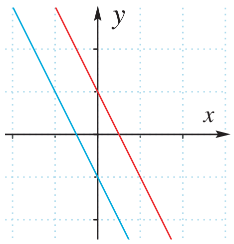
21 $\begin{cases} -x+2y=3 \\ 2x-4y=-6 \end{cases}$

22 $\begin{cases} 3x-y=2 \\ -3x+y=1 \end{cases}$

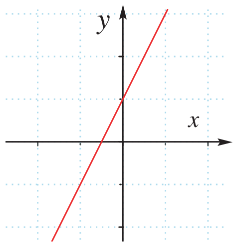
23 $\begin{cases} 6x-3y=9 \\ 3x+7y=47 \end{cases}$

ئەو سیستەمێ ب وێنەیێ روونکرنێ هاتیە نواندن پۆلینبکە، و شیکارا وی بنڤیسە ئەگەری بتنێ بیت.

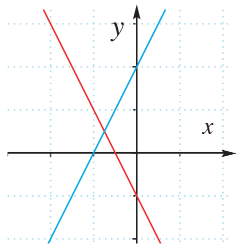
24



25



26



27 ئەرێ ئەڤ جووتێ رێکخستی دبیتە شیکار بۆ سیستەمی؟

أ $(1 ، 3)$ $\begin{cases} 5x+2y=11 \\ x-y=11 \end{cases}$

ب $(5, -2)$ $\begin{cases} 4x-3y=26 \\ 2x+y=8 \end{cases}$

ج $(2 ، 1)$ $\begin{cases} 2x-y=8 \\ x+3y=5 \end{cases}$

د $(5 ، 2)$ $\begin{cases} 4x-2y=16 \\ -8x+4y=-32 \end{cases}$

هـ سیستەمەك ژ هەرچار سیستەمێن ل سەری یێ بێ سنوورە، ئەوی دیاربکە، پاشی سێ جووتێن رێکخستی یێن دی بنڤیسە کو ببنە شیکار بۆ وی سیستەمی.

ئەندازە: باغچەیەك لسەر شێوەیێ لاكێشێ، چێوەیێ وێ دبتە 130m. سێ جارانی درێژیا وێ دبتە دەه‌ جارانێ پانیا وێ:

28 درێژی و پانیا باغچەی بهەژمێرە.

29 رووبەرێ وێ بهەژمێرە.

30 **فرۆكەڤانی:** فرۆكەیەك ل بلنداهیا 7000 m بوو، هاتە خوار ب تێكرایێ 450m دخولەكێدا. و فرۆكەیەكا دی ل بلنداهیا 375m ب تێكرایێ 575m د خولكەكێدا بلندبوو. سیستەمەكی دوو هاوكێشەیێن هیلی بنڤیسە رێبدەت بۆ هەژمارتنا ژمارا وان خولەكێن دبۆرن بەری هەردوو فرۆكە بگەهنە ئێك بلنداهی. ڤی سیستەمی ب وێنەیێ رۆونكرنێ شیكاربكە.

لێنێرینەك بۆ پاش

31 ئازاد ل جهێ فرۆتنا كەرەستێن كارەبێ كاردكەت. رێڤەبەرێ وی دوو رێ بو وی پێشنیاركرن بۆ هەلبژارتنا كرێیا وی:

- 200 000 + 5 % ژ سەرجەمێ فرۆتنێن وی.
- 7 % ژ سەرجەمێ فرۆتنێن وی.

نەخشەیەكێ بنڤیسە بۆ هەژمارتنا كرێیا وی ل هەر بارەكی، پاشی وێنەیێ رۆونكرنێ بۆ وێ بكێشە.

كێژ وان ئاستێ فرۆتنێ وەسا دكەت كو كرێێن وی یەكسان بن؟

لێنێرینەك بۆ پێش

32 ئەو سیستەمێ ل خوارێ پێكدهێت ژ هاوكێشەیەكا هێلی و هاوكێشەیەكا نەهێلی، ئەوێ ب وێنەیێ رۆونكرنێ شیكاربكە.

$$\begin{cases} y = x^2 + 3 \\ y = 4x \end{cases}$$

سیستەمێن لاسەنگەیێن هێلی

Systems of Linear Inequalities

بەشێ 4

وانە

1. لاسەنگەیێن هێلی ب ئێك نەزانراوی.
2. لاسەنگەیێن هێلی ب دوو نەزانراوان.
3. سیستەمێن لاسەنگەیێن هێلی.

پێشڤەچوون بەرەڤ باشتر

گەلەك چالاكیێن ئابوری هەنە پلاندانانا كرداران لسەر وان پشتبەست دبیت ب شیكاركرنا سیستەمێن لاسەنگەیێن هێلی.

لاسەنگەیێن هێلی ب ئێك نەزانراوی

Linear Inequalities in one unknown

بۆچی؟

دشێن گەلەك پرسیارێن ژیانا ڕۆژانە شیكار بكەن بكارئینانا لاسەنگەیان، بۆ نموونە ڕێژەیا دوهنی كو دڤێت مرۆڤ دخوارنا خۆدا كێم بكەت دا توشی سەرئێشیێ نەبیت.

وانەیا 1

ئارمانج

- نڤیسینا لاسەنگەیا هێلی ب ئێك نەزانراوی وشیكاركرنا وێ ب جەبرێ و ب وێنەیێ ڕوونكرنێ.
- شیكاركرنا لاسەنگەیێن هێلی یێن ئاوێتە ب ئێك نەزانراوی ب جەبرێ و ب وێنەیێ ڕوونكرنێ.
- پرسیاران بكارئینانا لاسەنگەیان شیكار دكەت.

زاراڤ
Vocabulary

لاسەنگە
inequality

كۆمەڵا شیكاریێ
solution set

لاسەنگەیا ئاوێتە
compound inequality

بجهئینان
خوارن

لێكۆلینەكێ دیاركر كو ئەو كەسێن برێ بەزی (دوهنی) ب ڕێژەیا 20% ژ بهایێ گەرمۆكێن گەرمیێ د خوارنا خۆدا كێم دكەن، كێمتر تووشی ئێشا سەری دبن. ئەگەر هێمایێ c بۆ ژمارا وان گەرمۆكێن د خوارنا مرۆڤەكیدا دانن، دڤێت ژمارا گەرمۆكێن بەزی F زێدەتر نەبت ژ 20%ێ c .

ئەڤە ب ڕێیا دەستەواژەیا بیركاریێ $F \le 0.2c$ دهێتە دەربڕین. دبێژنە ئەڤێ دەستەواژەیێ لاسەنگە.
بشێوەیەكێ گشتی هەر دەستەواژەیەكا بیركاری هێمایەكێ ژ ڤان($\le$; $\ge$; $<$; $>$) بخۆڤە بگرت دبێژنێ لاسەنگە **Inequality** .

بۆ شیكاركرنا لاسەنگەیان، سیفەتێن لاسەنگێ ل ژمارەیێن ڕاستی بكاربینە.

سیفەتێن لاسەنگەیێ	Properties of inequality	
سیفەتێ كۆمكرنێ **Addition Property**	ئەگەر $a \le b$ ئەوا $a+c \le b+c$	
سیفەتێ لێدەركرنێ **Subtraction Property**	ئەگەر $a \le b$ ئەوا $a-c \le b-c$	
سیفەتێ لێكدانێ **Multiplication Property**	ئەگەر $a \le b$ ئەوا $ac \le bc$ دەمێ	$c>0$
	ئەوا $ac \ge bc$ دەمێ	$c<0$
سیفەتێ دابەشكرنێ **Division Property**	ئەگەر $a \le b$ ئەوا $\frac{a}{c} \le \frac{b}{c}$ دەمێ	$c>0$
	ئەوا $\frac{a}{c} \ge \frac{b}{c}$ دەمێ	$c<0$

ئەڤ سیفەتێن لسەری دروست دێ مینن بكارئینانا هێمایێن دی یێن لاسەنگێ.

كۆمەڵا شیكارا لاسەنگەیێ **Solution Set** دبیتە كۆمەڵا وان ژمارەیێن ڕاستی ئەوێن دروستیا لاسەنگەیێ دیار دكەن ب لجهدانانێ.

بۆ نموونە، هەردوو ژمارێن ڕاستی $\frac{1}{2}$، -1 دوو شیکارن بۆ لاسەنگەیا $6x+1<13$ چونکی ب لجهدانانا هەر ئێکی ژ ئەڤان هەردوو ژماران ل جهێ نەزانراویێ x دوو لاسەنگەیێن ژمارەیی یێن دروست پەیدا دبن.

$$\begin{aligned} &6x+1<13 \\ &6\left(\tfrac{1}{2}\right)+1\overset{?}{<}13 \\ &3+1\overset{?}{<}13 \\ &4\overset{?}{<}13 \quad \text{دروستە} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &6x+1<13 \\ &6(-1)+1\overset{?}{<}13 \\ &-6+1\overset{?}{<}13 \\ &-5\overset{?}{<}13 \quad \text{دروستە} \end{aligned}$$

بزاڤێ بکە ئەری تو دکاری هندەک شیکارێن دن بۆ لاسەنگەیا پێشتر دیار بکەی؟ ساخبکە بکارئینانا لجهدانانێ.

نموونە 1

لاسەنگەیا $4x-5\geq 13$ شیکاربکە.

شیکار

$4x-5\geq 13$	لاسەنگەیە
$4x-5+5\geq 13+5$	سیفەتێ کۆمکرنێ بکاربینە
$4x\geq 18$	سادەبکە
$x\geq \frac{18}{4}=4.5$	سیفەتێ دابەشکرنێ بکاربینە

کۆمەڵا شیکارێ دبیتە کۆمەڵا ژمارەیێن ڕاست ژ 4.5 کێمتر نەبیت.

بزاڤێ بکە لاسەنگەیا $-4<7-3x$ شیکاربکە، و کۆمەڵا ژمارێ لسەر تەوەرێ ژماران بنوێنە.

تو دشێی کۆمەڵا شیکارێ بۆ لاسەنگەیا ب ئێک نەزانراوی لسەر تەوەرێ ژماران بنوێنی. ئەڤ وێنەیێ ل خوارێ کۆمەڵا شیکارێ بۆ لاسەنگەیا $4x-5\geq 13$ دنوێنت.

بازنا بچووک یا پڕکری ڕامانا وێ ئەوە کو 4.5 سەرب کۆمەڵا شیکارێ ڤەیە.

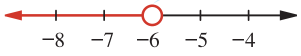
نموونە 2

لاسەنگەیا $4-3x>16-x$ شیکاربکە، و کۆمەڵا شیکارێ لسەر تەوەرێ ژماران بنوێنە.

شیکار

$4-3x>16-x$	لاسەنگەیە
$4-3x+x>16-x+x$	سیفەتێ کۆمکرنێ بکاربینە
$4-2x>16$	سادەبکە
$4-2x-4>16-4$	سیفەتێ لێدەرکرنێ بکاربینە
$-2x>12$	سادەبکە
$\frac{-2x}{-2}<\frac{12}{-2}$	سیفەتێ دابەشکرنێ لسەر ژمارەکا سالب بکاربینە
$x<-6$	سادەبکە

بازنا ڤالا ڕامانا وێ ئەوە کو -6 نە سەرب کۆمەڵا شیکارێ ڤەیە.



بزاڤێ بکە لاسەنگەیا $5-7b>8-4b$ شیکاربکە.

نموونە 3

بجهێنان ئەزموون

نمرا دوماهیێ بۆ قوتابی ل ئامادەیەکێ دهێتە هەژمارتن ب رێژەیا دوو سێئێکێ ژ نمرا ئەزموونێ و ب رێژەیا سێئێکێ ژ ئەرکێ مالێ. ل قوتابخانەکێ نمرا دابان ل ئەزموونا مێژوویێ 90% بوو. کێمترین نمرا ئەرکێ مالێ کو دڤێت دابان وەربگرت چەندە دا نمرا دوماهیێ ژ **93%** کێمتر نەبت.

شیکار

پێدایێن پرسیارێ رێددەن تو بنڤیسی.

$$\text{نمرا دوماهیێ} = \frac{1}{3}\left(\text{نمرێن ئەرکێ مالێ}\right) + \frac{2}{3}\left(\text{نمرێن ئەزموونێ}\right)$$

یان $f = \frac{2}{3}(90) + \frac{1}{3}h$ ، کو f نمرا دوماهیێیە، h نمرا ئەرکێ مالێ. دا f کێمتر نەبت ژ 93 دڤێت h ببیتە شیکار بۆ لاسەنگیا ل خوارێ:

$$93 \le \frac{2}{3}(90) + \frac{1}{3}h$$

ڤێ لاسەنگیێ شیکاربکە:

$93 \le \frac{1}{3}h + 60$	سادەکرن
$93 - 60 \le \frac{1}{3}h + 60 - 60$	سیفەتێ لێدەرکرنێ بکاربینە
$33 \le \frac{1}{3}h$	سادەکرن
$3 \times 33 \le 3 \times \frac{1}{3}h$	سیفەتێ لێکدانێ بکاربینە
$99 \le h$	سادەکرن

ڤێجا، دڤێت نمرا ئەرکێ مالێ نە کێمتر بیت ژ 99 ، دا نمرا دوماهیێ ژ 93 کێمتر نەبت.

چالاکی

شیکارکرنا لاسەنگەیان ب وێنەیێ روونکرنێ — Exploring Inequalities Grayphically

1. لاسەنگیا $2x - 3 < 3$ شیکاربکە.
2. د ئێک رووتەختێ پۆتانیدا وێنەیێ هەردوو راستەهێلان $y = 2x - 3$ ، $y = 3$ بکێشە.
3. وان بهایێن گۆڕاوێ x دیاربکە وەسا بکەن کو ئەو خالێن دکەڤنە سەر راستەهێلێ $y = 3$ بلندترین ژ وان خالێن دکەڤنە سەر راستەهێلا $y = 2x - 3$.
4. رووبکە چەوا بەرسڤدانا پرسیارا پێشتر هاریکاریا تە دکەت بۆ شیکارکرنا ڤێ لاسەنگیێ.
5. لاسەنگیا $3x + 2 > 5$ ب وێنەیێ روونکرنێ شیکاربکە وان پێنگاڤێن تو پێ دگەهییە شیکارێ روونبکە.

خالا چاڤدێریێ √

ئەرێ رێیا پێشتر بکێر دهێت بۆ لاسەنگیا $2x - 3 > x + 4$ ؟ هەورەسا بۆ لاسەنگیا $3x + 1 \ge 4$ ؟ ئەوێ روونبکە.

هزرکرنەکا رەخنەگر

لاسەنگەیێن ئاوێتە — Compound Inequalities

دانا ئەنجامێن پشکنینا خوینا خۆ خواند بۆ زانینا برێ شەکرێ د خوینا خۆدا. لسەر هاتبوو نڤیسین کو ئەڤ برە s دڤێت کێمتر نەبیت ژ 750 ملگم د لیتەرەکێدا، وزێدەتر نەبیت ژ 1100ملگم د لیتەرەکێدا. ڤێجا دڤێت s ڤان هەردوو مەرجان پاسەدان بکەت $s \ge 750$ و $s \le 1100$ ، ئانکو دڤێت شیکارەکا هاوبەش هەبت بۆ هەردوو لاسەنگیان $x \ge 750$ و $x \le 1100$.

ئەگەر دوو لاسەنگە ب ئامرازێ پێکڤەگرێدانێ «و» ∧ پێکڤە هاتبنە گرێدان، **لاسەنگەیەکا ئاوێتە Compound Inequality** دێ بدەست مە کەڤیت.

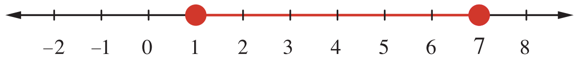
بۆ شیکارکرنا لاسەنگەیا ئاوێتە ب ئامرازێ «و» ∧ ، هەر ئێك ژ هەردوو لاسەنگەیان جودا جودا شیکار بکە وشیکارێن هاوبەش وەربگرە. ئانکو کۆمەلا شیکارێ بۆ لاسەنگەیا ئاوێتە ب ئامرازێ «∧» دبیتە کۆمەلا ئێکودوویرینا هەردوو کۆمەلێن شیکارێ بۆ هەردوو لاسەنگەیێن جودا.

نموونە 4 **$(2x+1\geq 3)\wedge(3x-4\leq 17)$ شیکاربکە و کۆمەلا شیکارێ لسەر تەوەرێ ژماران بنوێنە.**

شیکار

$$\begin{array}{ccc} 3x-4\leq 17 & \wedge & 2x+1\geq 3 \\ 3x\leq 21 & \wedge & 2x\geq 2 \\ x\leq 7 & \wedge & x\geq 1 \end{array}$$

کۆمەلا شیکارێ بۆ ڤێ لاسەنگەیا ئاوێتە دبیتە کۆمەلا بهایێن x ئەوێن $1\leq x\leq 7$ ساخدکەن، ولسەر تەوەرێ ژماران ب ڤێ شێوەی ل خوارێ دهێتە نواندن.



بشێوەیەکێ گشتی چێدبیت $(x>a)\wedge(x<b)$ ب ڤێ شێوەی بێتە دەربرین $a<x<b$.

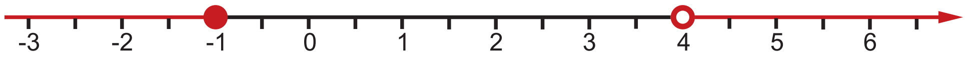
بزاڤێ بکە $(-2x+5\geq 3)\wedge(x-5>-12)$ شیکاربکە و کۆمەلا شیکارێ لسەر تەوەرێ ژماران بنوێنە.

جۆرەکێ دی ژ لاسەنگەیێن ئاوێتە هەنە کو ب ئامرازێ پێکڤە گرێدانێ «یان» «∨» دوو لاسەنگەیان پێکڤە گرێددەن. کۆمەلا شیکارێ بۆ لاسەنگەیا ئاوێتە ب ئامرازێ «یان» «∨» دبیتە یەکگرتنا هەردوو کۆمەلێن شیکارێ بۆ هەردوو لاسەنگەیێن جودا.

نموونە 5 **$(5x+1>21)\vee(3x+2\leq -1)$ شیکاربکە و کۆمەلا شیکارێ لسەر تەوەرێ ژماران بنوێنە.**

شیکار

$$\begin{array}{ccc} 3x+2\leq -1 & \vee & 5x+1>21 \\ 3x\leq -3 & \vee & 5x>20 \\ x\leq -1 & \vee & x>4 \end{array}$$



بزاڤێ بکە $(2x\leq 5)\vee(7x+1>36)$ شیکاربکە و کۆمەلا شیکارێ لسەر تەوەرێ ژماران بنوێنە.

راهێنان

بەردەوامبوون د بیرکارییێدا

1 پێنگاڤێن نواندنا کۆمەلا شیکارێ بۆ لاسەنگەیا $7x-7>0$ لسەر تەوەرێ ژماران روونبکە.

2 کۆمەلا شیکارا $7x-7>0$ ب چ یا جیاوازە ژ کۆمەلا شیکارا $7x-7\geq 0$.
کۆمەلا شیکارا $7x-7>0$ ب چ یا جیاوازە ژ کۆمەلا شیکارا $7x-7<0$.

3 ئەرێ هەردوو لاسەنگەیان $x<16$ و $-x>-16$ـئێك کۆمەلا شیکارێ هەنە؟ ڕوونبکە.

4 دەستەواژەیا « x نە ژمارەیەکا سالبە» چەوا دهێتە نڤیسین بکارئینانا هێماییێن لاسەنگیێ؟

ڕاهێنانێن ئاڕاستەکری

5 لاسەنگەیا $3x+1<13$ شیکاربکە و کۆمەلا شیکارێ لسەر تەوەرێ ژماران بنوێنە.

6 لاسەنگەیا $a+4<4a-11$ شیکاربکە و کۆمەلا شیکارێ لسەر تەوەرێ ژماران بنوێنە.

7 ئەزموون نمرا دوماهیێ بۆ قوتابی ل قوتابخانەکا ئامادەیی دهێتە هەژمارتن ب ڕێژەیا $\frac{3}{4}$ ژ نمرەیێن ئەزموونێ و ب ڕێژەیا $\frac{1}{4}$ ژ کۆششێ ڕۆژانە. ئەگەر نمرا ڕامان ل کۆششێ ڕۆژانە 92% بیت ڕادێ کێمترین نمرە چەندە کو دڤێت ڕامان وەربگرت ل ئەزموونان هەتا نمرەیا دوماهیێ ژ 80% کێمتر نەبت؟

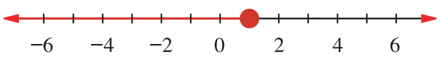
بجهئینان

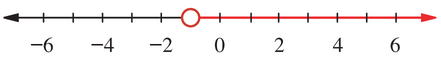
8 لاسەنگەیا $(2x+3<15)\wedge(3x-7\geq -13)$ شیکاربکە و کۆمەلا شیکارێ لسەر تەوەرێ ژماران بنوێنە.

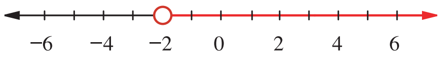
9 لاسەنگەیا $(4x-6<14)\vee(2x+4\leq -10)$ شیکاربکە و کۆمەلا شیکارێ لسەر تەوەرێ ژماران بنوێنە.

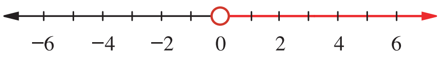
ڕاهێنان و بجهئینان

لاسەنگەیەکێ بنڤیسە بگونجت دگەل شیکارا هاتیە نواندن لسەر تەوەرێ ژماران.

10


11


12


13


هەر لاسەنگەیەکێ شیکاربکە و کۆمەلا شیکارێ لسەر تەوەرێ ژماران بنوێنە.

14 $5x<10$

15 $-5x>10$

16 $-5x<-10$

17 $a+4<10$

18 $\frac{1}{2}a-1\geq -15$

19 $\frac{1}{5}b-2\leq 28$

20 $-x+8<41$

21 $-5x-15\leq 60$

22 $\frac{y}{2}\leq 10$

23 $-\frac{y}{32}<2$

24 $-6(b+4)<12$

25 $6-(4a-3)\geq 8$

26 $4y-12>7y-15$

27 $3(4y-5)<8y+3$

28 $-4x-3<-6x-17$

29 $-5(3x+2)\geq 4(x-1)$

هەر لاسەنگەیەکا ئاوێتە شیکاربکە و کۆمەلا شیکارێ لسەر تەوەرێ ژماران بنوێنە.

30 $(x>-4)\wedge(x<2)$

31 $(x>-4)\wedge(x>2)$

32 $(x>-4)\vee(x>2)$

33 $(x>-4)\vee(x<2)$

34 $(x<-4)\wedge(x>2)$

35 $(x<-4)\wedge(x<2)$

36 $(x<-4)\vee(x<2)$

37 $(x<-4)\vee(x>2)$

بجهئینان

38 **کارێن خێرخوازیێ:** دەزگەهەکی خێرخوازیێ بریاردا ڕاکێشانەکا خێرخوازیێ ئەنجامبدەت لسەر ترومبێلەکێ کو کۆمپانیەکێ بەخشی بوو. ئەڤێ دەزگەهی هزر دکر کو دڤێت 1250 پلێتان ب کێماسی بفروشت هەتا 21 000 000 دینار بدەست بکەڤت. کێمترین نرخێ پلێتێ دڤێت چەند بیت، بۆ زانین مەزاختنا ڕاگەهاندنێ 1500 000 دینار بوون.

