

ههلسهنگاندنا زانستی
الیاس حیدر الیاس

وهرگیران و گونجاندن
شکری حسن سلو
عصام الدین عبید عمر
مشیر الیاس عبدالله

پیداچوونا چاپکرنی
شکری حسن سلو

پیداچوونا زمانی
طه یاسین طه

سه‌رپه‌رشتی هونه‌ری یی چاپی
عثمان پیرداود کواز
سعد محمد شریف صالح

۱	وینہ یین رپونکرنی و نمونہ یین ہیلی Graphs and Linear Models	بہشی ئیکی
۴	دہروازہ یہک بو ہہ ژمارتنا جیاکاری و تہواوکاری Introduction to Calculus	بہشی دووی
۹	داتاشراو و نمونہ یا لیکہفتی Derivative and the Tangent Problem	بہشی سییی
۱۳	بجہئینانا داتاشراوی Applications of Differentiation	بہشی چواری
۱۸	تہمامکارییا بیسنور Indefinite Integral	بہشی پینجی
۲۲	برگہ یین قوچہکی Conics Sections	بہشی شہ شہم
۲۵	ژمارہ یین ئاویتہ و ئەندازہ Complex Numbers And Geometry	بہشی حہفتی
۲۷		بہرسف

بۆ قوتابى

پەرتووكا رايۇنلار يا ھاتىيە دارىژتن ژ بۆ پەيداكرنا رايۇنلار زىدە بۆ قوتابيان ل سەر وان شارەزايىن ئەود ھەر وانەيەكىدا فيربووين. ئەف پەرتووكە يا پىكھاتى ژ بەرپەرەكى بۆ ھەر وانەيەكى. و ھەر رايۇنلار ل ئەوى بەرپەرى ئەوان شارەزايى و بجهئىنانان بخوڧە دگرت ئەوين قوتابى فيربوويى ل وى وانەيى.

راهینان

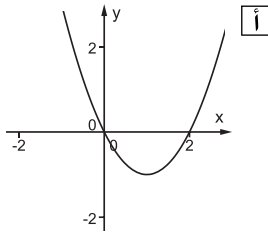
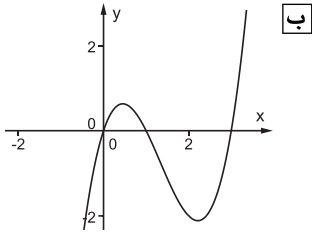
وانه

1-1

Graphs

ویتهیئن پروونکرنی

ئەوی ویتهیئ پروونکرنی دیاریکه کو نهخشهیا راهینانی دنوینت.



$$f(x) = (x-1)^2 - 1 \quad \mathbf{1}$$

$$f(x) = (x-1)^3 - x^2 + 1 \quad \mathbf{2}$$

ویتهیئ پروونکرنی ب خالان بکیشه.

$$f(x) = 4 - x^2 \quad \mathbf{3}$$

$$f(x) = |x| - 1 \quad \mathbf{4}$$

ئیکو دووبریننئ ئاسویی و ستوونی یئ نهخشه دیاریکه.

$$f(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 1} \quad \mathbf{5}$$

$$f(x) = \frac{3(2-\sqrt{x})}{x} \quad \mathbf{6}$$

ل راهینانین 7-9، دیاریکه ئهري ئه و نهخشه کته یان جووته، یان چو ژوان نینه؟

$$f(x) = x^3 - 4x \quad \mathbf{7}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{x} \quad \mathbf{8}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1} \quad \mathbf{9}$$

خالین ئیکودوو بریننئ ویتهیئن پروونکرنیئن ههردوو نهخشه یان بههژمیڤه:

$$g(x) = 1 - x^2 \text{ و } f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 \quad \mathbf{10}$$

$$g(x) = 6 - x \text{ و } f(x) = -|2x - 3| + 6 \quad \mathbf{11}$$

ویڤنه‌یڤی وی راسته‌هیلی کو لاری وی و ئه‌و خالاتیرا دبۆریت دیارکرین بکیشه.

- 1 3 : (-2, 1) 2 0 : (3, 5) 3 لاری وی پیناسه نه‌کرپه : (2, $\frac{5}{4}$)

هاوکیشه‌یا وی راسته‌هیلی بینهدر هه‌که د ئه‌وان هه‌ردوو خالین دیارکری ببۆریت.