39 تێچوویێ بەرهەمئینانا متایەکێ دیارکری دبتە $C=40x+868$ وداهاتێ فرۆتنێ $R=54x$، x دبیتە ژمارا یەکێن بەرهەمی. C دبیتە هێمایێ تێچوویا بەرهەمێ وان یەکەیان.

أ لاسەنگەیەکێ بنڤیسە دەستکەفتنا قازانجی دەربپرت.

ب ب کێماسی دڤێت دەزگەهـ چەند یەکەیان بفرۆشت دا زیان ڤێ نەکەڤت.

ج لاسەنگەیا پێشتر ب وێنەیێ ڕوونکرنێ شیکاربکە.

لێنێرینەک بۆ پاش

هەر هاوکێشەیەکا پێتی شیکاربکە ب هەژمارتنا وی نەزانراوێ دناڤ دوو کەڤاناندا یێ نەزانراوێن دی.

40 $A=p+prt$ (t)

41 $SA=2ab+2ac+2bc$ (a)

لێنێرینەک بۆ پێش

42 دوو جووتێن ڕێکخستی $(x,\ y)$ دیاربکە کو ببنە شیکار بۆ لاسەنگەیا $2x+3y<10$.

وانەیا
2

لاسەنگەیێن هێلی ب دوو نەزانراوان

Linear inqualities in two unknowns

بۆچی؟
ڕێڤەبەرێن مەلبەندێن خۆشیێ لاسەنگەیێن هێلی بکاردئینن بۆ دیارکرنا ژمارا پلیتێن چوونا ژووری کو دڤێت ب بهایێن جودا بفرۆشن بۆ دەستکەفتنا قازانجی (نموونە 3).

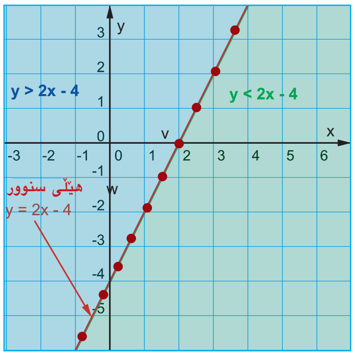
ئارمانج
- شیکارکرنا لاسەنگەیێن هێلی ب دوو نەزانراوان ب وێنەیی ڕوونکرنێ.
- شیکارکرنا پرسیاران بکارئینانا لاسەنگەیێن هێلی ب دوو نەزانراوان.

زاراڤ
Vocabulary

لاسەنگەیا هێلی
Linear inequality

هێلا سنووری
Boundary line

نەخشەیا هێلی دبیتە بنجینە بۆ لاسەنگەیێن هێلی ب دوو نەزانراوان. **لاسەنگەیا هێلی ب دوو نەزانراوان Linear inequality in two unknowns** دەربرینێ ژ پەیوەندیا ل ناڤبەرا دوو گۆڕاوان دکەت کو هێمایەك ژ هێمایێن لاسەنگی تێدا هەبیت وەکی $y > 2x - 4$. کۆمەلا شیکارا لاسەنگەیا هێلی ب دوو نەزانراوان دبیتە هەموو ئەو جووتێن ڕێکخستی (x,y) کو وێ لاسەنگێ پاسەدان دکەن. هەروەسا ئەو خالێن دبنە شیکارێن جیاواز بۆ لاسەنگێ، بەشەکی ژ ڕووتەختێ پۆتانێ پێکدئینن کو یێ سنووردارییە ب ڕاستەهێلەکی ئەوێ ڕووتەختی دکەتە دوو بەش، بۆ نموونە ڕاستەهێلی $y = 2x - 4$ ڕووتەختێ پۆتانێ دکەتە دوو بەش وەکی د وێنەیدا دیار. پۆتانێن خالێن بەشەکی لاسەنگەیا $y > 2x - 4$ پاسەدان دکەن، لێ خالێن بەشی دی لاسەنگەیا $y < 2x - 4$ پاسەدان ناکەن، بەشێ ئێکێ (بەشێ سەری) ل وێنەیێ کۆمەلا شیکارێ بۆ لاسەنگەیا $y > 2x - 4$ دنوێنت، ودبێژنێ **دەڤەرا شیکارێ (ناڤچەیا شیکارێ)** و ڕاستەهێلێ $y = 2x - 4$ دبێژنێ هێلا سنووری بۆ دەڤەرا شیکارێ. هێلا سنووری دهێتە دروستکرن ب شێوەیێ خالان و ئەڤە دەربرینێ ژ وێ ئێکێ دکەت کو ئەو خالە ناکەڤنە دناڤ دەڤەرا شیکارێ دا.



بۆ شیکارکرنا لاسەنگەیا $y > 2x - 4$ هێلا سنووری بشێوەی ڕاستەهێلەکی خالخالکری بکێشە، و دەڤەرا سەری ڕەشبکە کو ئەو دبتە دەڤەرا شیکارێ.

نموونە

1 لاسەنگەیا $y < \frac{1}{2}x + 1$ شیکاربکە.

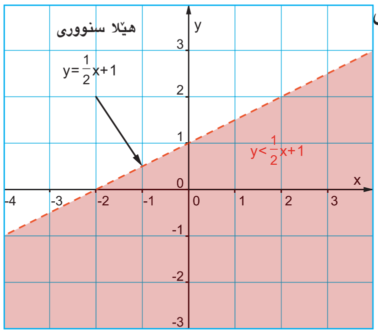
شیکار

(أ) $y < \frac{1}{2}x + 1$

ڕاستەهێلێ $y = \frac{1}{2}x + 1$ هێلا سنوورییە و لایێ دی دبیتە $\frac{1}{2}$، و ئێکدوو برینا وی یا ستوونی دبیتە (1).
هێلا سنووری ب شێوەیێ ڕاستەهێلەکێ خالخالکری بکێشە چونکی ئەو نابیتە بەشەك ژ دەڤەرا شیکارێ.
ئەو دەڤەرا ل ژێر هێلا سنووری ڕەشبکە.
ساخبکە خالەکێ ژ دەڤەرا ڕەشکری هەلبژێرە، خالا (0,0) بۆ نموونە ودیاربکە ئەرێ ئەو خالە دبیتە شیکار بۆ لاسەنگێ یان نە.
بۆ نموونە وەك $y < \frac{1}{2}x + 1$

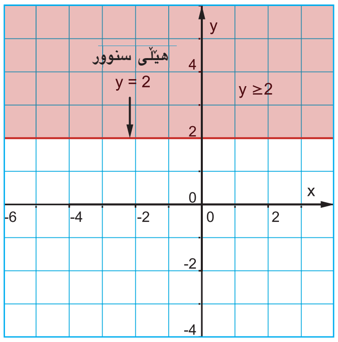
$$0 \overset{?}{<} \frac{1}{2}0 + 1$$

$$0 \overset{?}{<} 1 \checkmark$$



ئەوێ خالێ لاسەنگە ساخکر، دێ دەڤەرا ڕەشکری بیتە دەڤەرا شیکارێ.

(ب) لاسەنگەیا $y \geq 2$ شیکاربکە.



تو دزانی ڕاستەهێلێ $y = 2$ ڕاستەهێلەکێ ئاسۆیییە.

پێنگاڤ 1 ڕاستەهێلەکی بکێشە ب هێلەکێ بەردەوام، چونکی هێلا سنووری دبیتە بەشەک ژ دەڤەرا شیکارێ.

پێنگاڤ 2 دەڤەرا لسەر هێلا سنووری ڕەشبکە بۆ دیارکرنا وان خالان کو $y > 2$

ساخبکە: خالا $(0,4)$ دکەڤتە دناڤ دەڤەرا شیکارێ دا چونکی $4 \geq 2$. بەرێ خۆ بدێ کو هەر خالەکا بکەڤتە سەر هێلا سنووری یان لسەر ژۆریا هێلا سنووری شیکارا لاسەنگێ دنوێنت هەر بهایێ x چەند بیت.

بزاڤێ بکە هەر لاسەنگەیەکێ ب وێنەیێ ڕوونکرنێ شیکاربکە $y \geq 3x - 2$ و $y < -3$.

ئەگەر هاوکێشەیا هێلا سنووری لسەر شێوەیێ لاری – ئێکدووبڕین نە هاتبیتە نڤیسین، تو دکاری خالەکێ بۆ ساخکرنێ هەلبژێری کو نەکەڤتە سەر هێلا سنووری بۆ دیارکرنا ئەوێ دەڤەرا کو دڤێت بهێتە ڕەشکرن. ئەگەر پۆتانێ وێ خالێ لاسەنگە ساخکرن، دەڤەرا ئەو خالە دکەڤتە تێدا ڕەشبکە، وئەگەر ساختەکر دەڤەرا دی ڕەشبکە.

نموونە 2

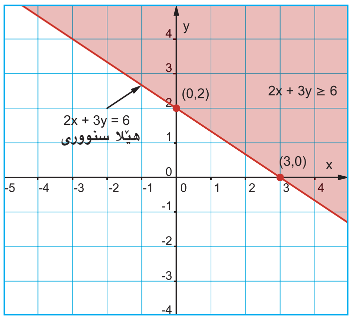
لاسەنگەیا $2x + 3y \geq 6$ ب وێنەیێ ڕوونکرنێ شیکاربکە بکارئینانا ئێکدووبڕینان ل گەل هەردوو تەوەران.

شیکار

پێنگاڤ 1 هەردوو ئێکدووبڕینان دیاربکە.

ل جهێ x سفرێ دانە، پاشی ل جهێ y سفرێ دانە بۆ دیارکرنا خالێن ئێکدووبڕینا هێلا سنووری ل گەل هەردوو تەوەران.

ئێکدووبڕین ل گەل تەوەرێ ئێکێ (ئاسۆیی)	ئێکدووبڕین ل گەل تەوەرێ دووێ (ستوونی)،
$2x + 3y = 6$	$2x + 3y = 6$
$2x + 3 \times 0 = 6$	$2 \times 0 + 3y = 6$
$2x = 6$	$3y = 6$
$x = 3$	$y = 2$



پێنگاڤ 2 هێلا سنووری بکێشە کو دبیتە ئەو ڕاستەهێلێ د هەردوو خالانڕا $(0,2)$ و $(3,0)$ دبۆریت. ئەڤێ ڕاستەهێلی ب ڕاستەهێلەکێ بەردەوام بکێشە، چونکی ئەو دبیتە بەشەک ژ دەڤەرا شیکارێ.

پێنگاڤ 3 دەڤەرا پێدڤی ب ڕەشکرنێ دیاربکە.

ساخبکە ئەرێ خالا $(0,0)$ دکەڤتە دناڤ دەڤەرا شیکارێدا یان نە.

$0 + 0 \geq 6$ نەیا دروستە، ڤێجا خالا $(0,0)$ ناکەڤتە دناڤ دەڤەرا شیکارێدا.

ڤێجا دڤێت دەڤەرا دکەڤتە ژۆریا هێلا سنووری ڕەشبکەی.

بزاڤێ بکە لاسەنگەیا $3x - 4y > 12$ ب وێنەیێ ڕوونکرنێ شیکاربکە بکارئینانا ئێکدووبڕینا ئاسۆیی و ستوونی.

شیکاری
پرسیارەکان

نموونە 3 بجهێنانەکا بازرگانی

ل شانۆگەریەکێ دوو جۆرێن پلیتێن چووناژوور دفرۆشن: بۆ مەزنان ب8000 دیناران وبۆ زارۆکان ب 5000 دیناران. ل ئاهەنگەکێ ڕێڤەبەریا شانۆیێ 240 000 دینار خەرجکرن. ئەرێ دڤێت چەند پلیتێن چووناژوور بفرۆشیت ژ هەر جۆرەکی بۆ بدەستکەفتنا قازانجی؟ ڕێڤەبەریێ 20 پلیتێن زارۆکان فرۆتن، ئەرێ دڤێت چەند پلیتێن مەزنان بفرۆشیت بۆ بدەستکەفتنا قازانجی؟

1 د پرسیارێ بگەهە

شیکارکرنا پرسیارێ ژ دوو بەشان پێکدهێت: نڤیسینا وێ لاسەنگیێ کو شیکارا وێ دبیتە بەرسڤ بۆ پرسیارا ئێکێ وشیکارکرنا وێ ب وێنەیێ ڕوونکرنێ، پاشی دیارکرنا ژمارا پلیتێن مەزنان کو دڤێت بهێنە فرۆتن دەمێ 20 پلیتێن زارۆکان هاتینە فرۆتن.

پێدایێن گرنگ بنڤیسە

- دوو جۆرێن پلیتان هەنە: بۆ مەزنان ب 8000 دیناران وبۆ زارۆکان ب 5000 دیناران.
- نابیت سەرجەمێ بهایێ پلیتێن هاتینە فرۆتن کێمتربیت ژ 240 000 دیناران.

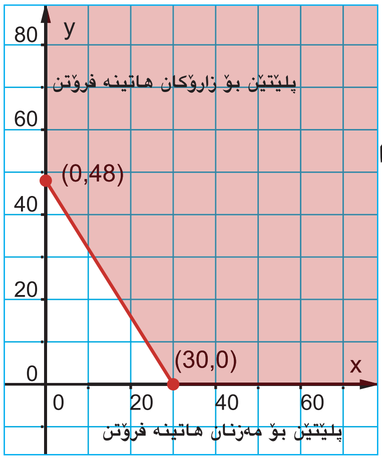
2 پلانێ دانە

x بکاربینە بۆ ژمارا پلیتێن مەزنان و y بکاربینە بۆ ژمارا پلیتێن زارۆکان. لاسەنگەیەکێ بنڤیسە بۆ نواندنا پرسیارێ.

سەرجەم	≥	ژمارا پلیتێن زارۆکان	×	نرخێ پلیتا زارۆکان	+	ژمارا پلیتێن مەزنان	×	نرخێ پلیتا مەزنان
240 000	≥	y	×	5000	+	x	×	8000

پرسیار بڤێ لاسەنگیێ دهێتە نواندن $8000x+5000y\geq 240\ 000$ یان $8x+5y\geq 240$

3 شیکار



ئێکدووبڕینا هێلا سنووری ل گەل هەردوو تەوەران دیاربکە.

$8x+5\times 0=240$ $8\times 0+5y=240$

$x=30$ $y=48$

هێلا سنووری بکێشە کو دبیتە ئەو ڕاستەهێلێ د هەردوو خالانڕا دبۆریت $(0,48)$؛ $(30,0)$. ئەو دەڤەرا دکەڤتە ڕەخێ ژۆریێ هێلا سنووری ل چارێکێ ئێکێ ڕەشبکە، چونکی نابیت ژمارا پلیتان یا سالب بیت. ئەگەر ژمارا پلیتێن هاتینە فرۆتن بۆ زارۆکان 20 بن:

$8x+5\times 20\geq 240$ ل جهێ y (20) دانە

$8x+100\geq 240$ سادەکرن

$8x\geq 140$ ڤێجا $x\geq 17{,}5$ دڤێت ژمارا پلیتان ژمارەکا تەواوبیت.

ڤێجا نابیت ژمارا پلیتێن مەزنان ژ 18 کێمتربیت.

4 ساخکرن

$18\times 8000+20\times 5000=244000$

بزاڤێ بکە ڕێڤەبەرێ بنگەهەکێ ڕەوشەنبیریێ بریاردا دوو جۆرێن دیاریان پێشکێشی ئەندامێن خۆ بکەت. نرخێ دیاریا ژ جۆرێ ئێکێ 125 000 دینار بوو، ونرخێ دیاریا ژ جۆرێ دووێ 40 000 دینار بوو. ڕێڤەبەری 1 500 000 دینار هەبوون، ئەو دشێت چەند دیاریان ژ هەر جۆرەکی پێشکێش بکەت؟ ئەگەر ئەوی 4 دیاری ژ جۆرێ ئێکێ پێشکێش کرن، دێ چەند دیاریان ژ جۆرێ دووێ شێت پێشکێش کەت؟

ڕاهێـــــنـــــان

بەردەوامبوون د بیرکارییێدا

1 بەراوردیێ بکە لناڤبەرا بازنا ڤالا وبازنا پڕکری ل شیکارا لاسەنگەیێن هێلی ب ئێك نەزانراوی ب وێنەیێ ڕوونکرنێ، هەروەسا بەراوردیێ بکە لناڤبەرا هێلا سنووری یا خالخالکری و هێلا سنووری یا بەردەوام ل شیکارا لاسەنگەیێن ب دوو نەزانراوان ب

2 بەحسێ دەڤەرا شیکارێ بۆ لاسەنگەیا $x \geq 4$ بکە.

3 ڕونبکە ئەرێ تو دشێی خالا $(0,0)$ هەلبژێری بۆ دیارکرنا دەڤەرا شیکارێ کو دڤێت تو ڕەشبکەی ل شیکارا $3x+5y \leq 0$.

ڕاهێنانێن ئاڕاستەکری

4 **زاراڤ** ڕوونبکە چەوا دشیاندایە ڕاستەهێلێ $y = 3x - 4$ بکێشی وەك هێلا سنووری.

هەر لاسەنگەیەکێ ب وێنەیێ ڕوونکرنێ شیکاربکە.

5 $y > -4$ **6** $y \leq 2$

7 $y \geq x - 3$ **8** $y < -\frac{1}{3}x + 2$

ڤان لاسەنگەیان بکارئینانا ئێکدووبڕینێن ئاسۆیی وستوونی شیکاربکە.

9 $3x+2y>12$ **10** $5x-2y \leq 20$ **11** $-4x+5y<-20$

12 **بکاربرن** سۆزانێ 17 000 دینار هەنە بۆ کرینا دوو جۆرێن قەهوا ئامادەکری. جۆرێ ئێکێ نرخێ پاکیتا وێ 2290 دینار بوو، و نرخێ پاکیتا جۆرێ دووێ 3750 دینار بوو. هێمایێ x بۆ ژمارا پاکیتێن جۆرێ ئێکێ وهێمایێ y بۆ ژمارا پاکیتێن جۆرێ دووێ بکاربینە.

أ لاسەنگەیەکێ بۆ نواندنا پرسیارێ بنڤیسە، ب وێنەیێ ڕوونکرنێ شیکاربکە بۆ دیارکرنا ژمارا وان پاکیتێن قەهوێ یێن کو سوزان بشێت ژ هەر جۆرەکی بکڕیت.

ب چەند پاکیتان ژ جۆرێ ئێکێ سوزان دشێت بکڕیت، ئەگەر تە زانی 3 پاکیت یێ ژ جۆرێ دووێ کڕین؟

13 **قوتابخانە** قوتابیێن پۆلا یازدێ وێژەیی دوو جۆرێن تابلۆیێن هۆنەری دفرۆشن بۆ کۆمکرنا برێ پارەکی نە کێمتربیت ژ 280 000 دیناران. جۆرێ ئێکێ قازانجێ 1750 دیناران دابین دکەت، وجۆرێ دووێ قازانجێ 1250 دیناران دابین دکەت. هێمایێ x بۆ ژمارا تابلۆیێن جۆرێ ئێکێ و y بۆ ژمارا تابلۆیێن جۆرێ دووێ دانە.

أ لاسەنگەیەکێ بۆ نواندنا پرسیارێ بنڤیسە، و ب وێنەیێ رووونکرنێ شیکاربکە بۆ دیارکرنا ژمارا وان تابلۆیێن هونەری کو دڤێت قوتابی بفرۆشن ژ هەردوو جۆران.

ب قوتابیان 100 تابلۆیێن هونەری ژ جۆرێ ئێکێ و 50 تابلۆیێن هونەری ژ جۆرێ دووێ فرۆتن. ئەرێ قوتابیان ئارمانجا خۆ بجهئینان؟

هەر لاسەنگەیەکێ پێ y شیکاربکە پاشی ب وێنەیێ رووونکرنێ شیکاربکە.

14 $\frac{1}{2}(6x-2y)\geq 4$ **15** $-\frac{3}{5}x+y\geq 2$ **16** $3(3x-y)>-12$

راهێنان و بجهئینان

هەر لاسەنگەیەکێ شیکاربکە ب وێنەیێ رووونکرنێ.

17 $y\geq 6$ **18** $y<x+4$ **19** $y>-\frac{2}{5}x-3$

هەر لاسەنگەیەکێ شیکاربکە بکارئینانا ئێکودووبڕینێن ئاسۆیی و ستوونی.

20 $4x+2y\geq 8$ **21** $3x-6y<12$

22 **بازرگانی** تێچوویا ریکلامێ ل رۆژنامەیەکا ناڤخوێ 20 000 دینارن ل رۆژەکێ وتێچوویا وێ ل رادیۆیێ 50 000 دینارن، بۆ هەر خولەکەکێ. ئەگەر بۆدجەیێ دابینکری بۆ ریکلامێ ل دەزگەهەکێ ئێك مەلیۆن دینار بیت. هێمایێ x بۆ ژمارا رۆژێن ریکلامێ ل رۆژنامەیێ وهێمایێ y بۆ ژمارا خولەکێن ریکلامێ ل رادیۆیێ دانە. لاسەنگەیەکا هێلی بۆ نواندنا پرسیارێ بنڤیسە پاشی شیکاربکە ب وێنەیێ رووونکرنێ.

23 **مۆبایل** سەردەم دوو جۆرێن کارتێن مۆبایلێ دفرۆشیت، جۆرەکی ب 8000 دیناران وجۆرێ دی ب 12 000 دیناران. بهایێ هەموو کارتێن مۆبایلێ لنك سەردەمی دبیتە 200 000 دینار. هێمایێ x بۆ ژمارا کارتێن جۆرێ ئێکێ وهێمایێ y بۆ ژمارا کارتێن جۆرێ دووێ دانە.

أ لاسەنگەیەکا هێلی بۆ نواندنا پرسیارێ بنڤیسە، و ب وێنەیێ رووونکرنێ شیکاربکە.

ب سەردەم 10 کارتێن ژ جۆرێ 8000 دیناری فروتن، دڤێت چەند کارتان ژ جۆرێ دی بفرۆشیت؟

هەر لاسەنگەیەکێ پێ y شیکاربکە و ب وێنەیێ ڕوونکرنێ شیکارێ دیاربکە.