- 4 (1, 2) و (4, 3) 5 (-2, 4) و (-2, -4)

هاوکیشه‌یا ئه‌و راسته‌هیلی بینهدر هه‌که د خالا دیارکری راببۆریت و ته‌ریب بیت دگه‌ل راسته‌هیلی دیارکری.

- 6 (1, 2) : $2x - 3y = 1$ 7 (-5, 3) : $x = 1$

هاوکیشه‌یا ئه‌وی راسته‌هیلی بینهدر کو دخالا دیارکریا ببۆریت و ستوون بیت لسه‌ر راسته‌هیلی دیارکری.

- 8 (-2, 3) : $4x - 5y = 3$ 9 (3, 1) : $y = -2$

دووری لئاڤه‌را خالا M و راسته‌هیلی d به‌ه‌ژمیڤه.

- 10 $M(4, 5)$: $d : 4x + 3y = 4$ 11 $M(1, 3)$: $d : y = 2x - 1$

12 کو‌مپانه‌کی دوو ده‌رخسته پشکیشی فه‌رمانبه‌ره‌کی نوی کرن، دا ئیکی ژوان هه‌لبژیرت. له ده‌رخسته‌یا ئیکی 6500 دیناران

به‌رامبه‌ر هه‌ر ده‌مژمیڤکا کاری وه‌رده‌گرت، دگه‌ل 500 دیناران بو هه‌ر یه‌که‌یه‌کا به‌ره‌می. له ده‌رخسته‌ی دووی 5100

دیناران به‌رامبه‌ر هه‌ر ده‌مژمیڤکا کاری وه‌رده‌گرت دگه‌ل 700 دیناران بو هه‌ر یه‌که‌یه‌کا به‌ره‌می.

ا) هاوکیشه‌یه‌کا هیلی بو هه‌ر ده‌رخسته‌یه‌کی بنقیسه، کو w ژماره‌یا یه‌که‌یڤن به‌ره‌می د x د ده‌مژمیڤان دا بنوینت.

ب) هه‌ردوو هاوکیشه‌یان دئیک روته‌ختی پۆتانیڤا بنوینه، و پۆتانیڤن خالین ئیک دووبرینا هه‌ردوو ویڤنه‌یان به‌ه‌ژمیڤه.

ج) خالین ئیکو دوو برینین ل لقی (ب) چ دنوینت؟

چه‌وا ئه‌ف زانیاریا بکارده‌ین، دا فه‌رمانبه‌ر ده‌رخسته‌یا گونجای هه‌لبژیرت؟

راہیٲنان

وانہ

3-1

فونکشنز اور انہن کے گراف (چہ ماوہیٲن وان) Functions and Their Graphs

بہایٲن داخو ازکری بوٲ نہخشیہی بہہژمیٲرہ نگہر یادشیاندا بوو، نگہجامان ب سادہترین شیوہ بنقیسہ.

1 $h \geq -\frac{1}{2}$ کاتیٲک $f(1+h)$ ، $f(5)$ ، $f\left(\frac{5}{2}\right)$ ، $f(1)$ ، $f(x) = \sqrt{2x-1}$

2 $\frac{f(2+\sqrt{x})-f(2)}{\sqrt{x}}$ ، $f(\sqrt{2})$ ، $f(1)$ ، $f(-1)$ ، $f(x) = x^3 - 2x^2$

3 $f\left(\frac{5\pi}{2}\right)$ ، $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ، $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ ، $f(0)$ ، $f(x) = \sin 2x$

4 $f(-1)$ ، $f(2)$ ، $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x^2+1} & x \geq 1 \\ \frac{3}{x-1} & x < 1 \end{cases}$

بو وارو مہودایٲی ہر نہخشیہی کیٲ دیاریکہ.

6 $f(x) = \frac{2}{|x-1|}$

5 $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

7 بہایٲی $(f \circ g)(2)$ بہہژمیٲرہ ہکہ $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = \frac{1}{x-3}$

8 چہ ماوہیٲی نہخشیہیا بنہٲرت $f(x) = |x|$ بکار بیٲنہ بوٲ وٲنہ کیٲشانا ہر نہخشیہیہ کال خواری.

ج $y = |2x - 4|$

ب $y = |x + 1|$

ا $y = |x| + 1$

9 سیٲ نہخشیہیان و ہک f ، g ، h بہہژمیٲرہ کو $k = f \circ g \circ h$ ب مہرجہ کیٲ $k(x) = 2 \sin(3x)$ پیٲک بیٲت.