24 $-4y<4(3x-5)$ **25** $-3(-10x+2y)\geq 24$ **26** $-\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}y\leq -1$

هەر لاسەنگەیەکێ ب وێنەیێ ڕوونکرنێ شیکاربکە:

27 $-4y>10x-20$ **28** $y-5\geq 4(x-2)$ **29** $6x+3y<0$

30 $y+\frac{3}{4}\leq\frac{5}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)$ **31** $\frac{9-3y}{2}\geq 6x$ **32** $x\leq 4$

33 $4x-5y<7x-3y$ **34** $2x-5y\leq -4x+15$ **35** $x>-2$

36 **قوتابخانە** تیپا بیرکاریێ ل ئامادەیەکا نموونەی ئاهەنگەکا سترانان ساز دکەت بۆ کۆمکرنا بڕێ پارەکی کو نە کێمتربیت ژ 600 000 دیناران ب مەرەما کڕینا ئامیرەکێ کۆپیکرنێ یێ تایبەت بۆ تیپێ. سەرۆکێ تیپێ بڕیاردا کو نرخێ پلێتا چووناژووریێ 5000 دیناربیت ئەگەر بەری ئاهەنگێ ب ڕۆژەکێ کڕی بیت و ب نرخێ 6000 دیناران بیت ئەگەر ل بەر دەرگەهێ تیپێ بکڕیت.

أ هێمایێ x بۆ ژمارا پلێتێن هاتینە فرۆتن بەری ئاهەنگێ ب ڕۆژەکێ دانە وهێمایێ y دانە بۆ ژمارا پلێتێن هاتینە فرۆتن ل بەر دەرگەهێ تیپێ. لاسەنگەیەکا هێلی بۆ نواندنا پرسیارێ بنڤیسە، و ب وێنەیێ ڕوونکرنێ شیکاربکە.

ب ئەگەر ژمارا پلێتێن هاتینە فرۆتن بەری ئاهەنگێ ب ڕۆژەکێ 30 دانەبن، ئەرێ ژمارا وان پلێتێن ل بەر دەرگەهێ تیپێ بهێنە فرۆتن دڤێت چەندبیت دا بگەهنە مەرەما خۆ؟

37 **کۆمکرنا پارەی** قوتابیێن پۆلا یازدێ ڕابوون ب فرۆتنا پیتزا وتەزیاتیان ل دەمێ ئەنجامدانا یاریێن تەپا سەبەتێ بۆ کۆمکرنا بڕێ پارەکی کو نە کێمتربیت ژ 150 000 دیناران ب مەبەستا کڕینا دیاریەکێ بۆ مامۆستایێ بیرکاریێ ب هەلکەفتا ب داوی هاتنا سالا خواندنێ. ئەگەر ل هەر پیتزایەکێ 1250 دیناران و ل هەر تەزیاتیەکێ 500 دیناران قازانج بکەن. هێمای x بۆ ژمارا پیتزایان وهێمایێ y بۆ ژمارا تەزیاتیان دانە.

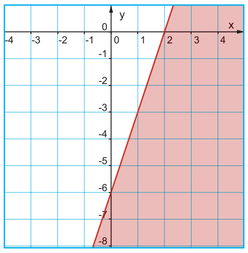
أ لاسەنگەیەکا هێلی بۆ نواندنا پرسیارێ بنڤیسە.

ب قوتابیان 75 پیتزا و 150 تەزیاتی فرۆتن. ئەرێ ئەو دکارن دیاریێ بکڕن؟

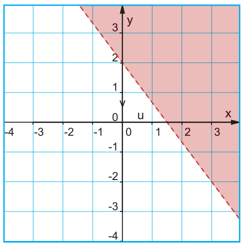
38 **هزرکرنەکا ڕەخنەگر** نرخێ پلێتا چوونا ژوورا پارکا ئازادی یا ئاژەلان 5000 دینارن بۆ مەزنان و 2000 دینارن بۆ زارۆکان. نرخێ پلێتێن ل ڕۆژەکێ هاتینە فرۆتن زێدەتربوو ژ 300 000 دیناران. دلشاد و دلێر هەر ئێکی ژ وان لاسەنگەیەکا هێلی بۆ نواندنا پرسیارێ نڤیسی، و ب وێنەیێ ڕوونکرنێ شیکارکر. دلشادی هێمایێ x بۆ ژمارا پلێتێن مەزنان دانە، لێ دلێری هێمایێ x بۆ ژمارا پلێتێن زارۆکان دانە. ب چ هەردوو وێنەیێن ڕوونکرنێ ئەوێن هەردوو قوتابیان وێنەکرین دجیاوازبوون؟ ئەرێ ئێك ژ وان نەیێ دروستە؟ ئەگەر بەرسڤ بەلێ بوو، کیژ ژ وان نەیێ دروست بوو؟

لاسەنگەیەکا هێلی ب دوو نەزانراوان بۆ هەر وێنەیەکێ ڕوونکرنێ ل خوارێ بنڤیسە.

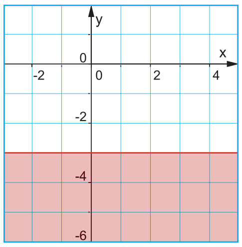
39



40



41



42 **هزرکرنەکا ڕەخنەگر** بەراوردییێ بکە لناڤبەرا شیکارێن هەردوو لاسەنگەیان ب وێنەیێ ڕوونکرنێ $30y<90+x$ و $30y+x<90$. ب چ لێکچوونە و ب چ دجیاوازن؟

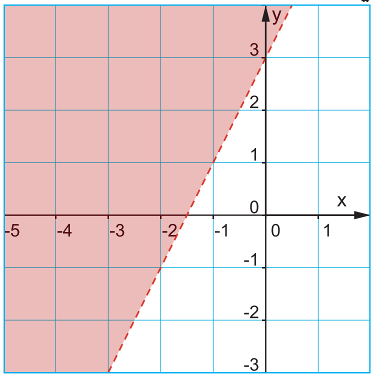
43 یانەیا زانکۆیێ ئاهەنگا شیڤخوارنێ یا سالانە ل هۆلا ئاهەنگان دروستکر، دوو جۆرێن مێزان دانان، بازنەی و لاکێشەی. 8 کورسی ل دۆر هەر مێزەکێ بازنەی و 6 کورسی ل دۆر هەر مێزەکێ لاکێشەی دانان. هێمایێ x بۆ ژمارا مێزەیێن بازنەی وهێمایێ y بۆ ژمارا مێزەیێن لاکێشەی دانە.

أ) لاسەنگەیەکا هێلی بۆ نواندنا پرسیارێ بنڤیسە، ئەگەر ژمارا کورسیێن پێدڤی نە کێمتربیت ژ 220 . و لاسەنگێ ب وێنەیێ ڕوونکرنێ شیکاربکە.

ب) بۆ ڕێك و پێکیا هۆلێ وەسا یا باش بوو نە زێدەتر ژ 300 کورسیان دانن. لاسەنگەیەکێ بۆ نواندنا ڤی مەرجی بنڤیسە و ب وێنەیێ ڕوونکرنێ شیکاربکە.

ج) بەراوردییێ لناڤبەرا وان هەردوو وێنەیێن ڕوونکرنێ بکە. (ب چ دجیاوازن؟)

44 کیژ ژ وان لاسەنگەیێن ل خوارێ ڤی وێنەیێ بەرامبەر دنوێنیت؟



أ) $y<2x+3$ ج) $y\ge2x+3$

ب) $4x-2y<-6$ د) $4x+2y>6$

45 کیژ ژ ڤان خالێن ل خوارێ نە سەرب دەڤەرا شیکارا لاسەنگەیا $5x-3y<30$ ڤەنە.

أ) $(0,0)$ ج) $(-5,3)$

ب) $(3,-5)$ د) $(-3,5)$

46 کیژ لاسەنگەیا هاوتایە ل گەل لاسەنگەیا $7x-3y\ge4$ (ئێك دەڤەرا شیکارێ هەنە).

أ) $y\le\frac{7}{3}x-\frac{4}{3}$ ج) $y\ge-\frac{7}{3}x-\frac{4}{3}$

ب) $y\le-\frac{7}{3}x+\frac{4}{3}$ د) $y\ge\frac{7}{3}x+\frac{4}{3}$

47 کیژ ژ ڤان هەردوو خالان هەردوو ئێکودووبڕینێن ئاسۆیی و ستوونی بۆ هێلا سنووری یا لاسەنگەیێ $y\le3x-9$ دنوێنن؟

أ) $(0,9)$ و $(3,0)$ ج) $(0,9)$ و $(-3,0)$

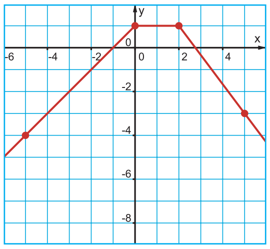
ب) $(0,3)$ و $(-9,0)$ د) $(0,-9)$ و $(3,0)$

لێنێرینەك بۆ پاش

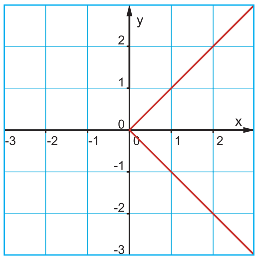
ڕاستەهێلێ ستوونی بكاربینە دا دیار بكەی ئەرێ وێنەیێ ڕوونكرنێ نەخشێ دنوێنیت یان نە؟

(بەشێن پێشتر)

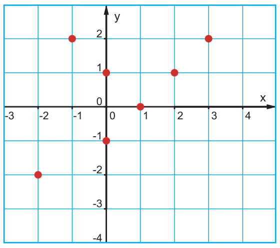
48



49



50



لسەر شێوەیێ لاری – ئێكودووبڕین، هاوكێشەیا وێ ڕاستەهێلێ بنڤیسە كو د خالا$(1,-7)$ ڕادبۆریت و:

51 د خالا $(1,3)$ڕادبۆریت.

52 لارێ وی 0.25

لێنێرینەك بۆ پێش

53 ڕاوەستاندنا ترۆمبێلێ ل گەراجێ بۆ دەمێ 8 خولەكان ب 250 دینارانە وبۆ دەمێ 20 خولەكان ب 500 دینارانە. درێژترین دەمێ ڕاوەستیانا ترۆمبێلێ 3 دەمژمێرن. دەمێ شوانی ترۆمبێلا خۆ ل گەراجێ ڕاوەستاندی ئەوی زانی ژمێریارێ گەراجێ 37 خولەك ب خورایی بۆ وی بەخشی. كیژ وان پارچەیێن پارێ ل خوارێ دڤێت ئەو بكاربینیت بۆ ڕاوەستیانا ترۆمبێلا خۆ بۆ دەمێ 3 دەمژمێران.

(أ) 3 پارچەیێن 250 دیناری و 9 پارچەیێن 500 دیناری.

(ب) 13 پارچەیێن 250 دیناری و 2 پارچەیێن 500 دیناری.

(ج) 8 پارچەیێن 250 دیناری و 4 پارچەیێن 500 دیناری.

(د) 5 پارچەیێن 250 دیناری و 5 پارچەیێن 500 دیناری.

وانەیا 3

سیستەمێن لاسەنگەیێن هێلی

System of Linear Inequalities

بۆچی؟

دۆزەراوێن جەمسەری باشووری سیستەمێن لاسەنگەیێن هێلی بکاردئینن بۆ دیارکرنا ئەوێ لەزا ئەو پێدڤی ب دا تۆشی ئاڤ وهەوایەکێ ترسناک نەبن. (نموونە 2).

ئارمانج

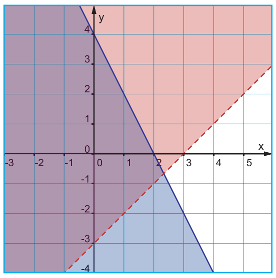
- شیکارکرنا سیستەمێن لاسەنگەیێن هێلی ب وێنەیێ رۆونکرنێ.

زاراڤ
Vocabulary

سیستەمێ لاسەنگەیێن هێلی
System of linear inequalities

دەمێ ل پرسیارەکێ دەستەواژەیا (مەزنترە) یان (نەپترە) بکاربێت، دێ تو شێی لاسەنگەیەکێ یان سیستەمەکی لاسەنگەیێن هێلی بکاربینی.

سیستەمێ لاسەنگەیێن هێلی System of linear inequalities ژ دوو لاسەنگەیان یان پتر پێکدهێن کو هەمان نەزانراو تێدا هەنە. گەلەك جاران كۆمەلا شیکارا سیستەمێ دوو لاسەنگەیێن هێلی ب دوو نەزانراوان پێکدهێت ژ ژمارەکا بێ سنوور یا خالان، کو یا دشیاندایە ب وێنەیەکێ رۆونکرنێ بهێنە نواندن ب رەشکرنا دەڤەرەکێ ل رووتەختێ پۆتانی. دەمێ دوو لاسەنگەیان ب وێنەیێن رۆونکرنێ بنوێنن ل ئێك رووتەختێ پۆتانی، هەردوو دەڤەرێن رەشکری ئێکودوو دبرن و دەڤەرەکا هاوبەش پەیدا دبیت ودبیتە دەڤەرا شیکارێ بۆ سیستەمی.



نموونە 1

سیستەمێ دوو لاسەنگەیێن هێلی ب وێنەیێ رۆونکرنێ شیکاربکە.

شیکار

(أ) $\begin{cases} y \le -2x+4 \\ y > x-3 \end{cases}$

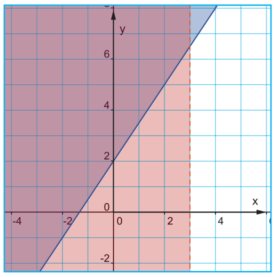
ل لاسەنگەیا ئێکێ، راستەهێلێ $y=-2x+4$ ب هێلەکی بەردەوام بکێشە، ودەڤەرا ژێرەی وی رەشبکە. و ل لاسەنگەیا دووێ، راستەهێلێ $y=x-3$ ب هێلەکێ خالاخالکری بکێشە، ودەڤەرا ژۆریا وی رەشبکە. ئێکودووبرینا هەردوو دەڤەرێن رەشکری دبیتە دەڤەرا شیکارێ بۆ وی سیستەمێ دوو لاسەنگەیێن هێلی.

ساخکرن ژ هەر دەڤەرەکێ ل رووتەختێ پۆتانی خالەکێ پاسەدان بکە.

دەڤەر	خال	$y \le -2x+4$	$y > x-4$
بۆ رەخێ چەپێ	(0,0)	$0 \overset{?}{\le} -2(0)+4$ $0 \overset{?}{\le} 4$ ✓	$0 \overset{?}{>} 0-3$ $0 \overset{?}{>} -3$ ✓
بۆ رەخێ راستێ	(4,0)	$0 \overset{?}{\le} -2(4)+4$ $0 \overset{?}{\le} -4$ ✗	$0 \overset{?}{>} 4-3$ $0 \overset{?}{>} 1$ ✗
بۆ سەری ژۆری	(2,2)	$2 \overset{?}{\le} -2(2)+4$ $2 \overset{?}{\le} 0$ ✗	$2 \overset{?}{>} 2-3$ $2 > -1$ ✓
بۆ ژێرەی	(2,−2)	$-2 \overset{?}{\le} -2(2)+4$ $-2 \overset{?}{\le} 0$ ✓	$-2 \overset{?}{>} 2-3$ $-2 \overset{?}{>} -1$ ✗

خالا ئێکێ (0,0) بتنێ ئەو خالەیە دبیتە شیکار بۆ سیستەمێ لاسەنگەیی.

ب) $\begin{cases} y \geq \frac{3}{2}x + 2 \\ x < 3 \end{cases}$



ل لاسەنگەیا ئێکێ، ڕاستەهێلێ $y = \frac{3}{2}x + 2$ ب هێلەکێ بەردەوام بکێشە و دەڤەرا لسەر ژۆریا وی ڕەشبکە. ل لاسەنگەیا دووێ، ڕاستەهێلێ $x = 3$ ب هێلەکێ خالخالکری بکێشە و دەڤەرا لایێ چەپێ ڕەشبکە. ئێکودووبڕینا هەردوو دەڤەرێن ڕەشکری دبیتە دەڤەرا شیکارێ بۆ سیستەمێ هەردوو لاسەنگەیێن هێلی.

$x < 3$ $\quad$ $y \geq \frac{3}{2}x + 2$

ساخکرن ژ دەڤەرا هاوبەش خالەکێ وەکی $(-4\ ,\ 0)$ بۆ نموونە وەربگرە و ساخبکە ئەرێ هەردوو پۆتانێن وێ دبنە شیکار بۆ وی سیستەمێ؟

$-4 < 3$ ✓ $\quad$ $0 \geq \frac{3}{2}(-4) + 2$

$0 \geq -4$ ✓

چونکی ئەو خالە دکەڤتە دەڤەرا شیکارا هەردوو لاسەنگەیان. ڤێجا دەڤەرا ئێکودووبڕینا وان دبیتە دەڤەرا شیکارێ.

بزاڤێ بکە هەر سیستەمەکێ لاسەنگەیێن هێلی ب وێنەیێ ڕوونکرنێ شیکاربکە.

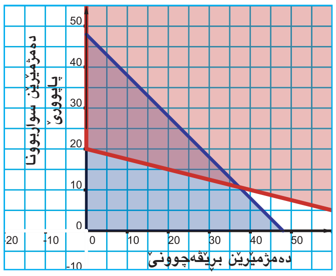
أ $\begin{cases} x - 3y < 6 \\ 2x + y > 1.5 \end{cases}$ $\quad$ ب $\begin{cases} y \leq 4 \\ 2x + y < 1 \end{cases}$

بجهئینان لسەر هەوێن ڤەدیتنێ.

نموونە 2

هەوا ڤەدیتنا جەمسەری ب **240 km** یا دووربوو ژ بنگەهێ خۆ. بنگەهێ پێشبینکر کو ل دەمێ **48** دەمژمێران دێ باهۆزەکا بەفرێ ئەنجامدەت، ڤێجا دڤێت ئەو هەوا بلەز سوارێ پاپۆرێن بەفرمال بن و بچن وپاشی ب پێیان بڕێڤە بچن هەتا بگەهتە بنگەهێ خۆ. پەرەلەزا پاپووری **12 km / h**، لێ پەرەلەزا ڕێڤەچوونا ب پێیان و ڕاکێشانا بارێ خۆ ژ **3 km / h** نابۆریت. سیستەمەکێ لاسەنگەیێن هێلی بنڤیسە وشیکاربکە ب وێنەیێ ڕوونکرنێ بۆ دیارکرنا ماوێ سواربوونا پاپووری وماوێ ڕێڤەچوونێ ب پێیان بەری بگەهنە بنگەهێ خۆ.

شیکار



هێمایێ x بۆ ژمارا دەمژمێرێن ڕێڤەچوونێ ب پێیان، وهێمایێ y بۆ ژمارا دەمژمێرێن سواربوونا پاپووری بکاربینە. دڤێت سەرجەمێ هەردوو نەزانراوان نە زێدەتربیت ژ 48 دەمژمێران، ئەڤە لاسەنگەیا $x + y \leq 48$ دیار دکەت. ل ڕەخەکێ دی، دڤێت ئەو دووریا هەوا دبڕیت نە کێمتربیت ژ 240 km، ئەڤە لاسەنگەیا دووێ $3x + 12y \geq 240$ دیار دکەت. د سیستەمێ هەردوو لاسەنگەیێن هێلی ئەڤەیە: $\begin{cases} x + y \leq 48 \\ 3x + 12y \geq 240 \end{cases}$

ڕاستەهێلێ $3x + 12y = 240$ ب هێلەکێ بەردەوام بکێشە، ودەڤەرا ل ژێریا وی ڕەشبکە. وڕاستەهێلێ $x + y = 48$ ب هێلەکێ بەردەوام بکێشە، پاشی دەڤەرا ل ژۆریا وێ ڕەشبکە. دەڤەرا شیکارێ دبیتە دەڤەرا ئێکودووبڕینا هەردوو دەڤەرێن ڕەشکری.

ساخبکە خالا $(15, 25)$ هەلبژێرە ژ دەڤەرا ئێکودووبڕینێ، ودیار بکە کو پۆتانێ ڤێ خالێ دبنە شیکار بۆ هەر لاسەنگەیەکێ ودبنە شیکار بۆ سیستەمێ.

$x + y \leq 48$ $\quad$ $3x + 12y \geq 240$

$15 + 25 \leq 48$ $\quad$ $3(15) + 12(25) \geq 240$

$40 \leq 48$ ✓ $\quad$ $345 \geq 240$ ✓

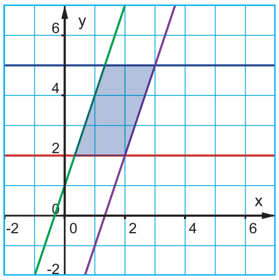
بزاڤێ بکە سۆلاڤ لەفێن گۆشتی ولەفێن مریشکێ دفرۆشیت، ئەوێ 40 صەموونە هەنە. ئانکو ئەو نەشێت پتر ژ 40 لەفان ژ هەردوو جۆران پێکڤە بفرۆشیت. ئەو ژ فرۆتنا لەفەکا گۆشتی 2 000 دیناران قازانج دکەت و ژ فرۆتنا لەفەکا مریشکێ 2 500 دیناران قازانج دکەت. ئەوێ دڤێت 90 000 دیناران قازانج بکەت. سیستەمێ لاسەنگەیێن هێلی بۆ نواندنا پرسیارێ بنڤیسە، پاشی ب وێنەیێ ڕوونکرنێ شیکاربکە.

چێدبیت سیستەمێ لاسەنگەیێن هێلی پتر ژ دوو لاسەنگەیان بخۆڤە بگریت.

نموونە 3 **بجهێینانەکا ئەندازەی**

ڤی سیستەمێ لاسەنگەیێن هێلی ب وێنەیێ ڕوونکرنێ شیکاربکە، وجۆرێ دەڤەرا شیکارێ دیاربکە.

$$\begin{cases} y \le 5 \\ y \ge 2 \\ y \le 3x+1 \\ y \ge 3x-4 \end{cases}$$



شیکار

ڕاستەهێلێ $y=5$ ب هێلەکێ بەردەوام بکێشە، ودەڤەرا ل ژێرا وی ڕەشبکە و ڕاستەهێلێ $y=3x+1$ ب هێلەکێ بەردەوام بکێشە، ودەڤەرا ل ژێرا وی ڕەشبکە. ڕاستەهێلێ $y=2$ ، ب هێلەکێ بەردەوام بکێشە، و دەڤەرا ل ژۆریا وی ڕەشبکە، ڕاستەهێلێ $y=3x-4$ ب هێلەکێ بەردەوام بکێشە، و دەڤەرا ل ژۆریا وی ڕەشبکە، دەڤەرا شیکارێ بۆ سیستەمی دبیتە دەڤەرا ئێکودووبرینێ، دەڤەرا شیکارێ شێوەیەکێ چار لایە.
بەرێ خۆ بدێ هەردوو ڕاستەهێل $y=5$ ، $y=2$ تەریبن، و دوو ڕاستەهێلێن ئاسۆیینە.
و هەردوو ڕاستەهێل $y=3x+1$ ، $y=3x-4$ تەریبن چونکی هەمان لاری هەنە. دەڤەرا شیکارێ چار لایە وهەموو دوو لایێن بەرامبەر تەریبن ڤێجا ئەو لاتەریبە.