10 دیاریکہ ئہریٲ نہخشیہیا f جووتہ یان کتہ.

ج $f(x) = x + |x|$

ب $f(x) = x^2 \sin x$

ا $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$

11 ئہوان جہگوہوٲرکان ئیک ل دووٲ ئیک دیاریکہ کو چہ ماوہیٲی نہخشیہیا بنہٲرت $f(x) = x^3$ بوٲ چہ ماوہیٲی ہر نہخشیہیہ کال خواریٲ دگوہوٲریت.

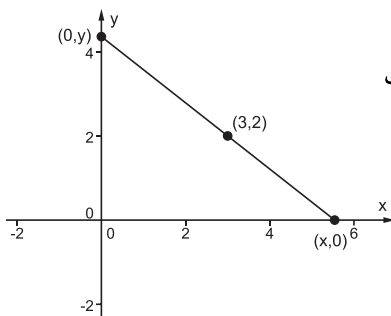
ج $f(x) = 2(x+1)^3$

ب $f(x) = 2x^3$

ا $f(x) = (x-1)^3 + 1$

12 وٲنہیٲی بہرامبہر سیٲگوٲشہیہکا و ہستاو د چاریٲکیٲ ئیکٲیٲ دال سہر رووتہختیٲ بوٲتانی

دنوٲنت. کو ژییٲ سیٲگوٲشہیٲیٲ دخالا $(3, 2)$ رادبوٲریت دریٲژیا ژییٲ ئہویٲ سیٲگوٲشہیٲیٲ و ہک نہخشیہیہک پیٲ x بنقیسہ.



13 روونبکہ کو ئہنجامیٲ لیٲکدانا دوو نہخشیہیٲن کت دبیتہ نہخشیہیہکا جووت؟

14 روونبکہ کو ئہنجامیٲ لیٲکدانا نہخشیہیہکا کت دگہل نہخشیہیہکا جووت،

دبیتہ نہخشیہیہکا کت.

راهینان

وانه

1-2

Introduction to calculus

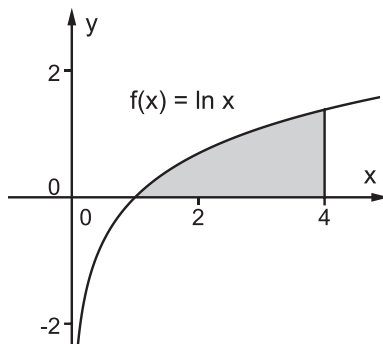
دهروازهیهك بۆ ههژمارتئا جیاکاری و تهواوکاری

ههردوو راهینانین 1 و 2 دا، اهینانی شیکاریکه ههکه یا دشیانابوو، بیی بکارئینانا چهمکی نارمانجی و شیکارکرنی و بوچوونین خو پروونبکه ههکه ته چهمکی نارمانجی بکارئینا، پاشی رپئا ههژمارتنی یان وینهیی پروونکرنی بکاربینه بۆ خهملاندنا بهرسفا خو.

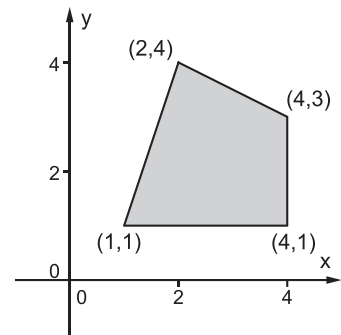
1 ئەو دوورییا تهنهکی لڤۆک ل دەمی 20 چرکهیان دبرت بههژمیڤه، ههکهر ئەو تهنه ب لهزهکا نهگۆڤ بری وی 8m/s بریقهبعیت.

2 خالهک ل سهر چهماوهیی نهخشهیا $f(x) = 0.2x^2 + x$ دلقت، دەمی x بهرهف پیشفهچونا ئاسویی بۆ وئخالی بیت و $f(x)$ بلندبوونی بهرامبهری وی بنوینت. تیکراییی گۆهۆرپنا بلنداها خالی ل $x = 3$ بههژمیڤه.

دهردوو راهینانین 3 و 4 دا، رووبهری دهقرا سیبهرکری بکارئینانا لاکیشهیان بههژمیڤه.



4



3

5 نهخشهیا $f(x) = x^2 - 2x$ و خالا $P(1, -1)$ کو دکهفیته سهر چهماوهیی وی بکاربینه.