بزاڤێ بکە سیستەمێ لاسەنگەیێن هێلی ب وێنەیێ ڕوونکرنێ شیکاربکە، و جۆرێ دەڤەرا شیکارێ دیاربکە:

أ $\begin{cases} x \le 6 \\ y \le \frac{1}{2}x+1 \\ y \ge -2x+4 \end{cases}$

ب $\begin{cases} y \le 4 \\ y \ge -1 \\ y \le -x+8 \\ y \le 2x+2 \end{cases}$

ڕاهێنـــــان

بەردەوامبوون د بیرکارییێدا

1 ڕوونبکە چەوا دەڤەرا شیکارێ بۆ سیستەمێ لاسەنگەیێن هێلی دیار دکەی.

2 کێمترین ژمارا لاسەنگەیان دڤێت چەندبیت هەتا دەڤەرا شیکارێ سێگۆشەبیت؟ چار گۆشەبیت؟ نموونەیان بۆ بەرسڤێن خۆ بینە.

3 بەراوردیێ بکە لناڤبەرا سیستەمێ لاسەنگەیێن هێلی وسیستەمێ هاوکێشەیێن هێلی.

ڕاهێنانێن ئاڕاستەكرای

ب وێنەیێ ڕوونكرنێ هەر سیستەمەكێ لاسەنگەیێن هێلی شیكاربكە.

4 $\begin{cases} y \geq 4x-4 \\ y \geq 3x-3 \end{cases}$

5 $\begin{cases} x+y>5 \\ x-y<-3 \end{cases}$

6 $\begin{cases} 7x<y-16 \\ y \leq -5x-2 \end{cases}$

7 $\begin{cases} 2x+2y \leq 4 \\ 3x-y>1 \end{cases}$

8 **كۆمكرنا هاریكاریان** كۆمەڵەكا خێرخوازیێ هاریكاریان كۆم دكەت، ب فرۆتنا قەمیسێن هریێ. نرخێ قەمیسێ مەزنان 15 000 دینارن ونرخێ قەمیسێ زارۆكان 10 000 دینارن. سەرجەمێ هەردوو جۆرێن قەمیسان 250 قەمیس بوون. كۆمەڵێ دڤێت بكێماسی 3 ملیۆن دینار بدەست بكەڤیت. سیستەمەكی لاسەنگەیێن هێلی بۆ نواندنا ڤی حالەتی بنڤیسە، پاشی ب وێنەیێ ڕوونكرنێ شیكاربكە بۆ دیاركرنا ژمارا قەمیسێن ژ هەر جۆرەكی بفرۆشیت.

ڕاهێنان و بجهئینان

ب وێنەیێ ڕوونكرنێ هەر سیستەمەكێ لاسەنگەیێن هێلی شیكاربكە، وجۆرێ دەڤەرا شیكارێ دیاربكە.

9 $\begin{cases} x \geq 9 \\ y \geq -18 \\ x \leq 13 \\ y \leq -4 \end{cases}$

10 $\begin{cases} x \leq 7 \\ 2x-y \leq 3 \\ x+2y \geq -6 \end{cases}$

11 $\begin{cases} x \leq -1 \\ y \leq 3x+2 \\ y \geq -3x-10 \end{cases}$

12 $\begin{cases} y \geq x \\ y \leq x+6 \\ x \leq 6 \\ x \geq -2 \end{cases}$

ب وێنەیێ ڕوونكرنێ هەر سیستەمەكێ لاسەنگەیێن هێلی شیكاربكە.

13 $\begin{cases} 5x-y>0 \\ y<x \end{cases}$

14 $\begin{cases} 3y \geq 2x-3 \\ y \geq 3x+8 \end{cases}$

15 $\begin{cases} x+y>5 \\ -2x+y \leq 2 \end{cases}$

16 $\begin{cases} y>4 \\ x+4y \geq 8 \end{cases}$

17 **مۆسیقە** كۆمپانیەكێ دڤێت CD 10 000 بۆ كۆمەڵەكا سترانان دروستبكەت. هندەك ژ وان سیدیان بەلاڤكرن لسەر ویستگەهێن ڕادیۆ وتەلەفزیۆنێ بێ بەرامبەر. وهندەك ژ وان تەرخانكرن بۆ فرۆتنێ. ژمارا ئەوێن بێ بەرامبەر هاتینە بەلاڤكرن نە پترە ژ ڕێژا 20% ژ سەرجەمێ هەموو CD . سیستەمەكێ لاسەنگەیێن هێلی بۆ نواندنا ڤی حالەتی بنڤیسە، ل گەل دیاركرنا ژمارا وان CD تەرخانكری بۆ فرۆتنێ.

ب وێنەیێ ڕوونكرنێ هەر سیستەمەكێ لاسەنگەیێن هێلی شیكاربكە، و جۆرێ دەڤەرا شیكارێ دیاربكە.

18 $\begin{cases} x \geq 0 \\ -\frac{1}{3}x+y \geq -4 \\ \frac{1}{3}x+y \leq -1 \end{cases}$

19 $\begin{cases} y \leq 2.5 \\ y \geq -0.5 \\ y \leq -x+8 \\ y \leq 2x+4 \end{cases}$

20 $\begin{cases} y \leq x+6 \\ y \geq x+1 \\ y \leq -x+6 \\ y \geq -x-1 \end{cases}$

21 $\begin{cases} y \leq x \\ y \leq -x+2 \\ y \geq 0 \end{cases}$

ئەندازە سیستەمەكی لاسەنگەیێن هێلی بنڤیسە كو شێوەیێ دەڤەرا شیكارێ:

22 لاكێشە بیت

23 سێگۆشەیا وەستاو بیت

24 نیمچە لاتەریب بیت

25 **باجا دەرامەت** خشتێ بەرامبەر رێژا باجێ لسەر داهاتیێ لدویف بهایێ داهاتێ خێزانەکێ دیار دکەت. رێژا باجێ لسەر داهاتێ سەرجون و ژنا وی 25% بوو. داهاتێ ژنا وی پترە ژ داهاتێ وی ب 2 ملیۆنان بکێماسی. سیستەمەکی لاسەنگەیێن هێلی بۆ نواندنا پرسیارێ بنڤیسە، پاشی ب وێنەیێ روونکرنێ شیکاربکە.

رێژا باجا دەرامەت لدویف بەشان	
داهات (ب ملیۆنێن دیناران)	رێژە
ژ 14 هەتا 56.800	15%
ژ 56.801 هەتا 114.650	25%
ژ 114.651 هەتا 174.700	28%

ب وێنەیێ روونکرنێ هەر سیستەمەکێ لاسەنگەیێن هێلی شیکاربکە. و سێ خالان ژ دەڤەرا شیکارێ دیاربکە.

26 $\begin{cases} -5y < 2x \\ 5y \geq 2x - 20 \end{cases}$

27 $\begin{cases} y + 7 > 0 \\ y < 2x + 5 \\ y < -3x + 4 \end{cases}$

28 $\begin{cases} y \geq -8 \\ x + 2y < 4 \\ x > -6 \end{cases}$

29 $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 3y \leq 2 \\ x - y > 3 \end{cases}$

لێزڤرینەک بۆ پاش

دژی و هەلگەراوی هەر ژمارەیەکا ل خوارێ بینەدەر. ئانکو (دژێ کۆمکرنێ و دژێ لێکدانێ).

30 7 **31** $-\frac{3}{4}$ **32** 2.48 **33** -1

هاوکێشەیا راستەهێلی بینەدەر.

34 د هەردوو خالانرا $(2, -7)$ و $(1, 1)$ دبۆریت

35 د خالا $(3,-3)$ را دبۆریت ولارێ وێ سفرە

36 د خالا $(-2, 4.5)$ را دبۆریت وتەریبە ل گەل $y = 4x - 1$.

37 د خالا $(3, 2)$ را دبۆریت وتەریبە ل گەل $y = -x - 7$.

لێزڤرینەک بۆ پێش

38 ئەرێ بەهایەک بۆ نەزانراوێ m هەیە وەسا دکەت کو سیستەمێ لاسەنگەیێن هێلی $\begin{cases} y > -3x + 2 \\ y < mx - 3 \end{cases}$ شیکار نەبیت؟ ئەگەر بەرسڤ بەلێ بوو، وی بەهای دیاربکە، وئەگەر بەرسڤ نەخێر بوو، هویێ وێ روونبکە.

ڕێزکری Matrices

بەشێ

5

وانە

.1 ڕێزکری
.2 سنووردار

جیهانا تەکنۆلۆژیا

تو دشێی ڕێزکریان بکاربینی بۆ نیشادانا پێداییان وشرۆڤەکرنا ئاراستەیێن پێشکەفتنا وان، بۆ نموونە زێدەبوونا ژمارا وان سنیلێن تەلەفوونێن تایبەت هەین (مۆبایل).

وانەیا 1

ڕیزکری Matrices

بۆچی

ڕیزکریان بکاردئینن بۆ ڕێکخستنا پێدایان، هەر وەکی ڕێکخستنا کەل ویەلێن جهەکێ بازرگانی. نموونە ١.

خشتەیێ ل خوارێ چالاکیا بازرگانیێ دیاردکەت بۆ جهەکێ (دوکانێ) فرۆتنا کەل ویەلێن ناڤ مالێ ل درێژیا مەها نیسانێ. ئەڤ خشتە کەل ویەلێن دوکانێ دیار دکەت (ل دەستپێکا مەها نیسانێ)، ویێن هاتینە فرۆتن (ل درێژیا مەها نیسانێ) ویێن هاتینە کڕین (ل مەها نیسانێ).

	کەل ویەل ل ئێکێ نیسانێ		کەل ویەلێن هاتینە فرۆتن ل نیسانێ		کەل ویەلێن هاتینە کڕین ل نیسانێ	
	بچووك	مەزن	بچووك	مەزن	بچووك	مەزن
مێزەیێن باغچێ	8	10	7	9	15	20
مەقلییێن بژارتنێ	15	12	15	12	18	24

تو دشێی پێداییێن کەل ویەلێن دوکانێ بنوێنی بکارئینانا ڕێزکری.

مەزن بچووك

ڕێزکریێ کەل ویەلان ← مێزەیێن باغچێ / مەقلیێن بژارتنێ

$$M = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 15 & 12 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

ڕێزکری Matrix خشتەیەکێ لاکێشەییە ژ چەند خانەیان پێکدهێت یێ دۆر داینە ب دوو کڤانێن وەستاو. هەر خانەیەك ژ ژمارەکێ پێکدهێت دبێژنێ **دانەیەك Element** ژ دانەیێن ڕێزکری.

پایا ڕێزکری rank of matrix دەربرینێ ژ ژمارا ڕیز rows و ستوونێن columns ڕێزکری دکەت، و ب ڤی شێوەی دنڤیسن: ژمارا ستوونان × ژمارا ڕێزان، ئەگەر ڕێزکری دوو ڕیز و سێ ستوون هەبن، ب ئەڤی جۆری دبیت 3×2 (دهێتە خواندن دوو لێکدانی سێ). پایا ڕێزکری ل نموونەیا سەری دێ ب ڤی جۆری بیت 2×2 . بۆ هەر دانەیەکی ژ دانەیێن ڕێزکری **ناڤ ونیشانەك Address** هەیە، ئەو جهێ دانەی د ڕێزکری دا دیار دکەت، ناڤ ونیشانێ دانەی پێکدهێت ژ ژمارا ڕێزا ئەو دانە لسەر و لدویڤدا ژمارا ستوونا ئەوی دانەی بخۆڤە دگریت.

دانەیێ 10 ل ڕێزکریێ لسەری ئەو دانەیە ل ڕێزا 1 و ستوونا 2 ، ئەڤ دانە ب هێمایێ m_{12} دهێتە دەربڕین.

نموونە 1 بکارئینانا ڕێزکریان بۆ پێشاندانا پێدایان

پێداییێن وان کەل ویەلێن ل مەها نیسانێ هاتینە فرۆتن بکاربینە.

أ ڕێزکریەکی بکاربینە بۆ پێشاندانا پێدایان.

مەزن بچووك

ڕێزکریێ کەل ویەلێن فرۆتین ← مێزەیێن باغچێ / مەقلییێن بژارتنێ

$$S = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 15 & 12 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}$$

ب پایا ڕێزکریێ S چەندە؟

ڕێزکریێ S دوو ڕیز و دوو ستوون هەنە ڤێجا پایا وی 2×2 .

ج دانەیێ s_{12} کیژ وانە؟

دانەیێ s_{12} دکەڤتە ڕێزا ئێکێ و ستوونا دووێ، کو پێکهاتیە ژ 9 . ئەڤ دانە وەسا دیار دکەت کو ل مەها نیسانێ 9 مێزەیێن مەزن بۆ باغچێ هاتینە فرۆتن.

ئارمانج

- ڕێزکریان بکاردئینن بۆ نواندنا پێداییێن بیرکاریێ و ژیانا ڕۆژانە.
- کۆمکرن ولێکدانا ڕێزکریان.
- لێکدانا ڕێزکری ل گەل ژمارەکا ڕاستی.

ڤاراڤ

Vocabulary

- ڕێزکری Matrix
- پایا ڕێزکری rank of matrix
- دانەیێ ڕێزکری Entry
- ناڤ ونیشانێ دانەی Address

د دانەیێ 15 چییە؟

دانەیێ 15 دکەڤتە سەر ئێکودووبڕینا ڕێزا دوویێ ل گەل ستوونا ئێکێ وئەو دبیتە S_{21} .

بزاڤێ بکە ڕێزکریێ بەرامبەر بۆ بەرسڤدانێ بکاربینە.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 9 \\ 12 & 11 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

أ پایا ڕێزکریێ M چییە؟

ب دانەیێ m_{32} چەندە؟

ج سفر ل دوو جهان دیاردبیت، ناڤ ونیشانێ هەر ئێك ژ وان چییە؟

دوو ڕێزکری دێ یەکسان بن ئەگەر ژ هەمان پایە بن، و دانەیێن بەرامبەر د هەردوو ڕێزکرییاندا یەکسان بن (ئانکو وان دانەیان هەمان ناڤ ونیشان هەبن ل هەردوو ڕێزکرییان).

نموونە 2

یەکسانبوونا ڕیزکرییان

بەهایێ x و y دیاربکە ئەگەر هەردوو ڕێزکری د یەکسان بن.

$$\begin{bmatrix} 2x+4 & 5 & 1 \\ -2 & -3y+5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 5 & 1 \\ -2 & 5y-3 & -4 \end{bmatrix}$$

چونکی هەردوو ڕێزکری د یەکسانن، ڤێجا

$2x+4=12$ و $-3y+5=5y-3$

$2x=8$ و $-8y=-8$

$x=4$ و $y=1$

بزاڤێ بکە بهایێ x و y دیاربکە، دەمێ هەردوو ڕێزکری د یەکسان بن.

$$\begin{bmatrix} -3 & -2x & -3 \\ -2 & 3y & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -15 & -3 \\ -2 & -2y+15 & -12 \end{bmatrix}$$

کۆمکرن و لێدەرکرنا ڕێزکرییان — Adding and Subtracting matrices

ب پەیڤان	ب ژمارە	ب جەبری
بۆ کۆمکرن و لێدەرکرنا دوو ڕێزکرییان دانەیێن بەرامبەر کۆمبکە یان ژ ئێکودوو دەربکە.	$[1 \quad 2]+[5 \quad 10]=[6 \quad 12]$	$[a_{11} \quad a_{12}]+[b_{11} \quad b_{12}]=$ $[a_{11}+b_{11} \quad a_{12}+b_{12}]$

بۆ کۆمکرن و لێدەرکرنا دوو ڕێزکرییان، دڤێت هەردوو ڕێزکری ژ هەمان پایان بن.

کۆمکرن چێدبیت، چونکی هەردوو ڕێزکرییان هەمان پایە هەنە.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

کۆمکرن چێنابیت، چونکی هەردوو ڕێزکری ژ دوو پایەیێن جیاوازن.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{14} & b_{12} & b_{13} \end{bmatrix}$$

نموونە 3

کۆمکرن و لێدەرکرنا ڕێزکریان

ڤان ڕێزکرییێن ل خوارێ بکاربینە بۆ بەرسڤدانا پرسیاران.

$$A=\begin{bmatrix}4&-2\\-3&10\\2&6\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}4&-1&-5\\3&2&8\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}3&2\\0&-9\\-5&14\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}0&1&-3\\3&0&10\end{bmatrix}$$

کۆمبکە یان لێدەربکە ئەگەر یا دشیاندابیت.

أ $A+C$

هەر دانەیەکێ ڕێزکریێ ئێکێ ل گەل دانەیێ بەرامبەر ل ڕێزکریێ دووێ کۆمبکە.

$$A+C=\begin{bmatrix}4&-2\\-3&10\\2&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&2\\0&-9\\-5&14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+3&-2+2\\-3+0&10+(-9)\\2+(-5)&6+14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&0\\-3&1\\-3&20\end{bmatrix}$$

ب $C-A$

$$C-A=\begin{bmatrix}3&2\\0&-9\\-5&14\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&-2\\-3&10\\2&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-4&2-(-2)\\0-(-3)&(-9)-10\\-5-2&14-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&4\\3&-19\\-7&8\end{bmatrix}$$

ج $C+B$

چونکی پایەیێ ڕێزکریێ C (3×2) یێ جیاوازە ژ پایەیێ ڕێزکریێ B (2×3) ڤێجا کۆمکرن چینابیت بهێتە ئەنجامدان (نەیا دشیاندایە).

بزاڤێ بکە کۆمبکە یان لێدەربکە ئەگەر یا دشیاندابیت.

أ $B+D$ ب $B-A$ ج $D-B$

تو دزانی لێکدان کۆمکرنەکا دووبارەکریە. ئەڤە یا دروستە دەمێ ڕێزکری لێکبدەن ل گەل ژمارەکێ.

ئەگەر $M=\begin{bmatrix}2&0\\1&5\end{bmatrix}$ تو دکاری $M+M$ لسەر شێوێ $2M$ بنڤیسی.

تو دشێی ژمارەکێ ل ڕێزکرییەکی بدەی، ب لێکدانا هەر دانەیەکی ژ دانەیێن ڕێزکری ل گەل وێ ژمارێ.

$$2\begin{bmatrix}2&0\\1&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\times2&2\times0\\2\times1&2\times5\end{bmatrix}$$

نموونە 4

بجهێنانەکا بازرگانیێ

ئەگەر ئەم ڤەگەرێنە چالاکیا بازرگانیا دوکانێ بۆ فرۆتنا کەل وپەلێن ناڤ مالێ، ڕێزکریێ $M-S+D$ بهەژمێرە دەمێ M ڕیزکریێ کەل وپەلێن دوکانێ بیت و S ڕیزکریێ کەل وپەلێن هاتینە فرۆتن بیت و D ڕێزکریێ کەل وپەلێن هاتینە کرین بیت. ڕێزکریێ ئەنجامی چ دنوێنیت؟

$$M-S+D=\begin{bmatrix}8&10\\15&12\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}7&9\\15&12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}15&20\\18&24\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}8-7+15&10-9+20\\15-15+18&12-12+24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16&21\\18&24\end{bmatrix}$$

بچویک   مەزن

$$=\begin{bmatrix}16&21\\18&24\end{bmatrix}$$
مێزەیێن باغچی
مەقلیێن بژارتنێ

ڕێزکریێ ئەنجامێ کەل وپەلێن دناڤ دووکانێدا دنوێنیت ل دوماهیا مەها نیسانێ. د دوکانێدا 16 مێزێن ناڤ باغچی یێن بچووک و 21 مێزێن مەزن و 18 مەقلیێن بچووک و 24 مەقلیێن مەزن دمینن.

بزاڤێ بکە

ڕیزکرییێ $A+2B-3C$ بهەژمێرە ئەگەر

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\-1&2\end{bmatrix} \text{ و } B=\begin{bmatrix}-1&3\\-2&5\end{bmatrix} \text{ و } C=\begin{bmatrix}0&-1\\2&3\end{bmatrix}$$

نموونە 5

نڤیسینا برێن ڕێزکری ب سادەترین شێوە.

ڤان ڕێزکرییان بکاربینە بۆ بەرسڤدانا پرسیاران.

$$A=\begin{bmatrix}4&-2\\-3&10\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}4&-1&-5\\3&2&8\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}3&2\\0&-9\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}-6&3&8\end{bmatrix}$$

ب سادەترین شێوەی بنڤیسە

أ $2A-3B$ هەکە چێدبیت.

$$2A-3B=2\begin{bmatrix}4&-2\\-3&10\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}4&-1&-5\\3&2&8\end{bmatrix}$$

لێکدانا ڕێزکری ل گەل ژمارەکێ پایەیێ وی ڕێزکری نا گوهۆڕیت، ڤێجا پایەیێن هەردوو ڕێزکرییان $2A$ و $3B$ نە هندی ئێکن، و ژبەر ڤێ ئەگەرێ لێکدەرکرنا وان چێنابیت (نەیا دشیانداپە).

ب $C-2A$

$$C-2A=\begin{bmatrix}3&2\\0&-9\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}4&-2\\-3&10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2\\0&-9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}(-2)\times4&(-2)\times(-2)\\(-2)\times(-3)&(-2)\times10\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3&2\\0&-9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-8&4\\6&-20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&6\\6&-29\end{bmatrix}$$

بزاڤێ بکە

ب سادەترین شێوە، بنڤیسە، ئەگەر چێببیت.

أ $2B+3C$ **ب** $4A-3C$ **ج** $D+0.5D$

سیفەتێن کۆمکرن ولێدەرکرنا ڕێزکرییان propertio of addiy and suttractiy Matrices

ب نڤیسین	ب ژمارە	ب جەبری
سیفەتێ ئالوگۆڕ کۆمکرنا ڕێزکرییان کردارەکا ئالوگۆڕە.	$\begin{bmatrix}2&1\\1&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&7\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&7\\3&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&1\\1&4\end{bmatrix}$	$A+B=B+A$
سیفەتێ پێکڤە بەستنێ کۆمکرنا ڕێزکرییان کردارەکا پێکڤە بەستنییە.	$\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right)=\left(\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$	$A+B+C$ $(A+B)+C=$ $A+(B+C)$
ڕێزکرییێ بێ لایەن بۆ کۆمکرنێ کۆمەلا سفرێ دبیتە دانەیێ بێ لایەن بۆ کۆمکرنا ڕێزکرییان.	$\begin{bmatrix}2&1\\1&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&4\end{bmatrix}$	$A+0=A$
دژێ کۆمکرنێ بۆ ڕێزکری دژێ کۆمکرنێ بۆ ڕێزکرییێ M دبیتە ئەو ڕێزکرییێ پەیدا دبیت پشتی گوهۆڕینا نیشانا هەر دانەیەکی ژ دانەیێن ڕێزکرییێ M .	$\begin{bmatrix}-2&5\\9&-6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&-5\\-9&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$	ئەگەر B دژێ کۆمکرنێ بیت بۆ A، دێ $A+B=0$ کو 0 ڕێزکرییێ سفرییە.

ڕاهێـــــنـــان

بەردەوامبوون د بیرکاریێدا

1 هەموو پایەیێن ڕێزکریەکی بنڤیسە ئەگەر ژ 8 دانەیان پێکهاتبیت، ڕوونبکە چەوا تە دیارکرن.

2 بەحسێ کردارەکێ بکە لسەر ڕێزکرییان کو دبیتە ئەگەرێ گوهۆڕینا نیشانا هەر دانەیەکی ژ دانەیێن وی.

ڕاهێنانێن ئاڕاستەکری

3 **زاراڤ** وی بهایێ دکەڤتە سەر ئێکودووبڕینا ڕێزەکێ و ستوونەکێ د ڕێزکریەکی دا دبیتە (دانە یان ناڤ ونیشانا دانەی) پێکدئینیت.

4 هۆشیار وشێرکۆ ودلسۆز پلێتان دفرۆشن بۆ ئاهەنگا دوماهیا سالا خواندنێ. خشتێ ل خوارێ وان پێداییان دنوێنیت ئەوێن پەیوەندی هەین ب فرۆتنا پلێتان.

فرۆتنا پلێتێن ئاهەنگا دوماهیا سالا خواندنێ			
قوتابی	پلێتێن کت	دەفتەرێن پلێتان	سەرجەمێ پارێ گشتی ب دیناران
هۆشیار	39	15	114 000
شێرکۆ	108	8	143 000
دلسۆز	13	25	138 000

أ ڕێزکریێ A بۆ پیشاندانا پێداییێن خشتێ بکاربینە.

ب پایا ڕێزکریێ A چییە؟

ج دانەیێ a_{13} چەندە؟ چ دنوێنیت؟

د ناڤ ونیشانا دانەیێ 143 000 چییە؟

5 بهایێن x و y بینەدەر دەمێ هەردوو ڕێزکری یەکسان بن.

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & x+8 \\ 2y-1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 14-x \\ -13-y & 0 \end{bmatrix}$$

ڤان ڕێزکرییێن ل خوارێ بکاربینە بۆ شیکارکرنا ڕاهێنانان ژ 6 هەتا 9 . کۆمبکە یان لێکدەربکە ئەگەر چێببیت.

$$A=\begin{bmatrix} 1.5 & 3.8 & 3 \\ -1.2 & 2.4 & 0 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} -1 & 1.1 & 6 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2.3 & 1 \end{bmatrix}$$

6 $A+B$

7 $B-C$

8 $B-A$

9 $B+A$

10 **بکاربرن** خشتێ بەرامبەر سێ جۆرێن جل وبەرگێن وەرزشێ دیار دکەت بەری داناانا باجێ لسەر وان. ڤان نرخان ب ڕێزکرییێ M بنوێنە. پاشی ڕێزکرییێ T دیار بکە کو بهایێ باجا هەر جۆرەکی بنوێنیت.
بۆ زانین ڕێژەیا سەدی بۆ باجێ دبیتە 8.25% .
ڕێزکرییێ A بنڤیسە کو بهایێ هەرسێ جۆرێن جل وبەرگان بنوێنیت پشتی زێدەکرنا باجێ لسەر وان. ڕێزکرییێ A بنڤیسە کو بهایێ هەرسێ جۆرێن جل و بەرگان بنوێنیت پشتی زێدەکرنا باجێ لسەر وان.

نرخێ جل وبەرگێن وەرزشێ			
	سادە	ئارم لسەر هەبیت	نایاب
قەمیسێ پەمبویی	9 000	13 000	14 000
شۆرتێ کورت	6 000	9 500	11 000
شۆرتێ درێژ	15 000	21 000	23 000

ڤان ڕێزکریێن ل خوارێ بکاربینە بۆ شیکارکرنا ڕاهێنانان ژ 11 هەتا 14 . ئەنجامێ ب سادەترین شێوە بنڤیسە، ئەگەر یا دشیاندابیت.

$$A=\begin{bmatrix}1&3&3\\-1&2&0\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}0&4&1\\0&-2&1\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}-1&1&6\\4&0&1\\1&2&1\end{bmatrix}$$

11 $3B$ **12** $\frac{1}{2}C$ **13** $A-2B$ **14** $2C-A$

ڕاهێنان و بجهئینان

15 پێدایێن ڤێ خشتێ بۆ بەرسڤدانا پرسیاران بکاربینە.

نرخەکانی پۆشاکە وەرزشییەکان			
نمرە	پلیت	ئوتێل	ئوتۆمبیل
یەکەم	425 500	396 000	65 990
کارەکان	385 980	245 500	45 900
ئابووریانە	275 120	103 250	29 500

أ ڕێزکرییێ A بۆ پێشاندانا پێدایێن خشتێ بکاربینە.

ب پایا ڕێزکرییێ A چییە؟

ج دانەیێ a_{32} کیژ وانە؟ چ دنوێنیت؟

د ناڤ ونیشانێ دانەیێ 385980 چییە؟

16 بهایێ x و y دیاربکە ئەگەر هەردوو ڕێزکری یەکسان بن.

$$\begin{bmatrix}2x & y+1 & -2y\end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix}3x-2y & 14 & -x\end{bmatrix}$$

ڤان ڕێزکریێن ل خوارێ بکاربینە بۆ شیکارکرنا ڕاهێنانان ژ 17 هەتا 20 . کۆمبکە یان لێکدەر بکە ئەگەر چێدبیت.

$$D=\begin{bmatrix}5.1&2.5\\-2&0\\0&1.5\end{bmatrix}\quad E=\begin{bmatrix}3.2&-1\\-1.5&2.4\end{bmatrix}\quad F=\begin{bmatrix}-4.2&-1\\2.2&0\end{bmatrix}$$

17 $F-E$ **18** $D+E$ **19** $D+F$ **20** $E+F$

21 **خواندنا زانكۆيێ** خشتێ ل خوارێ بهایێ خواندنا سالانە ل زانكۆیێ دیار دكەت.

بهایێ خەملاندی یێ تێچوویا سالانە یا خواندنێ ل زانكۆیێ			
	زانكۆیا تایبەت	زانكۆیا فەرمی یا نیشتمانی	زانكۆیا فەرمی یا بیانی
تێچوون ب دینار	27 677 000	12 841 000	19 188 000

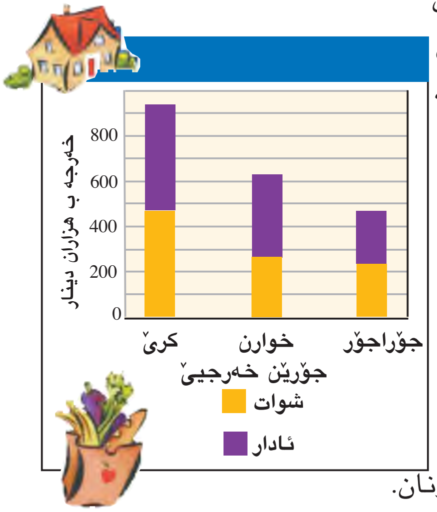
شارەزاییان وەسا پێشبینیكر كو ئەڤ بهایە ل سالا داهاتی ب ڕێژەیا 5% دێ زێدەبیت. بكارئینانا لێكدانا ژمارەكێ ل گەل ڕێزكری بۆ دیاركرنا بهایێ خەملاندی یێ تێچوویێ بۆ خواندنێ ل هەرسێ جۆرێن زانكۆیێ ل سالا داهاتی بینەدەر.

ڤان ڕێزكریێن ل خوارێ بكاربینە بۆ شیكاركرنا پرسیاران ژ 22 هەتا 25 . ئەنجامێ ب سادەترین شێوە بنڤیسە ئەگەر چێببیت.

$$G=\begin{bmatrix}5 & 2\\ -2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad H=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\\ 0 & 2\end{bmatrix},\quad J=\begin{bmatrix}4\\ 1\\ -2\end{bmatrix},\quad K=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & -1\\ 5 & 0\end{bmatrix}$$

22 $2G$ **23** $\frac{1}{2}(H+J)$ **24** $2K-G$ **25** $H-0.3G$

26 **خەملاندن** وێنەیێ ڕوونكرنێ یێ بەرامبەر وان ئەنجامان دنوێنیت ئەوێن شرینێ تۆماركرین بكارئینانا كۆمپیوتەرێ بۆ خەرجیێن شوات وئاداریێ. ڕێزكریێ $F(3\times1)$ بكاربینە بۆ نواندنا خەرجییان ل مەها شواتێ، و ڕێزكریێ M بكاربینە بۆ نواندنا خەرجییان ل مەها ئاداریێ. هەردوو ڕێزكرییان كۆمبكە بۆ دیاركرنا خەرجییا گشتی ل هەردوو مەهان.



27 **ئەندازە** ڕیزكریێ $\begin{bmatrix}2 & 2.5\\ 3 & 3.5\end{bmatrix}$ نیڤتیرەیێن چار بازنان دنوێنیت. ڕێزكریێ بنڤیسە بۆ نواندنا چێوەیێ هەر چار بازنان.

هزركرنەكا ڕەخنەگر دیاربكە ئەرێ ئەڤ دەستەواژە هەردەم یا دروستە یان هندەك جاران یا دروستە، یان هەموو دەمان نەیا دروستە.

28 چێدبیت دوو ڕێزكریان كۆمبكەن ئەگەر هەمان ژمارا دانەیان هەبن.

29 چێدبیت دوو ڕێزكریان كۆمبكەن ئەگەر ژمارا دانەیێن وان جیاوازبن.

30 چێدبیت دوو ڕێزكریان كۆمبكەن ئەگەر هەر ئێك ژوان 3 ڕێز و 4 ستوون هەبن.

31 ئەگەر كۆمكرنا دوو ڕێزكرییا چێببیت، دێ لێكدەركرنا وان ژی چێببین.

32 بهایێن x و y و z دیاربكە، ب مەرجەكی یەكسانبوونا ڕێزكرییان یا دروست بیت

$$\begin{bmatrix}3 & x\\ -2 & -8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}11 & -4\\ y & 12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & -10\\ 9 & z\end{bmatrix}$$

33 **شرۆڤەكرن نەیا دروستە** شاشیێ دیاربكە.

$$\begin{bmatrix}2 & 8\\ 4 & 7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & 3 & 0\\ 4 & 1 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 11 & 0\\ 8 & 8 & 9\end{bmatrix}$$

34 **بنڤیسە** ئەرێ لێدەركرنا ڕێزكرییان كردارەكا ئالۆگۆڕە؟ نموونەیەكێ بینە بۆ ڕوونكرنا بەرسڤێ.

35 $B=\begin{bmatrix}1 & 0.1 & 2\\ 1.5 & 2.1 & 0\end{bmatrix}$ ، $C=\begin{bmatrix}2 & 0.4 & 6\\ 6 & 6.4 & 0\end{bmatrix}$ کیژ بڕ دبیتە $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ ؟

أ) $2C-\frac{1}{2}B$ ب) $C-2B$ ج) $B-2C$ د) $2B-\frac{1}{2}C$

36 کیژ دەستەواژە هەردەم یا دروستە بۆ ڕێزکریێ E ژ پایا $m\times n$ ؟

أ) ژمارا دانەیێن وێ $m\times n$ ب) دانەیێ e_{nm} هەیە؟

ج) ژمارا دانەیێن وێ $m+n$ د) m ستوون و n ڕێز هەنە؟

37 بهایێ x چەندە کو پاسەدانا $8\begin{bmatrix}12 & 8\\ 2 & 7\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}48 & 32\\ 8 & 28\end{bmatrix}$ دکەت؟

أ) 0.25   ب) 0.5   ج) 2   د) 4

38 **بەرسڤەکا کورت** بهایێ x بینەدەر کو پاسەدانا $[2\ \ -2]-2[5\ \ -x]=[-8\ \ -1]$ دکەت.

لێنێرینەك بۆ پاش

39 **دراڤ** شیلانێ 36 پارچەیێن دراڤی ژ دوو جۆرێن هزار دیناری و 500 دیناری هەنە. بهایێ وی پارەی چەندە؟ ئەگەر ژمارا پارچەیێن ژ جۆرێ 500 دیناری دوو جارانێ ژمارا پارچەیێن ژ جۆرێ هزار دیناری بیت!

دیاربکە ئەرێ خالا پێدای دبیتە شیکار بۆ سیستەمێ دوو هاوکێشەیێ (پۆلێن پێشتر).

40 $(2, -2)$ ؛ $\begin{cases}x-y=4\\ 5x+6y=2\end{cases}$

41 $(4.5, 2)$ ؛ $\begin{cases}y=2\\ 2x-4y=1\end{cases}$

لێنێرینەك بۆ پێش

42 ڕێزکریێ B دیاربکە ئەگەر ئەڤ یەکسانبوونە یا دروست بیت.

$$3\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & -4\end{bmatrix}-2B=\begin{bmatrix}1 & 5\\ -2 & 2\end{bmatrix}$$

وانەیا **2**

سنووردار و ڕێسایا گرامەر

Determinants and Cramer's Rule

بۆچی

شارەزایێن خوارنا وەرزشڤانان پێدڤی ب شیکارکرنا سیستەمێ هاوکێشەیێن هێلی هەنە بۆ دیارکرنا وان برێن گەرموك ویرۆتین ودوهنی وکاربۆهیدراتی کو وەرزشڤانی پێدڤیاتی پێ هەیە د خوارنا خۆدا. (نموونە 4).

ئارمانج

- هەژمارتنا سنووردارێ ڕێزکریێ 2 × 2 یان 3 × 3 .
- شیکارکرنا سیستەمەکێ هێلی بکارئینانا ڕێسایا گرامەر.

زانایێن بیرکاریێ ڕێزکریێن چارگۆشەی وژماران جووت دکەن، ب جۆرەکی بەرامبەر هەر ڕێزکرییەکی چارگۆشەی ژمارەکا ڕاستی هەیە دبێژنێ **سنووردارێ ڕێزکریێ** Determinant . هێمایێ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ بکاردهێت بۆ نواندنا سنووردارێ ڕێزکریێ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. سنووردارێ ڕێزکری ڕۆلەکێ گرنگ هەیە، هەر وەکی ل ئایندە دیار دبیت.

سنووردارێ ڕێزکری 2 × 2 ، Delerminant 2 × 2

ب پەیڤان	ب ژمارەیان	ب جەبری
سنووردارێ ڕێزکری $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ Determinant دبیتە $ad - bc$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{matrix} + \\ - \end{matrix}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ $= (1)(4) - (3)(2) = -2$	$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{matrix} + \\ - \end{matrix}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ $= ad - bc$

زاراڤ

Vocabulary

سنووردار Determinant

ڕێزکریێ هاوکولکان

Cofficient matrix

ڕێسایا گرامەر

Cramer's Rule

نموونە 1

هەژمارتنا سنووردارێ ڕێزکریێ 2 × 2

سنووردارێ ڕێزکریێ بهەژمێرە

أ $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 6 \times 3 - 5 \times 8$$

$$= 18 - 40 = -22$$

ئەنجامێ لێکدانا هەردوو ناڤەندان دەربکە ژ ئەنجامێ لێکدانا هەردوو لایان.

سنووردارێ ڕێزکری دبیتە -22

ب $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \times 3 - \frac{2}{3}(-6) = 1 + 4 = 5$$

بزاڤێ بکە سنووردارێ ڕێزکریێ بهەژمێرە.

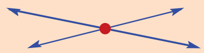
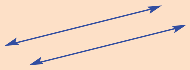
أ $\begin{bmatrix}0.2 & 30\\ -0.3 & 5\end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 3\\ \frac{5}{6} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$ ج $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{8}\\ 4 & 2\pi\end{bmatrix}$

تو دشێی سنووردااران بکاربینی بۆ شیکارکرنا سیستەمێ هاوکێشەیێن هێلی. بۆ شیکارکرنا سیستەمێ هێلی $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\ a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ دەستپێبکە بنڤیسینا ڕێزکریێ $\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{bmatrix}$ کو دبێژنێ ڕێزکریێ هاوکۆلکان Coefficient matrix ، و سنووردارێ وێ D هەژمار بکە. پاشی هەردوو سنووردااران $D_x=\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}$ و $D_y=\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}$ هەژمار بکە، پاشی ڕێسایا گرامەر بکاربینە.

ڕێسایا گرامەر بۆ سیستەمێ 2 × 2 — Cramers Rule

ئەگەر سنووردارێ ڕێزکریێ هاوکۆلکان D نە بیتە سفر، دێ سیستەمێ $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\ a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ و، بتنێ ئێک شیکار هەبیت، ئەو دبیتە $x=\frac{Dx}{D}$ $y=\frac{Dy}{D}$ دەمێ
$D_x=\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}$ ، $D_y=\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}$

تو دشێی سنووردارێن D و D_x و D_y بکاربینی دا بزانی ئەرێ سیستەمێ دیارکری (بتنێ ئێک شیکار هەیە) یان ستەمە (شیکار نینە) یان بێ سنوورە (ژمارەکا بێ دوماهیک یا شیکاران هەیە)، ل پۆلێنکرنا ل خوارێ وەسا دانە کو a_1 و b_1 نابنە سفر د هەمان دەمدا. و a_2 و b_2 نابنە سفر د هەمان دەمدا.

پۆلێنکرنا سیستەمێ دوو هاوکێشەیێن هێلی ب دوو نەزانراوان		
ئەگەر $D\neq0$ سیستەمێ سنووردارە هەیە.	ئەگەر $D=0$ و $D_x=D_y=0$ سیستەمی بێ سنوورە.	ئەگەر $D=0$ و $D_x\neq0$ یان $D_y\neq0$ سیستەمێ ستەمە.
		

نموونە 2

شیکارکرنا سیستەمێ هێلی 2 × 2 بکارئینانا ڕێسایا گرامەر.

ڤی سیستەمی هێلی بکارئینانا ڕێسایا گرامەر شیکاربکە:

أ $\begin{cases}x-y=3\\ 2x-y=-1\end{cases}$

پێنگاڤ 1 : سنووردارێ ڕێزکریێ هاوکۆلکان بهەژمێرە.

$$D=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1(-1)-2(-1)=1$$

سیستەمێ سنووردارە چونکی $D\neq0$

پێنگاڤ 2 : سنووردارێ D_x و D_y بهەژمێرە.

$$D_y = \begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix} = -7 \quad ، \quad D_x = \begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & -1\end{vmatrix} = -4$$

پێنگاڤ 3 : بهایێ x و y بهەژمێرە.

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-7}{1} = -7 \quad ؛ \quad x = \frac{D_x}{D} = \frac{-4}{1} = -4$$

سیستەمێ شیکارەکا بتنێ هەیە دبیتە $(-4, -7)$.

ب $\begin{cases} \mathbf{y - 2 = 3x} \\ \mathbf{3x - y = 7} \end{cases}$

پێنگاڤ 1 : سیستەمێ ب شێوەیێ گشتی بنڤیسە.

$$\begin{cases} 3x - y = -2 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$$

پێنگاڤ 2 : سنوورداری ڕێزکرییێ هاوکۆلکان بهەژمێرە.

$$D = \begin{vmatrix}3 & -1\\ 3 & -1\end{vmatrix} = 3(-1) - 3(-1) = 0$$

پێنگاڤ 3 : D_x بهەژمێرە.

$$D_x = \begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-2 & -1\\ 7 & -1\end{vmatrix} = 9$$

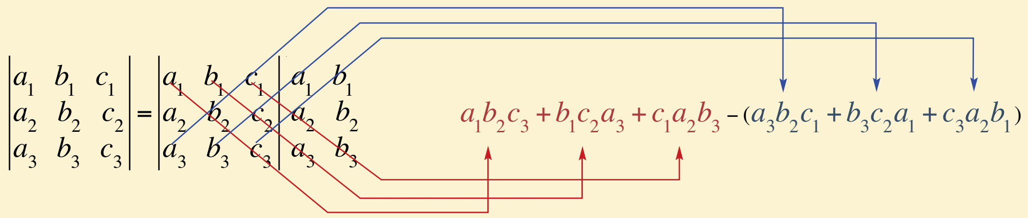
چونکی $D = 0$ و $D_x \neq 0$ ڤێجا سیستەم یێ ستەمە.

بزاڤێ بکە سیستەمێ شیکاربکە بکارئینانا ڕێسایا گرامەر. $\begin{cases} 6x - 2y = 14 \\ 3x = y + 7 \end{cases}$

دا تو بکاری ڕێسایا گرامەر بکاربینی بۆ شیکارکرنا سیستەمێ هێلی 3×3 ، دڤێت تو بشێی سنوورداری ڕێزکرییێ پایا 3×3 بهەژمێری. ئەڤ هێلکاری ل خوارێ ڕێیەکا بۆ وێ ئێکێ.

هەردوو ستوونێن ئێکێ ل لایێ ڕاستێ سنوورداری بنڤیسە.

ئەنجامێ لێکدانا ژمارەیێن تیرەیێن سور کۆمبکە، پاشی ئەنجامێن لێکدانێن ژمارێن تیرەیێن شین دەربکە.



نموونە 3

هەژمارتنا سنوورداری ڕێزکرییێ 3×3 .

سنوورداری ڕێزکرییێ $A = \begin{bmatrix}4 & -2 & 0\\ -3 & 10 & 1\\ 2 & 6 & -1\end{bmatrix}$ بهەژمێرە.

سنوورداری بنڤیسە، پاشی هەردوو ستوونێن ئێکێ ل ڕەخێ ڕاستێ سنوورداری بنڤیسە.

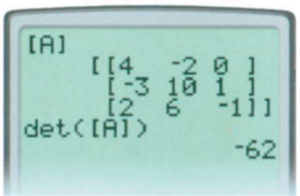
$$\begin{vmatrix}4 & -2 & 0\\ -3 & 10 & 1\\ 2 & 6 & -1\end{vmatrix}\begin{matrix}4 & -2\\ -3 & 10\\ 2 & 6\end{matrix}$$

$\begin{vmatrix}4&-2&0\\-3&10&1\\2&6&-1\end{vmatrix}\begin{matrix}4&-2\\-3&10\\2&6\end{matrix}$

پێنگاڤ 1 : ئەنجامێ لێکدانا ژمارێن هەر تیرەیەکی بەرەف خوار کۆمبکە.

$(4)(10)(-1)+(-2)(1)(2)+(0)(-3)(6)=-44$

پێنگاڤ 2 : ئەنجامێ لێکدانا ژمارێن هەر تیرەیەکێ بەرەف ژۆر کۆمبکە.



$(2)(10)(0)+(6)(1)(4)+(-1)(-3)(-2)=18$

پێنگاڤ 3 : سەرجەمێ دووێ ژ سەرجەمێ ئێکێ دەربکە.

$-44-18=-62$

سنووردارێ رێزکرێ A دبیتە -62 .

ساخبکە بژمێرا رووتکرنێ بکاربینە ئەگەر دشیاندابیت.

بزاڤێ بکە سنووردارێ رێزکرێ $A=\begin{bmatrix}2&-3&4\\5&1&-2\\10&3&-2\end{bmatrix}$ بهەژمێرە.

یا دشیاندایە رێسایا گرامەر بەرفرەهتر بکەن دا سیستەمێ هێلی 3×3 بخۆڤە بگریت.

رێسایا گرامەر بۆ سیستەمێ 3 × 3 — Cramers Rule 3 × 3

ئەگەر سنووردارێ رێزکرێ هاوکۆلکان نە بیتە سفر، دێ سیستەمی بتنێ ئێك شیکار هەبیت

وئەڤەنە: $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}$ $\quad x=\frac{D_x}{D}\quad y=\frac{D_y}{D}\quad z=\frac{D_z}{D}$

دەمێ $D=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}\quad D_x=\begin{vmatrix}d_1&b_1&c_1\\d_2&b_2&c_2\\d_3&b_3&c_3\end{vmatrix}\quad D_y=\begin{vmatrix}a_1&d_1&c_1\\a_2&d_2&c_2\\a_3&d_3&c_3\end{vmatrix}\quad D_z=\begin{vmatrix}a_1&b_1&d_1\\a_2&b_2&d_2\\a_3&b_3&d_3\end{vmatrix}$

ئەگەر $D\neq0$ ، دێ سیستەمی بتنێ ئێك شیکار هەبیت.

ئەگەر $D=0$ و $(D_x\neq0$ یان $D_y\neq0$ یان $D_z\neq0)$ دێ ئەو سیستەمێ ستەم بیت.

ئەگەر $D=0$ و $(D_z=D_y=D_x=0)$ دێ سیستەمێ بێ سنووربیت.

نموونە 4 بجهئینانا خوارنێ

ئێك ژ شارەزایێن خوارنێ کار دکەت لسەر دارشتنا سیستەمەکی خوارنێ بۆ یاریزانێن تەپا پێ. د ڤی سیستەمیدا دڤێت یاریزان 3600 گەرمۆکێن گەرمیێ و 750g خوارنێ رۆژانە بکاربینیت. دڤێت ئەو گەرمۆکێن گەرماتیێ کو ژێدەرێن وان پرۆتین و دوهن ببیتە 60% ژ سەرجەمێ گەرمۆکێن گەرماتیێ. چەند گرام ژ پرۆتین و کاربۆهێدرات و دوهنی بۆ ڤی سیستەمی دڤێن؟

گەرمۆکێن گەرمیێ د هەر گرامەکیدا

خوارن	گەرمۆك
پرۆتین	4
کاربۆهێدرات	4
دوهن	9

ئەڤ سیستەمێ خوارنێ پێکدهێت ژ p گرامێن پرۆتینێ و c گرام ژ کاربۆهێدرات و f گرام ژ دوهنی.

$4p+4c+9f=3600$

$p+c+f=750$ سەرجەمێ گەرمۆکێن گەرماتیێ بڕێ گشتی یێ خوارنێ

$4p+0c+9f=2160$ (گەرمۆکێن پرۆتین و دوهنی دبیتە $60\%(3600)=2160$)

$$Df=\begin{vmatrix}4&4&3600\\1&1&750\\4&0&2160\end{vmatrix}\text{، }Dc=\begin{vmatrix}4&3600&9\\1&750&1\\4&2160&9\end{vmatrix}\text{، }Dp=\begin{vmatrix}3600&4&9\\750&1&1\\2160&0&9\end{vmatrix}\text{، }D=\begin{vmatrix}4&4&9\\1&1&1\\4&0&9\end{vmatrix}=-20$$

$$f=\frac{Df}{D}=\frac{-2400}{-20}=120\text{ ، }c=\frac{Dc}{D}\frac{-7200}{-20}=360\text{ ، }p=\frac{Dp}{D}=\frac{-5400}{-20}=270$$

ئەڤ سیستەمە پێکدهێت ژ 270g پرۆتین و 360g کاربۆهێدرات و 120g دوهن.

بزاڤێ بکە **دێ چ بیت...** ؟ ئەگەر سیستەم ڕۆژانە پێدڤی بکاربرنا 3200 گەرمۆکێن گەرماتییێ و 700g خوارنێ هەبیت. دڤێت گەرمۆکێن گەرماتییێ ئەوێن ژێدەرێن وان کاربۆهێدرات 70% ژ سەرجەمێ گەرمۆکێن گەرماتییێ پێکبینن. چەند گرام ژ پرۆتین وکاربۆهێدرات و دوهنی بۆ ڤی سیستەمی دڤێن.

ڕاهێنان

بەردەوامبوون د بیرکارییێدا

1 بەحسێ سیستەمەکێ بێ سنوور بکە.

2 دەمێ ڕێسایا گرامەر بجهدئینن لسەر سیستەمەکێ هێلی دوو هاوکێشەیێن دوو نەزانراو. ئەرێ هەرسێ سنووردار دێ دچەوابن ئەگەر هاوکێشەیەك پێکهاتبیت ژ ئەنجامێ لێکدانا هاوکێشەیا دووێ دگەل ژمارەکێ.

3 **زاراڤ** ڕامانا وێ چییە ئەگەر دانەیەکێ ڕێزکریێ هاوکۆلکان سفر بیت؟

ڕاهێنانێن ئاراستەکری

سنووردارێ ڕێزکری بهەژمێرە.

4 $\begin{bmatrix}7&5\\9&2\end{bmatrix}$

5 $\begin{bmatrix}1.5&0.25\\6&2.5\end{bmatrix}$

6 $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{2}{3}\\\frac{3}{4}&-4\end{bmatrix}$

7 $\begin{bmatrix}-3&40\\-5&66\frac{2}{3}\end{bmatrix}$

ڕێسایا گرامەر بکاربینە بۆ شیکارکرنا سیستەمێ هێلی.

8 $\begin{cases}6x=2-y\\3x+1=2y\end{cases}$

9 $\begin{cases}4x+y+6=0\\8x+2y=9\end{cases}$

10 $\begin{cases}5x-2y=3\\2.5x-y=1.5\end{cases}$

11 $\begin{cases}2y=2-x\\-3x+6y=-9\end{cases}$

سنووردارێ ڕێزکری بهەژمێرە.

12 $P=\begin{bmatrix}1&2&-1\\4&0&1\\1&-2&3\end{bmatrix}$

13 $S=\begin{bmatrix}0&-5&-1\\4&1&6\\2&0.5&3\end{bmatrix}$

14 $E=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}$

15 **بکاربرن** شیلانێ 2kg فستەق و 1.5kg باهیڤ و 3kg بندەق کڕین. وێ 28 420 دینار وەك بهایێ وان دان. لێ هەڤالا وێ پەروینێ 39 390 دینار دان بۆ کڕینا 4.5kg فستەق و 2kg بندەق. بهایێ کیلۆگرامەکێ ژ هەر جۆرەکی چەندە؟ بۆ زانین بهایێ ئێك کیلۆگرام ژ باهیڤان یەکسانە دوو جارانی بهایێ کیلۆگرامەك ژ فستەقان وکیلۆگرامەك ژ بندەقان.

ڕاهێنان و بجهئینان

سنووردارێ ڕێزکری بهەژمێرە:

16 $\begin{bmatrix} 3 & -0.4 \\ 5 & 0.3 \end{bmatrix}$ **17** $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **18** $\begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & 8 \\ -\frac{1}{2} & 10 \end{bmatrix}$ **19** $\begin{bmatrix} r & -1 \\ -2r^2 & \pi r \end{bmatrix}$

ڕێسایا گرامەر بکاربینە بوٚ شیکارکرنا سیستەمێ هێلی.

20 $\begin{cases} 0.5x+6y=2 \\ 0.25x+3y=0.5 \end{cases}$ **21** $\begin{cases} x+2y=3.5 \\ 3x-y=2.7 \end{cases}$ **22** $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x+\frac{y}{2}=2 \end{cases}$ **23** $\begin{cases} 3y-x=7 \\ 2x+3y=-7 \end{cases}$

سنووردارێ ڕێزکری بهەژمێرە:

24 $A=\begin{bmatrix} 2.5 & 1.5 & 0 \\ 3.2 & 1 & -4 \\ 6.4 & -5 & 2.1 \end{bmatrix}$ **25** $L=\begin{bmatrix} -2.4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0.5 \\ 0 & 3.5 & 1 \end{bmatrix}$ **26** $W=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

27 **شوٚخی (ڕەشاقە)** ڤیان ژمارا وان دەمژمێرێن ڕاهێنانێ دکەت، و ژمارا وان گەرموٚکێن گەرماتییێ ئەوێن ڕوٚژانە بکار دبەت توٚمار دکەت. ڤیان چەند گەرموٚکان ل هەر دەمژمێرەکێ ل هەر جوٚرەکێ ڕاهێنانێ بکار دبەت ل دویڤ پێدایێن خشتەیێ بەرامبەر.

توٚمارا دەمژمێرێن ڕاهێنانێن ڤیانێ				
	سواربوونا پایسکلێ	تەپا سەرمێزێ	مەلەڤانی	گەرموٚکێن بکاربری
دووشەمب	1.5	1	0.75	1620
چوارشەمب	0.75		1	915
ئەینی	1	1.5		1320

28 **هزرکرنەکا ڕەخنەگر** بهایێ c دقێت چەندبیت هەتا سنووردارێ ڕێزکرییێ هاوکوٚلکان ل سیستەمێ $\begin{cases} 2x+y=6 \\ cy=3-x \end{cases}$ ببیتە سفر؟ ڕوونبکە تە چەوا هەژمارکر؟

29 **ئەنتەرنێت** مالپەرەکێ ئەنتەرنێتێ داخوازیا هەڵسەنگاندنا بابەتەکی کر، ب پێدانا خالەکێ یان دوو خالان یان 3 خالان. ژمارا وان کەسێن ب ڤێ هەڵسەنگاندنێ ڕابووین 38 کەس بوون. ژمارا وان کەسێن 3 خال داین دوو جارانێ ژمارا وان کەسێن ئێك خال داین بوو، ژمارا کەسێن ب هەر جوٚرەکێ هەڵسەنگاندنێ ڕابووین چەند بوو، ئەگەر بزانی کو ژمارا هەموو خالان 85 خال بوون؟

سنووردارێ ڕێزکری بهەژمێرە:

30 $A=\begin{bmatrix} x & x-1 \\ x+1 & x \end{bmatrix}$ **31** $B=\begin{bmatrix} x-2 & x+2 \\ x+2 & x+6 \end{bmatrix}$

32 **کانزایێن ب بها** پارچەکا پارەیێ بچووك ژ زیڤی بارستایا وێ 2.268g ، و پارچەکێ پارەیێ مەزن بارستایا وێ 5g . ئاراس 425 پارچە ژ هەردوو جوٚران هەنە و بارستایا وان 1483g بوو.

أ ئاراسی ژ هەر جوٚرەکی چەند پارچە هەنە؟

ب نرخێ زیڤی چەندە، ئەگەر بهایێ پارچێ بچووك 30000 دیناربیت و بهایێ پارچا مەزن 72000 دیناربیت؟

33 کۆمەڵەکا مرۆڤان ژ 6 مەزنان و 3 زارۆکان پێکهاتبوو، سەرەدانا باغچێ ئاژەلان کر 48000 دینار دان. و کۆمەڵەکا دی ژ دوو مەزنان و 10 زارۆکان پێکهاتبوو، 52000 دینار دان بۆ چوونا ژووری

نەزانراوێ x بکاربینە بۆ بهایێ پلێتا زارۆکان و y بۆ بهایێ پلێتا مەزنان.

أ سیستەمێ هاوکێشەیان بنڤیسە بۆ دەربرینا پرسیارێ.

ب ریزکریێ هاوکۆلکان بنڤیسە و سنووردارێ وێ بهەژمێرە.

ج پرسیارێ چەند شیکار هەنە؟

د رێسایا گرامەر بکاربینە بۆ هەژمارتنا بهایێ هەردوو نەزانراوان.

هـ بهایێ پلێتا چوونا ژووری بۆ مەزنان چەندە؟ و نرخێ پلێتا چوونا ژووری بۆ زارۆکان چەندە؟

34 چ وەسفکرن بۆ ئەڤێ سیستەمێ هێلی یا دروستە $\begin{cases} 3x = y - 1 \\ x + 2y = 16 \end{cases}$

أ بێ سنوور، ژمارەکا بێ سنوور یا شیکاران هەیە

ج ستەمە، گەلەك شیکار هەنە

ب ستەمە، شیکار نینە

د سنووردارە، بتنێ ئێك شیکار هەیە

35 کیژ ڤان رێزکریێن سنووردارێ وێ دبیتە 1 ؟

أ $\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

ب $\begin{bmatrix} 3 & -11 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

ج $\begin{bmatrix} -3 & 11 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

د $\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

36 **بەرسڤا کورت** بهایێ x بهەژمێرە ئەگەر $\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 25$

لێنێرینەك بۆ پاش

37 **بکاربرن** 135000 دینار ل گەل سارایێ هەبوون، چو دوکانەکا پێلاڤێن ئافرەتان، پێلاڤەك دیت، داشکاندن ب رێژا 25% لسەر بهایێ وێ بوو. لاسەنگەیەکێ بنڤیسە کو بهایێ بنەرەت یێ پێلاڤێ پاسەدان بکەت، بۆ زانین سارایێ پێلاڤ کری.

سیستەمێ ڤان هاوکێشەیان ب رێیا لجهدانانێ شیکاربکە.

38 $\begin{cases} x = \frac{1}{3}y \\ 6x - 6y = 16 \end{cases}$

39 $\begin{cases} x + y = -5 \\ 2x - y = -7 \end{cases}$

40 $\begin{cases} 2x = y \\ 4x + y = -2 \end{cases}$

لێنێرینەك بۆ پێش

41 **شارستانی** بۆ دانانا پەیکەرەکی ل گۆرەپانا شارەکی، کو ژ دوو بەشان پێکهاتبوو، باکوور وباشوور، راپرسینەك لناڤ ئاکنجیێن باژێری هاتە ئەنجامدان. خشتێ بەرامبەر پۆختێ ئەنجامێن راپرسینێ ب رێژا سەدی دیار دکەت. ئەرێ ل بەشێ باشووری چەند هاوولاتیان دەنگێ خۆ دایە، ئەگەر بزانی ژمارا دەنگدەران 4826 کەس بوون.

ئەنجامێن راپرسینێ		
بەش	ل گەل دانانێ	دژێ دانانێ
باکوور	47%	53%
باشوور	85%	15%
سەرجەم	49%	51%

جیاکاری (جوداکاری)

Differential

بەشێ

6

وانە

1. داتاشراوێ ئێکێ
2. داتاشراوێ دووێ
3. بجهئینانێن داتاشراوێ

لەز چییە؟

جیاکاری بکاردهێت بۆ هەژمارتنا لەزا تەنەکێ لڤوك د هەر دەمەکێ ڤاندنێدا.

وانەیا 1

1 داتـاشراو

1 Derivative

بۆچی

ئابووری ناس داتاشراویٚ بکاردئینن وەك ئامیرەك ژ ئامیریٚن ڕاڤەکرنا ئابووری.

ئارمانج

- دەرئینانا داتاشراویٚ نەخشیٚ بکارئینانا ڕیٚساییٚن ئیٚکیٚ ییٚن داتاشینیٚ.

زاراڤ
Vocabulary

لاری	Slope
داتاشراو	Derivative
داتاشراویٚ ئیٚکیٚ	First derivative
داتاشراویٚ دوویٚ	Second derivative

ئابووری ناس بیرکاریٚ بکاردئینن بۆ دیارکرنا هندەك سامپلان کو ئەو هاریکاریٚ دکەن بۆ ئەنجامدانا لیٚکۆلینیٚ لسەر چالاکییٚن جیاوازیٚن ئابووریٚ وەك بەرهەم، فرۆتن، قازانج ... هتد بۆ نموونە ئەگەر دەزگەهەکی وەربگرین کو جۆرەکی ژ ئامیریٚن سادە دروستبکەت وهەولبدیٚن سامپلەکیٚ بۆ تیٚچوویا بەرهەمی دیار بکەین، دیٚ بینین کو تیٚچوویا بەرهەمی ژ دوو بەشان پیٚکدهیٚت: بەشەکیٚ نەگۆڕە ئەو ناهیٚتە گوهۆڕین هەر چەند بەرهەم بهیٚتە گوهۆڕین، وبەشەکیٚ گۆڕاو ئەو دهیٚتە گوهۆڕین ب گوهۆڕینا بڕیٚ بەرهەمی. هیٚمیایٚ F بۆ بەشیٚ نەگۆڕ وهیٚماییٚ x بۆ ژمارا یەکەییٚن بەرهەمی دادنین. ئەگەر تیٚچوویا ئیٚك یەکیٚ m بیت دیٚ شیٚین بنڤیسین $C = mx + F$ کو C تیٚچوویا بەرهەمیٚ گشتیە.

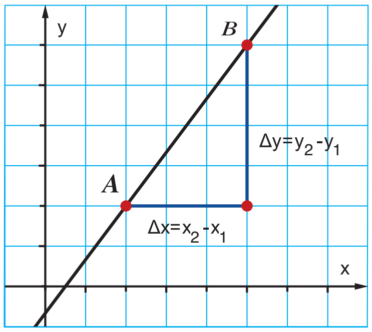
ئەگەر بەرهەمیٚ 100 یەکان 500 000 دینـاربن، ئەریٚ کارتیٚکرنا بەرهەمئینانا یەکەیەکا زیٚدە چەندە لسەر تیٚچوویا گشتی؟ یا ئاشکەرایە کو بەرهەمئینانا یەکەیەکا زیٚدە تیٚچوویا بەرهەمیٚ گشتی ب بڕیٚ 5000 دیناران زیٚدە دکەت، ئابووری ناس دبیٚژنە ڤیٚ زیٚدەبوونیٚ پەراویٚزیٚ تیٚچوویا بەرهەمی.

ل نموونەیا پیٚشتر پەراویٚزیٚ تیٚچوویا بەرهەمی ئاماژە ب تیٚچوویا یەك یەکەیا بەرهەمی m دکەت، لیٚ نە بتنیٚ ئەڤ جۆریٚ بەرهەمئینانیٚ هەیە، چیٚدبیت سامپلیٚ بیرکاری بۆ تیٚچوویا بەرهەمیٚ گشتی نەخشەیەکا نەهیٚلی بیت (دووجای بیت بۆ نموونە). ل ڤی بەشی دیٚ فیٚری هندەك چەمك وشارەزاییان بی کو ئەو دیٚ هاریکاربن بۆ شیکارکرنا ڤیٚ پرسیاریٚ وچەند جۆریٚن پرسیاریٚن دی.

ئەگەر ئەم ڤەگەریٚنە پرسیارا پیٚشتر، دیٚ بینین کو پەراویٚزیٚ تیٚچوویا بەرهەمی دبیتە m لاریٚ ڕاستەهیٚلیٚ $C = mx + F$ ، کو C دبیتە سامپلیٚ تیٚچوویا گشتی یا بەرهەمی، وچیٚدبیت پەراویٚزیٚ تیٚچوویا بەرهەمی بهیٚتە نڤیسین لسەر شیٚوەییٚ ڕیٚژا گوهۆڕینا تیٚچوویا بەرهەمی بۆ گوهۆڕینا بڕیٚ بەرهەمی. ئانکو

$$m = \frac{C_2 - C_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

هیٚماییٚ $\triangle$ هیٚمایەکیٚ یۆنانییە دهیٚتە خواندن دەلتا.



ئەگەر بەریٚ خۆ بدەیە ویٚنەییٚ بەرامبەر، دیٚ ڕاستەهیٚلەکیٚ بینی کو د هەردوو خالیٚن A و B ڕادبۆریت.

لاریٚ وی ڕاستەهیٚلی m دبیتە $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

ئانکو دبیتە ڕیٚژەیا گوهۆڕینا y بۆ گوهۆڕینا x .

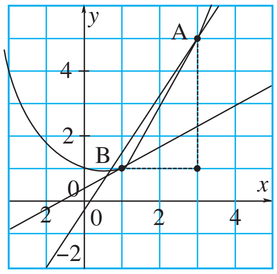
ولاری هەر دیٚ ئەو بیت ئەگەر A و B هەر چ دوو خال بن لسەر ڕاستەهیٚلی.

ئەریٚ تە پرسیار کریە کو لاریٚ چەماوەیەکی چییە وەك ویٚنەییٚ ڕوونکرنیٚ $y = x^2$ ؟

دشیاندا نینە لاری وێنەیێ ڕوونکرنا $y = x^2$ بە ڤێ ڕێکێ پێناسە بکەن. چونکی ئەو چەماوەیە و نە ڕاستەهێلە. لێ بیرکارێ زانەیان ئەڤ ئاریشە و لاری گەلەك نەخشەیێن دی چارەسەرکرن، ب ڕێیا پێناسەکرنا لاری لنك هەر خالەکێ ژ خالێن نەخشەیێ.

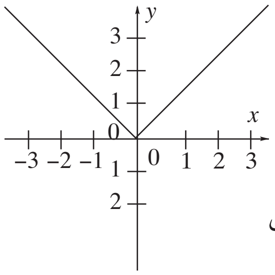
لاری نەخشەیێ لنك خالەکێ ژ خالێن وێنەیێ ڕوونکرنا وێ

- لاری نەخشەیێ یان لاری چەماوەیێ نەخشەیێ لنك خالا B ژ خالێن وێ دبیتە لاری لێکەفتێ چەماوەی د وێ خالێدا.



بۆ ڕوونکرنا ڤێ پێناسێ، بیرکاری زانا ژ خالا B و ژ خالا A کو یا نێزیکە بۆ وێ لسەر وێنەیی، دوو ڕاستەهێلان دکێشن، ئێك د هەردوو خالاندا دبۆریت ولێکەفتیێ چەماوە ل خالا B دکێشن (بەرێ خۆ بدە وێنەیێ بەرامبەر).

مەگرتی کو خالا B یا نەگۆڕە، و خالا A دلڤیت لسەر چەماوەیێ نەخشەیێ، ئەگەر وەسا دانی کو خالا A دلڤیت لسەر چەماوەی ونێزیك دبیت بۆ خالا B ، دێ بینی کو ڕاستەهێلێ AB نێزیك دبیت بۆ لێکەفتێ چەماوەی و دگەل جووت دبیت ب نێزیکی. و ب ڤێ دەربڕینێ ئەم دشێین بێژین کو لێکەفت ل دوماهیێ دبیتە ڕاستەهێلێ AB ، دەمێ A بۆ B نێزیك دبیت، ئەڤە پێناسەیا بیرکاری زانا بۆ لاری نەخشا f لنك خالا B ڕوون دکەت.



ئەری هەموو نەخشەیان لاری هەیە لنك هەر خالەکێ ژ خالێن چەماوەیێ وێ؟ بەرسڤ : نەخێر.

ئەگەر تو بەرێ خۆ بدەیە چەماوەیێ نەخشەیا $f(x)=|x|$ دێ بینی کو لێکەفت نینە بۆ چەماوەی لنك خالا $(0, 0)$، بۆ مە دیار دبیت کو لاری ڤێ نەخشەی پێناسە نەکریە لنك خالا بنەڕەت. لێ زۆربەی وان نەخشەیێن تو وەربگری لاری هەنە لنك هەر خالەکێ ژ خالێن وان.

داتاشراوێ نەخشەیێ

- داتاشراوێ نەخشەیا f دبیتە f' کو هەر بهایەکی ژ بهایێن x دگەل لاری نەخشەی گرێدەدت لنك خالا $(x, f(x))$، ئەگەر یا پێناسەکری بیت.

چەوا داتاشراوێ نەخشەی دئینیەدەر؟

بۆ دیارکرنا داتاشراوێ نەخشەیێ بیرکاری زانان چەند ڕێسایەك دانان، و دروستیا وان سەلماندن. ل ڤێ بەشی دێ فێری ڤان ڕێسایان بی، و دێ چەوا بکارئینی.

ڕێسایا داتاشراوا نەخشەیا نەگۆڕ

- نەخشەیا نەگۆڕ نەخشەیەکە هاوکێشا وێ دهێتە نڤیسین لسەر شێوەیێ $f(x)=c$ کو c ژمارەکا ڕاستییە. داتاشراوێ نەخشەیا نەگۆڕ $f(x)=c$ دبیتە $f'(x)=0$.

نموونە 1 دەرئینانا داتاشراویێ نەخشەیا نەگۆڕ

داتاشراویێ نەخشەیا $f(x)=-3$ بینەدەر.

شیکار

تو دشێی ل دویڤ ڕێسایا داتاشراویێ نەخشەیا نەگۆڕ بنڤیسی 0 = $f'(x)$.

بزاڤێ بکە داتاشراویێ نەخشەیا $f(x)=\sqrt{3}$ ، بینەدەر.

ڕێسایا داتاشراویێ نەخشەیا هێلی

• داتاشراویێ نەخشەیا هێلی $f(x)=ax+b$ دبیتە $f'(x)=a$.

نموونە 2 داتاشراویێ نەخشەیا هێلی

داتاشراویێ نەخشەیا هێلی $f(x)=\pi x-\sqrt{2}$ بینەدەر.

شیکار

تو دشێی ل دویڤ ڕێسایا داتاشراویێ نەخشەیا هێلی داتاشراویێ وێ بنڤیسی $f'(x)=\pi$.

بزاڤێ بکە داتاشراویێ نەخشەیا $f(x)=-\frac{3}{5}x+\frac{2}{3}$ بهەژمێرە.

نەخشەیا توانی نەخشەیەکا لسەر شێوێ $f(x)=x^n$ دهێتە نڤیسین کو n ژمارەیەکا تەواوا مووجەبە.

ڕێسایا داتاشراویێ نەخشەیا هێزێ

• داتاشراویێ نەخشەیا $f(x)=x^n$ دبیتە $f'(x)=nx^{n-1}$.

نموونە 3 دەرئینانا داتاشراویێ نەخشەیا هێزێ

داتاشراویێ نەخشەیا توانی $f(x)=x^5$ بهەژمێرە.

شیکار

ل دویڤ ڕێسایا داتاشراویێ نەخشەیا هێزێ کو دبیتە $f'(x)=5x^{5-1}=5x^4$.

بزاڤێ بکە داتاشراویێ نەخشەیا $f(x)=x^{12}$ بهەژمێرە.

تو دشێی ڕێسایا نەخشەیا هێزێ بەرفرەه بکە بۆ نەخشەیا $f(x)=x^p$ ئەگەر P ژمارەکا ڕێژەیی یا سالب یان مووجەب بیت.

بەرفرەهکرنا ڕێسایا داتاشراویێ نەخشەیا هێزێ

• داتاشراویێ نەخشەیا $f(x)=x^p$ کو P ژمارەیەکا ڕێژەییە دبیتە نەخشەیا $f'(x)=px^{p-1}$.

نموونە 4

دیارکرنا داتاشراویٚ نەخشەیا هیٚزیٚ

داتاشراویٚ نەخشەیا: أ $f(x)=\frac{1}{x}$ ب $g(x)=\sqrt{x}$

بهەژمیٚره.

شیکار

هەر نەخشەیەکیٚ لسەر شیٚوەییٚ نەخشەیا هیٚزیٚ بنڤیسە.

$$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1} \quad \text{و} \quad g(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$$

تو دشێی ل دویڤ بەرفرەهکرنا ڕێسایا داتاشراویٚ نەخشەیا هیٚزیٚ بنڤیسی.

$$f'(x)=(-1)x^{-1-1}=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2} \qquad g'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

بزاڤیٚ بکە داتاشراویٚ نەخشەیا $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ بهەژمیٚره.

ڕێسایا داتاشراویٚ ئەنجامیٚ لیٚکدانیٚ نەخشەیەکا هیٚزیٚ ل ژمارەکا ڕاستی

- داتاشراویٚ نەخشەیا $g(x)=af(x)$ دبیتە $g'(x)=af'(x)$.

نموونە 5

هەژمارتنا داتاشراویٚ ئەنجامیٚ لیٚکدانا نەخشەیا هیٚزیٚ ل ژمارەکا ڕاستی

داتاشراویٚ نەخشەیا $f(x)=-5\sqrt[5]{x^3}$ بهەژمیٚره.

شیکار

نەخشیٚ لسەر شیٚویٚ ئەنجامیٚ لیٚکدانا نەخشەیا هیٚزیٚ ل ژمارەکا ڕاستی بنڤیسە. ل دویڤ ڕێسایا داتاشراویٚ ئەنجامیٚ لیٚکدانا نەخشەیا هیٚزیٚ ل ژمارەکا ڕاستی تو دشێی بنڤیسی.

$$f(x)=-5\sqrt[5]{x^3}=-5x^{\frac{3}{5}} \text{ ،} \quad f(x)=-5\left(x^{\frac{3}{5}}\right)\Longrightarrow f'(x)=-5\left(\frac{3}{5}\right)\left(x^{\frac{3}{5}-1}\right)=-3x^{-\frac{2}{5}}=-3\frac{1}{x^{\frac{2}{5}}}=\frac{-3}{\sqrt[5]{x^2}}$$

بزاڤیٚ بکە داتاشراویٚ نەخشەیا $f(x)=\frac{-4}{x^5}$ بهەژمیٚره.

چونکی داتاشراویٚ نەخشەیەکیٚ دبیتە نەخشەیەکا دی، ڤیٚجا یا دشیاندایە داتاشراویٚ ویٚ بینیەدەر، دبیٚژنە داتاشراویٚ نەخشیٚ داتاشراویٚ ئێکیٚ ودبیٚژنە داتاشراویٚ داتاشراویٚ دوویٚ.

داتاشراویٚ دوویٚ

- داتاشراویٚ دوویٚ بۆ نەخشەیا f ، دبیتە داتاشراویٚ داتاشراویٚ ویٚ و دنڤیسین f^n

ئانکو f'' $\qquad f''(x)=(f')'(x)$

نموونە 6 دەرئینانا داتاشرایێ ئێکێ و داتاشراوێ دووێ

داتاشراوێ ئێکێ و داتاشراوێ دووێ بۆ نەخشەیا $f(x)=\frac{x^3}{6}$ بینەدەر.

شیکار

نەخشێ لسەر شێوەیێ ئەنجامێ لێکدانا نەخشەیێ ل گەل ژمارەکا ڕاستی بنڤیسە.

$$f(x)=\frac{x^3}{6}=\frac{1}{6}x^3$$

تو دشێی لدویف ڕێسایا داتاشراوێ ئەنجامێ لێکدانا نەخشەیا هێزێ ل ژمارەکا ڕاستی، و ڕێسایا داتاشراوێ نەخشەیا هێزێ بنڤیسی.

$$f'(x)=\frac{1}{6}(x^3)'=\frac{1}{6}(3)\left(x^{3-1}\right)=\frac{1}{2}x^2$$

$$f''(x)=\left(\frac{1}{2}x^2\right)'=\frac{1}{2}(x^2)'=\frac{1}{2}(2)(x^{2-1})=x$$

بزاڤێ بکە داتاشراوێ ئێکێ و داتاشراوێ دووێ بۆ نەخشەیا $f(x)=\frac{-4}{x^5}$ بهەژمێرە.

ڕاهێنان

بەردەوامبوون د بیرکاریێدا

1 جیاوازیێ لناڤبەرا لارێ نەخشەیا هێلی ولارێ نەخشەیا نەهێلی دیاربکە.

2 بەحسێ پێناسا لارێ نەخشەیەکێ بکە لنك خالەکێ ژ خالێن چەماوەیێ وێ.

ڕاهێنانێن ئاڕاستەکری

داتاشراوێ هەر نەخشەیەکێ بینەدەر.

3 $f(x)=-\sqrt{5}$

4 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

5 $f(x)=\frac{5}{8}$

6 $f(x)=0$

7 $f(x)=3x-4$

8 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{3}x-\frac{5}{6}$

9 $f(x)=x$

10 $f(x)=x^{11}$

11 $f(x)=\frac{1}{x^3}$

12 $f(x)=\sqrt{x^5}$

13 $f(x)=\sqrt[4]{x^3}$

14 $f(x)=-\frac{1}{x^{11}}$

15 $f(x)=-\frac{1}{x^{-3}}$

16 $f(x)=3x+5$

17 $f(x)=3\sqrt{x}-4$

18 $f(x)=\frac{3}{x^4}$

ڕاهێنان و بجهئینان

داتاشراوێ هەر نەخشەیەکێ بهەژمێرە.

19 $f(x)=3x^{\frac{2}{5}}$

20 $f(x)=3x^2$

21 $f(x)=\frac{9}{x^5}$

22 $f(x)=\frac{9}{\sqrt{x}}$

23 $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt[3]{x}$

24 $f(x)=2\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$

25 $f(x)=\frac{3x^2}{4}$

26 $f(x)=\frac{2}{3\sqrt{x}}$

27 $f(x)=9x^{-5}$

28 $f(x)=\frac{6}{\sqrt[3]{x}}$

29 $f(x)=x\sqrt{x}$

30 $f(x)=\frac{1}{2x^2\sqrt{x}}$

31 داتاشراویٚ ئێکیٚ و دوویٚ بۆ ڤی نەخشەی $f(x)=\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$ بینەدەر.

32 داتاشراویٚ ئێکیٚ و دوویٚ بۆ ڤی نەخشەی $f(x)=\frac{x^6}{6}$ بینەدەر.

لێنێرینەك بۆ پاش

33 هاوکێشا وی ڕاستەهێلیٚ د ڤان هەردوو خالانرا $(0, 1)$ و $(3, 3)$ دبۆریت بنڤیسە.

34 سیستەمیٚ ڤان هەردوو هاوکێشەیێن هێلی شیکاربکە $\begin{cases}2x=3y-3\\2x+y=5\end{cases}$.

35 سیستەمیٚ پێشتر شیکاربکە بکارئینانا ڕێزکرییان.

لێنێرینەك بۆ پێش

36 داتاشراویٚ ڤان هەردوو نەخشەیان بینەدەر $f(x)=x^3$ و $g(x)=\sqrt{x^3}$.

37 هەردوو نەخشەیێن پرسیارا پێشتر بکاربینە. نەخشەیا $h(x)=f(x)g(x)$ و نەخشەیا $k(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ بنڤیسە.

لسەر شێوێ هێزەکیٚ ژ هێزێن x، داتاشراویٚ نەخشەییٚ h بینەدەر وئەوا بدەست تە کەفتی ل گەل نەخشەیا k بەراورد بکە.

چ دەرئەنجام دکەی دەربارەی داتاشراویٚ $f(x)g(x)$ ؟

وانەیا 2

داتاشراویێ دوویێ

2 Derivative

بۆچی

داتاشراویێ ئێکێ و دوویێ بکاردئینن بۆ ڤەکۆلینا بزاڤا تەنەکێ لڤۆك لسەر ڕاستەهێلەکی.

ئارمانج

- دەرئینانا داتاشراویێ نەخشەیێ بکارئینانا ڕێسایێن داتاشراویێ.

ل وانەیا پێشتر تو فێری هندەك ڕێسایێن داتاشراویێ بوویی، و ل ڤێ وانێ دێ فێری هندەك ڕێسایێن دی بی کو هاریکاریا تە بکەن بۆ دیارکرنا داتاشراوێن نەخشەیێن بەرفرەهتر وئالۆزتر.

ئەو ڕێسایێن داتاشراویێ کو د ڤێ وانێدا فێردبیێ دگرێداینە ل گەل وان کردارێن ئەنجامددەی لسەر نەخشەیان، وەکی کۆمکرن ولێدەرکرن ولێکدان ودابەشکرنێ. ئەگەر f و g دوو نەخشەیێن تو بشێی کۆمبکە وەك سەرجەم $f+g$ ئەو دبیتە نەخشەیەکا پێناسەکری ب ڤێ هاوکێشەیێ: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ و تو دشێی جیاوازیێ لناڤبەرا وان بنڤیسی وەك $f-g$ کو دبیتە نەخشەیەکا پێناسەکری ب ڤێ هاوکێشەیێ: $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

ڕێسایا داتاشراویێ سەرجەم یان جیاوازیا دوو نەخشەیان

- داتاشراویێ سەرجەم یان جیاوازیا دوو نەخشەیان ب ڤێ ڕێسایێ ل خوارێ دهێتە ئەنجامدان:

$$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$$

یان $(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)$

نموونە 1 **هەژمارتنا داتاشراویێ سەرجەمێ دوو نەخشەیان**

داتاشراویێ نەخشەیا $h(x)=3x^2-5x+4$ بهەژمێرە.

شیکار

ل دەستپێکێ نەخشەیا h وەك سەرجەمێ هەردوو نەخشەیان f و g بنڤیسە.

ئەگەر $f(x)=3x^2$ و $g(x)=-5x+4$ بیت، دێ $h(x)=(3x^2)+(-5x+4)=f(x)+g(x)$

لدویڤ ڕێسایا داتاشراویێ سەرجەمێ دوو نەخشەیان $h'(x)=f'(x)+g'(x)$ چونکی $f'(x)=6x$ و $g'(x)=-5$ دێ $h'(x)=6x-5$.

بزاڤێ بکە داتاشراویێ نەخشەیا $f(x)=5x^4+3x-\sqrt{3}$ بهەژمێرە.

نموونە 2

هەژمارتنا داتاشراوێ جیاوازیا دوو نەخشەیان.

داتاشراوێ نەخشەیا $h(x)=3x^2-5x+4$ بهەژمێرە.

شیکار

ل دەستپێکێ نەخشەیا h لسەر شێوەیێ دوو نەخشەیان f و g بنقیسە کو $f(x)=3x^2$ و $g(x)=5x-4$

دێ $h(x)=(3x^2)-(5x-4)=f(x)-g(x)$

لدویف ڕێسایا داتاشراوێ جیاوازیا دوو نەخشەیان $h'(x)=f'(x)-g'(x)$ ، $f'(x)=6x$

و $g'(x)=5$ ، $h'(x)=6x-5$.

هەوڵبدە داتاشراوێ نەخشەیا $f(x)=2x^3-3x-5$ بهەژمێرە.

ئەگەر f و g دوو نەخشەبن وتو بشێی لێکبدەی وەك ئەنجامێ لێکدانا دوو نەخشەیان f, g ئەوە دبیتە نەخشەیەکا پێناسەکری ب ڤێ هاوکێشەیا ل خوارێ:

$$(fg)(x)=f(x)\times g(x)=f(x)g(x)$$

ڕێسایا داتاشراوێ ئەنجامێ لێکدانا دوو نەخشەیان

- داتاشراوێ ئەنجامێ لێکدانا دوو نەخشەیان ب ڕێسایا ل خوارێ دهێتە ئەنجامدان:

$$(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

نموونە 3

هەژمارتنا داتاشراوێ ئەنجامێ لێکدانا دوو نەخشەیان.

داتاشراوێ نەخشەیا $h(x)=\frac{1}{x}(x^2+3)$ بهەژمێرە.

شیکار

ل دەسپێکێ نەخشەیا h لسەر شێوەیێ لێکدانا f و g بنقیسە کو $f(x)=\frac{1}{x}$ ، $g(x)=x^2+3$

$$h(x)=\frac{1}{x}(x^2+3)=f(x)g(x)$$

داتاشراوێ هەر نەخشەیەکێ بینەدەر:

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'=\left(x^{-1}\right)'=(-1)\left(x^{-2}\right)=-\frac{1}{x^2}$$

$$g'(x)=\left(x^2\right)'+(3)'=(2x)+(0)=2x$$

تو دشێی لدویف ڕێسایا داتاشراوێ ئەنجامێ لێکدانا دوو نەخشەیان بنقیسی.

$$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

چونکی $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ و $g'(x)=2x$ ڤێجا

$$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2+3\right)+\left(\frac{1}{x}\right)(2x)$$

یان

$$h'(x)=\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2+3\right)+\left(\frac{1}{x}\right)(2x)=-1-\frac{3}{x^2}+2=1-\frac{3}{x^2}$$

تو دشێی هەردوو نەخشەیان لێکبدەی پاشی داتاشراویٚ بینەدەر.

$$h(x) = \frac{1}{x}(x^2+3) = x + \frac{3}{x} = x + 3\frac{1}{x}$$

$$h'(x) = \left(x + 3\frac{1}{x}\right)' = (x)' + \left(3\frac{1}{x}\right) = 1 + 3\left(\frac{1}{x}\right)' = 1 + 3\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{3}{x^2}$$

بزاڤیٚ بکە داتاشراویٚ نەخشەیا $f(x) = (x^2+5)\sqrt{x}$ بینەدەر.

ئەگەر f و g دوو نەخشەبن وتو بشێی لسەر شێویٚ ئەنجامیٚ دابەشکرنیٚ $\frac{f}{g}$ بنڤیسی ئەو دبیتە نەخشەیەکا پێناسەکری ب ڤیٚ هاوکێشا ل خواریٚ:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{دەمیٚ } g(x) \neq 0$$

ڕێسایا داتاشراویٚ ئەنجامیٚ دابەشکرنا دوو نەخشەیان

• داتاشراویٚ ئەنجامیٚ دابەشکرنا دوو نەخشەیان ب ڤیٚ ڕێسایا ل خواریٚ دهێتە ئەنجامدان.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

نموونە 4 هەژمارتنا داتاشراویٚ ئەنجامیٚ دابەشکرنا دوو نەخشەیان.

داتاشراویٚ نەخشەیا $h(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ بهەژمێرە.

شیکار

ل دەستپێکیٚ نەخشەیا h لسەر شێوەیێ ئەنجامیٚ دابەشکرنا دوو نەخشەیان f و g بنڤیسە $f(x) = x^2 - 1$ ، $g(x) = x^2 + 1$ داتاشراوایٚ هەردوو نەخشەیان f و g بهەژمێرە.

$$h(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$f'(x) = (x^2-1)' = (x^2)' - (1)' = (2x) - (0) = 2x$$

$$g'(x) = (x^2+1)' = (x^2)' + (1)' = (2x) + (0) = 2x$$

لدویڤ ڕێسایا ئەنجامیٚ دابەشکرنا دوو نەخشەیان

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

چونکی $f'(x) = 2x$ و $g'(x) = 2x$

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} = \frac{(2x)(x^2+1) - (x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{(2x)(x^2+1) - (x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x\left(x^2+1-(x^2-1)\right)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

بزاڤیٚ بکە داتاشراویٚ نەخشەیا $f(x) = \frac{x^2-2}{x+1}$ بهەژمێرە.

گەلەك نەخشە هەنە لسەر شێوەیێ هێزا نەخشەكا دی دهێتە نڤیسین، بۆ نموونە $f(x)=\left(x^2+1\right)^4$
ئەڤە دبیتە هێزەك ژ هێزێن نەخشەیا $u(x)=x^2+1$ كو لسەر شێوێ $f(x)=\left[u(x)\right]^4$.

ڕێسایا داتاشراویێ هێزا نەخشەكێ (نەخشەیا نەخشێ)

- ئەگەر نەخشەیا f هێزەك بیت ژ هێزێن نەخشەیا u ، ئانكو $f(x)=\left[u(x)\right]^p$ دەمێ p ژمارەكا ڕێژەیی بیت، دێ داتاشراویێ نەخشێ ب ڕێسایا ل خوارێ هێتە ئەنجامدان:

$$f'(x)=pu'(x)\left[u(x)\right]^{p-1}$$

نموونە 5 هەژمارتنا داتاشراویێ هێزا نەخشەیێ.

داتاشراویێ هەر نەخشەیەكێ بینەدەر.

أ $f(x)=(x^2+1)^4$ ب $f(x)=\dfrac{1}{x^3+2x+1}$ ج $f(x)=\sqrt{x^2-x+2}$

شیكار

ل دەستپێكێ نەخشەیێ لسەر شێوەیێ هێزا نەخشەكا دی بنڤیسە ب دیاركرنا $u(x)$ و $u'(x)$ و p

أ $u(x)=x^2+1$ $u'(x)=2x$ $p=4$ ژ ڤێ دێ دیاربیت كو:

$$f'(x)=pu'(x)\left[u(x)\right]^{p-1}=4(2x)\left(x^2+1\right)^3=8x\left(x^2+1\right)^3$$

ب $u(x)=x^3+2x+1$ $u'(x)=3x^2+2$ $p=-1$ ژ ڤێ دێ دیاربیت كو:

$$f'(x)=pu'(x)\left[u(x)\right]^{p-1}=(-1)(3x^2+2)\left(x^3+2x+1\right)^{-2}=\frac{-3x^2-2}{\left(x^3+2x+1\right)^2}$$

ج $u(x)=x^2-x+2$ $u'(x)=2x-1$ $p=\frac{1}{2}$ ژ ڤێ دێ دیاربیت كو:

$$f'(x)=pu'(x)\left[u(x)\right]^{p-1}=\frac{1}{2}(2x-1)\left(x^2-x+2\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+2}}$$

بزاڤێ بكە داتاشراویێ هەر نەخشەیەكێ بینەدەر.

أ $f(x)=(x^3+4x^2+2)^5$ ب $f(x)=\dfrac{1}{x^4+2x^2+2}$ ج $f(x)=\sqrt{x^6-2}$

ڕاهێنان

بەردەوامبوون د بیركارییێدا

1 ڕوونبكە چەوا ڕێسایێن داتاشراویێ سەرجەمی، داتاشراوا لێكدان ل ژمارەكا ڕاستی، و داتاشراویێ هێزێ بكاردئینی بۆ دیاركرنا داتاشراویێ نەخشەیا هێڵی $f(x)=ax+b$ كو ئەو دبیتە $f'(x)=a$.

2 ڕێسایێن داتاشراویێ بكاربینە بۆ دیاركرنا داتاشراویێ نەخشەیا دووجای $f(x)=ax^2+bx+c$ كو ئەو دبیتە $f'(x)=2ax+b$.

راهێنانێن ئاراستەكرای

داتاشراوێ هەر نەخشەیەكێ بهەژمێرە.

3 $f(x)=5x^2+\frac{2}{x^3}$

4 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

5 $f(x)=2x^3-\frac{1}{x^2}+5$

6 $f(x)=(x^2+2x)\sqrt{x+1}$

7 $f(x)=\frac{5x^3+x-1}{x^2+1}$

8 $f(x)=(5x^2+3x+5)^7$

راهێنان و بجهئینان

داتاشراوێ هەر نەخشەیەكێ بینەدەر.

9 $f(x)=x^2-\frac{1}{x^2}$

10 $f(x)=\sqrt[3]{x}+\frac{6}{\sqrt{x}}$

11 $f(x)=2\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[5]{x}}$

12 $f(x)=\left(x^2-\frac{1}{x}\right)\sqrt{x+1}$

13 $f(x)=\sqrt[3]{x}\left(\frac{6}{\sqrt{x}}+1\right)$

14 $f(x)=\sqrt{x-1}\sqrt[3]{x-2}$

15 $f(x)=\frac{x^3-2x}{x-1}$

16 $f(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{x+1}$

17 $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x+5}}{x^2+1}$

18 $f(x)=\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^3$

19 $f(x)=\sqrt{3x^2-5x+2}$

20 $f(x)=\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^2$

21 **رێڤەبەریا عومباركرنێ** نەخشەیا $A(q)=\frac{km}{q}+cm+\frac{hq}{2}$ بكاردهێت وەك سامپلەك بۆ رێڤەبەریا عومباركرنێ ل كۆگەهێن مەزن، دەمێ:

- A ناڤەندێ تێچوویا خەرجیا عومباركرنێ د حەفتیێ دا دنوێنیت.
- q برێ هاتیە كرین دنوێنیت.
- k تێچوویا داخوازیا كرینێ بیت.
- c نرخێ كرینا ئێك دانەیێ بیت.
- m ژمارا یەكەیێن هاتینە كرین بیت.
- h تێچوویا عمباركرنا ئێك دانەیێ بیت.

داتاشراوێ ئێكێ و دووێ بۆ نەخشەیا A بهەژمێرە.

22 **تەپەكا كاغەزێ** تو دشێی ڤێ تەپێ ب ساناهی بەرەف ئەڤراز ل هەوای هەلدەی بكارئینانا شەریتەكا لاستیكی. ئەڤ نەخشە بۆ دیاركرنا بلنداهیا تەپێ بكاردهێت $h(t) = 39.2t - 4.9t^2$ پشتی t چركە ژ هەلدانا وێ. داتاشراویێ ڤێ نەخشێ $h'(t)$ لەزا تەپێ ل دەمێ t دەردبرێت.

أ لەزا تەپێ بهەژمێرە ل هەر دەمەكی t . و ئەگەر $t = 3$ ، $t = 4$ ، $t = 5$.

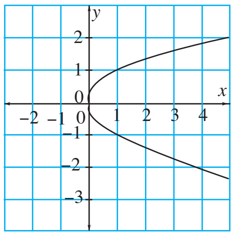
ب لەزا تەپێ چەندە دەمێ بگەهتە بلندترین بلنداهی پێش دەست بهاتنە خوارێ بكەت؟ بەرسڤا خۆ بكاربینە بۆ دیاركرنا دەمێ پێدڤی t ب چركەیان هەتا تەپە بگەهتە پەرێ بلنداهی، وئەوێ بلنداهیێ بهەژمێرە؟

ج لسەر ڕوویێ هەیڤێ نەخشەیا $h(t) = 39.2t - 0.79625t^2$ بكاردهێت بۆ دیاركرنا بلنداهیا تەپا كاغەزێ (ب مەتران) پشتی t چركەیان ژ هەلدانا وێ. لەزا تەپێ چەندە ئەگەر بگەهتە بلندترین بلنداهی بەری بهێتە خوارێ؟ بەرسڤا خۆ بكاربینە بۆ دیاركرنا دەمێ پێدڤی t ب چركەیان هەتا تەپە بگەهتە بلندترین بلنداهی. وئەو بلنداهیە چەندە؟

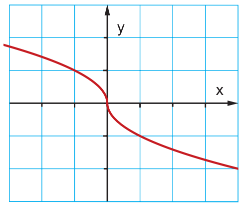
لێنێرینەك بۆ پاش

دیاربكە كیژ ڤان چەماوەیێن ل خوارێ نەخشێ دنوێنیت. بەرسڤا خۆ ڕوونبكە:

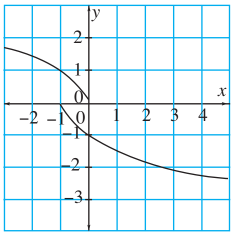
23



24



25



26 كیژ ڤان نەخشەیێن ل خوارێ نەخشەیەكا دووجاییە؟

أ $f(x) = 1 - 2x + x^3$

ب $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2 + 1}$

ج $f(x) = 2x3 + 4x^2$

د $f(x) = 1 - 2x$

لێنێرینەك بۆ پێش

27 نەخشەیا لادانێ (جهی) بۆ تەنەكێ لڤۆك لسەر ڕاستەهێلەكی دبیتە $s(t) = t^3 - 3t + 50$ دەمێ دووری s ب مەتران و دەم t ب خۆلەكان بیت. پشتی چەند خولەكان لەزا وی تەنی دبیتە سفر؟ جهێ وی تەنی ل ئەوی دەمی دیاربكە.

وانەیا
3

بجهئینانێن داتاشراویٚ

Applications of Derivative

بۆچی

داتاشراوا ئێکێ بکاردهێت بۆ هەژمارتنا گۆشا هەلدانا گۆلله تۆپەکێ دا بگەهته دوورترین دوورِیا دشیاندا.

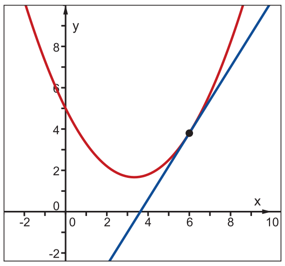
داتاشراو ل گەلەك بواران بکاردهێت. نۆکە دێ بەحسێ بکارئینانا وێ کەین د سێ بواراندا، نواندنا چەماوەیێ نەخشێ، ڤاندنا تەنەکێ، بوارێ ئابووری.

ئارمانج

- داتاشراو بۆ دیارکرنا پیڤەرێ پەراویزی یێ پیڤەرەکێ ئابووری بکاردهێت.
- داتاشراو بۆ دیارکرنا هاوکێشا لێکەفتێ چەماوەیێ نەخشەیەکێ ل خالەکا دیارکری بکاردهێت.
- داتاشراو بۆ دیارکرنا لەز وتاودانا تەنەکێ لسەر راستەهێلەکێ برێڤە بچیت.

تو فێربووی کو داتاشراوێ نەخشەیا f ل خالا P لسەر چەماوەیێ نەخشەیێ دبیتە لارێ لێکەفتێ نەخشێ ل خالا P . ئەگەر مە داتاشراوێ نەخشێ ل خالا P ناسی، دێ لارێ لێکەفتێ نەخشێ ل وێ خالێ ناسین. پاشی دێ شێوەیێ لارێ – خال بکارئینین بۆ دیارکرنا هاوکێشەیا لێکەفتێ یێ لارێ وێتاتێ خالا P .

نموونە 1 **دیارکرنا هاوکێشەیا لێکەفتێ برگەیێ هاوتا لنك خالەکێ ژ خالێن وێ.**



هاوکێشەیا لێکەفتێ برگەیێ هاوتا $f(x)=0.3x^2-2x+5$ لنك خالا P کو پۆیێ وێ $x=6$ بینەدەر.

شیکار

شێوەیێ لارێ–خال بۆ هاوکێشەیا راستەهێلێ ئەڤەیە $y-y_1=m(x-x_1)$
$x_1=6$ ، $y_1=f(6)=3.8$ بۆ هەژمارتنا لارێ m ، داتاشراوێ نەخشەیا $f(x)=0.3x^2-2x+5$ بینەدەر و بهایێ وێ بهەژمێرە ئەگەر $x=6$.

$$f'(x)=(0.3x^2)'-(2x)'+(5)'=0.3\left(x^2\right)'-2(x)'+(5)'=0.3(2x)-2(1)+(0)=0.6x-2$$

بهایێ m ئەگەر $x=6$ دبیتە $f'(6)=0.6(6)-2=3.6-2=1.6$ ، لارێ لێکەفتێ $m=1.6$

نۆکە شێوەیێ لارێ – خاڵ بۆ هاوکێشەیا راستەهێلێ بکاربینە:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-3.8=1.6(x-6)$$
$$y=1.6x-5.8$$

هاوکێشەیا لێکەفتێ برگەیێ هاوتا $y=0.3x^2-2x+5$ ل خالا $P(6,\ 3.8)$ دبیتە $y=1.6x-5.8$.

بزاڤێ بکە هاوکێشەیا لێکەفتێ برگەیێ هاوتا $f(x)=2x^2+3x-6$ ل خالا P کو پۆیێ وێ $x=1$ بینەدەر.

نموونه 2

دیارکرنا هاوکێشەیا لێکەفتێ پرگەیێ هاوتا وهاوکێشەیا ستوونی لسەر لێکەفتی لنك خالەکێ ژ خالێن وێ:

هاوکێشەیا لێکەفتێ چەماوەیی و هاوکێشا ستوونی لسەر وی بینەدەر لنك خالا p کو پۆیێ وێ $x=-2$ ودکەڤیتە سەر چەماوەیێ پرگەیێ هاوتا $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x-2$.

شیکار

شێوەیێ لاری – خال بۆ هاوکێشەیا ڕاستەهێلی ئەڤەیە $y-y_1=m(x-x_1)$.

$x_1=-2$ و $y_1=f(-2)=-2$. بۆ هەژمارتنا لاریێ لێکەفتی، داتاشراویێ نەخشەیێ بینەدەر و بهایێ وێ بهەژمێرە ئەگەر $x=-2$.

$$f'(x)=\left(\frac{1}{2}x^2\right)'+(x)'-(2)'=\frac{1}{2}\left(x^2\right)'+1-0=\frac{1}{2}(2x)+1=x+1$$

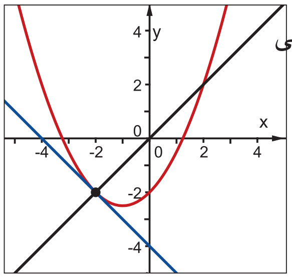
بهایێ داتاشراویێ دەمێ $x=-2$ دبیتە $f'(-2) = -2 +1 = -1$ ئێ $m = f'(-2) = -1$.

لاریێ m دبیتە -1 .

شێوەیێ لاری – خال بۆ هاوکێشەیا ڕاستەهێلی بکاربینە.

$$y-y_1=m\left(x-x_1\right)$$
$$y-(-2)=-1\left(x-(-2)\right)$$
$$y=-x-4$$

هاوکێشەیا لێکەفتێ برگەیێ هاوتا $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x-2$ لنك خالا $P(-2,\,-2)$ دبیتە $y=-x-4$.



بۆ دیارکرنا هاوکێشەیا ستوونی لسەر وی لێکەفتێ، چونکی ئەنجامێ لێکدانا لاریێ لێکەفتی ولاریێ ستوونا لسەر وی دبیتە -1 و لاریێ لێکەفتی دبیتە ڤێجا لاریێ ستوونێ دبیتە 1 .

نۆکە شێوەیێ لاری – خال بۆ هاوکێشەیا ڕاستەهێلی بکاربینە.

$$y-y_1=m\left(x-x_1\right)$$
$$y-(-2)=1\left(x-(-2)\right)$$
$$y=x$$

هاوکێشەیا ستوونی لسەر لێکەفتی ل خالا $P(-2,\,-2)$ دبیتە $y=x$.

بزاڤێ بکە

هاوکێشەیا لێکەفتی و ستوون لسەر لێکەفتی لنك خالەکێ بینەدەر کو پۆیێ وێ $x=-2$ لسەر چەماوێ برگەیێ هاوتا $f(x)=x^2+x-1$.

دەمێ تەنەك لسەر ڕێرەوەکێ ڕاست برێڤە دچیت، دبێژنە نەخشەیا $s=f(t)$ کو جهێ وی تەنی دیاردکەت ل هەر دەمەکی وەك t **نەخشەیا جهی**.

داتاشراویێ ئێکێ یا وێ نەخشەیێ دبیتە لەزا تەنی ل هەر دەمەکی t و داتاشراویێ دووێ یا وێ نەخشەیێ دبیتە تاودانا تەنی، ئەو دەربڕینێ ژ گوهۆڕینا لەزا تەنی دکەت بەرەڤ زێدەبوون یان بەرەڤ کێمبوونێ. سادەترین بزاڤ (ڕێڤەچوون) دبیتە ڕێڤەچوونا تەنەکی لسەر ڕاستەهێلەکێ ب لەزەکا نەگۆر کو ناهێتە گوهۆڕین ب گوهۆڕینا دەمی. نەخشەیا جهی بۆ وی تەنی دبیتە نەخشەیەکا هێلی لسەر شێوەیێ $s(t)=vt+s_0$ دهێتە نڤیسین کو s_0 دبیتە بهایێ وێ نەخشێ دەمێ $t=0$ ، ئانکو دبیتە جهێ وی تەنی دەمێ دەست برێڤەچوونێ دکەت.

ل ڕەخەکێ دی داتاشراویێ وێ نەخشێ $s'(t)=v$ دبیتە لەزا وی تەنی، و ڕامانا وێ ئەوە کو لەزا ئەڤ تەنە پێ ڕێڤەدچیت یا نەگۆرە.

تاودانا ئەڤ تەنە پێ ڕێڤەدچیت دبیتە داتاشراویێ دووێ بۆ نەخشەیا جهی ئانکو $s''(t)=(v)'=0$ ، ئەڤە وێ دیار دکەت کو لەزا تەنی ناهێتە گوهۆڕین، وئەڤە چێدبیت چونکی لەزا وی تەنی یا نەگۆرە.

ئەندازیار هەردوو پەیڤان (لەز) و (تاودان) بکاردئینن بۆ دەربڕینا داتاشراویێ ئێکێ و دوویێ یا نەخشەیەکا بەحسێ بزاڤا تەنەکی دکەت. هەروەسا ئابووری ناس هندەك دەربڕینێن تایبەت د ڤی بواریدا بکاردئینن، ئەو دەربڕینا پەراوێز (هامشی) بکاردئینن. ئابووری ناس ژمارەکا نەخشان دخوینن، وەکی نەخشەیا تێچوویێ $C(x)$ کو ئەو نەخشەیەکە پێ ژمارا یەکەیێن بەرهەمی x .

پەراوێزێ تێچوویی کو ئەو تێچوویێ زێدەیە پەیدا دبیت ژ ئەنجامێ بەرهەمئینانا یەکەیەکا زێدە. ئابووری ناس داتاشراویێ نەخشەیا تێچوویێ دهەژمێرن وەك نرخەکێ نێزیککری رەوا بۆ پەراوێزێ تێچووی.

و ئەڤێ دادنن وەك دەربڕینەکا بیرکارییێ بۆ پەراوێزێ تێچوویێ.

نموونە 3

پەراوێزێ تێچوویی و پەراوێزێ داهاتی

مگرتی $C(x)=x^3-6x^2+15x+100$ نەخشەیا تێچوویێیە (ب هزاران دیناران) بۆ بەرهەمئینانا x سارکەرێن (برّاد) بچووك، دەمێ ئاستێ بەرهەمئینانێ بکەڤتە ناڤبەرا 8 هەتا 30 سارکەراندا. ونەخشەیا $R(x)=x^3-3x^2+12x$ نەخشەیا داهاتی بیت (ب هزاران دیناران) ژ ئەنجامێ فرۆتنا x سارکەران. ئەرێ تێچوویا زێدە بۆ بەرهەمئینانا ئێك سارکەرا زێدە چەندە ئەگەر ئاستێ بەرهەمی 10 سارکەر بیت د رۆژەکێدا؟ وچەند داهات دێ زێدەبیت بۆ فرۆتنا 11 سارکەران د رۆژەکێدا.

شیکار

تێچوویێ زێدە بۆ بەرهەمئینانا سارکەرەکا زێدە ژ ئاستێ بەرهەمئینانا 10 سارکەران دبیتە نرخێ داتاشراویێ نەخشەیا تێچوویێ دەمێ $x=10$.

$$C'(x)=\left(x^3\right)'-\left(6x^2\right)'+(15x)'+(100)'=3x^2-12x+15$$

$$C'(10)=3(10)^2-12(10)+15=300-120+15=195$$

تێچوویا زێدە بۆ بەرهەمئینانا سارکەرەکا زێدە ژ ئاستێ بەرهەمئینانا 10 سارکەران د رۆژەکێدا دبیتە 195 هزار دینار.

داهاتێ زێدە ئەوێ پەیدا دبیت ژ فرۆتنا 11 سارکەران ل جهێ 10 سارکەران دبیتە پەراوێزێ داهاتی کو دبیتە نرخێ داتاشراویێ نەخشەیا داهاتی دەمێ $x=10$.

$$R'(x)=\left(x^3\right)'-\left(3x^2\right)'+(12x)'=3x^2-6x+12$$

$$R'(10)=3(10)^2-6(10)+12=252$$

داهاتێ زێدە ژ فرۆتنا سارکەرەکا زێدە ژ ئاستێ بەرهەمئینانا 10 سارکەران د رۆژەکێدا دبیتە 252 هزار دینار.

بزاڤێ بکە

ئەگەر نەخشەیا $C(x)=2x^3-3x^2+5x+160$ نەخشەیا تێچوویێ بیت (ب هزاران دیناران) بۆ بەرهەمئینانا x تەختێن نڤستنێ، دەمێ ئاستێ بەرهەمئینانێ بکەڤتە ناڤبەرا 7 هەتا 20 تەختێن نڤستنێ. ونەخشەیا $R(x)=2x^3-3x^2+12x$ نەخشەیا داهاتی بیت (ب هزاران دیناران) ژ ئەنجامێ فرۆتنا x تەختێن نڤستنێ.

تێچوویا زێدە بۆ بەرهەمئینانا ئێك تەختێ زێدە چەندە ئەگەر ئاستێ بەرهەمئینانێ 10 تەخت د رۆژەکێدا بن، وچەند داهات دێ زێدەبیت دەمێ 11 تەختێن نڤستنێ د رۆژەکێدا بفرۆشیت.

ڕاهێــــــــنــــــان

بەردەوامبوون د بیرکارییدا

1 چ وەسا ل ئابووریناسان کرییە کو ئەو داتاشراویٚ نەخشەیا تێچوویێ ددانن وەك نرخەکێ نێزیککری ڕەوا بۆ هەژمارتنا پەراویزێ تێچوویی.

ڕاهێنانێن ئاڕاستەکری

2 لارێ لێکەفتێ چەماوەیێ نەخشەیا $f(x)=x^3+3x-1$ ل خالا پۆیێ وێ $x=1$ لسەر چەماوەی بهەژمێرە.

3 نەخشەیا جهی بۆ تەنەکی لسەر ڕاستەهێلەکی بڕێقەبچیت ئەڤەیە $s(t)=t^4-3t^2+2$. جهێ وی تەنی ولەز وتاودانا وی بهەژمێرە پشتی بورینا 7 چرکەیان ژ دەستپێکرنا وی.

4 پەراویزێ تێچوویی بۆ نەخشەیا تێچووی $C(x)=x^3-2x^2+3x+50$ ل ئاستێ بەرهەمئینانێ $x=8$ چەندە؟

ڕاهێنان و بجهئینان

5 لارێ لێکەفتێ چەماوەیێ نەخشەیا $f(x)=\sqrt{x^2+2}$ ل خالا پۆیێ وێ $x=2$ بهەژمێرە.

6 پویێ ئێکی بۆ وێ خالا دکەڤنە سەر چەماوەیێ نەخشا $f(x)=x^4+2$ بینەدەر دەمێ لارێ لێکەفتی ل وێ خالێ سفر بیت.

7 هاوکێشەیا لێکەفتێ چەماوەیی نەخشەیا $f(x)=(x+1)^3+2$ ل خالا پۆیێ وێ $x=-1$ بینەدەر.

8 هاوکێشەیا لێکەفتی و ستوون لسەر لێکەفتێ چەماوەیێ نەخشا $f(x)=2\left(x^2-3x+1\right)$ ل خالا پۆیێ وێ $x=3$ بینەدەر.

9 هاوکێشەیا لێکەفتی و ستوون لسەر لێکەفتێ چەماوەیێ نەخشەی $f(x)=x^4$ لنك خالا $(-1,1)$ بینەدەر.

10 ئەگەر نەخشەیا تێچوویێ ب هزاران دیناران بۆ بەرهەمئینانا ئامیرێن جل شویشتنێ ئەڤەبیت:

$$C(x)=2000+100x-0.1x^2$$

أ ئەگەر 100 ئامێر بهێنە چێکرن، ئەرێ ناڤەندێ تێچوویێ بەرهەمئینانا ئێك ئامیری چەندە؟

ب پەراویزێ تێچوویێ ل ئاستێ بەرهەمئینانا 100 ئامیران چەندە؟

ج تێچوویێ بەرهەمئینانا101 ئامیران بهەژمێرە وتێچوویێ بەرهەمئینانا 100 ئامیران بهەژمێرە، پاشی تێچوویێ بەرهەمئینانا وی ئامیرێ زێدە دەرئەنجام بکە. بەراوردیێ لناڤبەرا ئەنجامێ تە دیارکری وپەراویزێ تێچوویی بکە. ئەرێ بکارئینانا داتاشراوێ بۆ هەژمارتنا بهایەکێ نێزیککری بۆ پەراویزێ تێچوویی کارەکێ پەسەندە؟

11 ئەگەر نەخشەیا تێچوویێ ب هزاران دیناران بۆ بەرهەمئینانا ئامیرێن جل شویشتنێ ئەڤە بیت:

$$R(x) = 20\,000\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

أ ئەگەر 100ئامیر هاتنە فرۆتن. ئەرێ ناڤەندێ داهاتی بۆ ڤێ فرۆتنێ چەندە؟

ب پەراویزێ داهاتی ل ئاستێ بەرهەمئینانا 100 ئامیران بینەدەر.

ج داهاتێ فرۆتنا 101 ئامیران و داهاتێ فرۆتنا 100 ئامیران بهەژمێرە. ئەوێ زێدەهیا پەیدا بوویی ژ فرۆتنا وی ئامیرێ زێدە دەرئەنجام بکە، بەراوردیێ لناڤبەرا ئەنجامێ تە دیارکری وپەراویزێ داهاتی بکە. ئەرێ بکارئینانا داتاشراوێ بۆ هەژمارتنا بهایەکێ نێزیککری بۆ پەراویزێ داهاتی کارەکێ پەسەندە؟

لێنێرینەك بۆ پاش

12 پۆتانێ وان خالان دیاربکە کو دکەڤنە سەر چەماوەیێ نەخشا $f(x) = x^3 - 3x + 2$ ئەگەر لارێ لێکەفتێ ل وان خالان سفر بیت.
هاوکێشەیا لێکەفتێ چەماوەی ل وان خالان بینەدەر.

لێنێرینەك بۆ پێش

13 چ دبێژی بۆ نەخشەکێ کو داتاشراوێ نەخشەیەکا نەگۆڕ بیت؟