ا چهماوهیی نهخشهیی و ئەوان برهړین د خالا P و خالین $(x, f(x))$ را بورن بکیشه، ههکه x نهقان بهایان وهربگرت 1.2، 1.5، 1.8، 2.

ب لاری ههر برهړهکی بههژمیڤه.

ج ئەنجامین لقی ب بۆ خهملاندنا لاری لیکهفتی نهخشهیا f له خالا P بکاربینه. پاشی بهحسبکه چهوا لاری برهړی نیزیک دبیت بۆ لاری لیکهفتی.

6 نهخشهیا $f(x) = \sqrt{x}$ و خالا $P(4, 2)$ که دکهفیته سهر چهماوهیی وی نهخشهیی بکاربینه.

ا چهماوهیی نهخشهیی و وان برهړین د خالا P و خالا $(x, f(x))$ را دبۆرن بکیشه، ههکه x قان بهایان وهربگرت 1، 3، 5.

ب لاری ههر برهړهکی بههژمیڤه، پاشی بهایی نیزیکی لاری لیکهفتی چهماوهیی نهخشهیی ل خالا P بههژمیڤه.

پراهيئنان

وانه

2-2

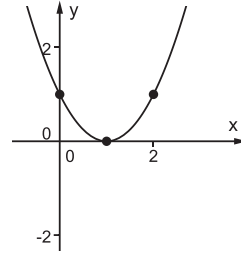
ههژمارتتا ئامارنجان ب ويئهي پوونكرني و بكارئيئنانا ژمارهيان

Finding Limits Graphically and Numerically (و ب ژمارهيي)

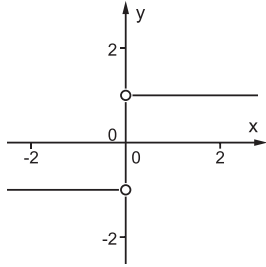
ئارمانجی ب ويئهي پوونكرني (ههكه ههبيت) بههژميڤه، ههكه نهبيت بهلگهيهكي بو نهبوونا ئارمانجا وي

بينه

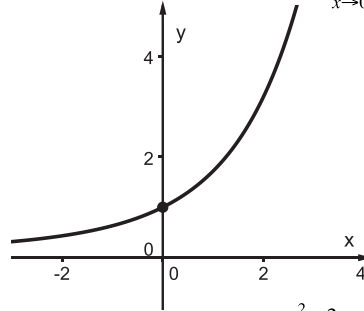
1 $\lim_{x \rightarrow 2} (x-1)^2$



2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$

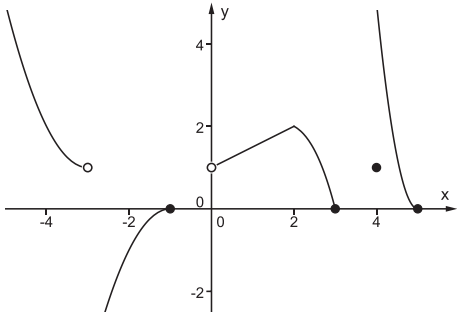


3 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cdot f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$



4 بكارئيئنانا ژمارهيي ئارمانجا $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$ بههژميڤه.

5 ويئهي پوونكرني بكاربينه بو برياردانا ههبوونا بههايهكي، ههكهر ئهه بهايه يي زانراوبيت بهايهكي نيزيك بو وي دياربكه، ههكه نا بهلگهيهكي بينه بو نهبوونا ئارمانجان.



ب $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ ا $f(-2)$

د $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ ج $f(-3)$

و $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ه $f(2)$

ح $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ ز $f(4)$

6 چهماوهيي نهخشهيا f بكاربينه و بهايين C دياربكه، ل دهمي نهبوونا

$\lim_{x \rightarrow C} f(x)$

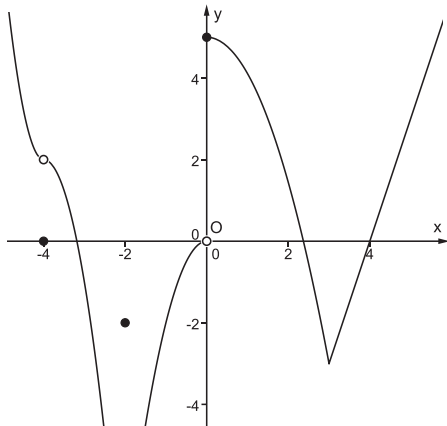
7 چهماوهيي نهخشهيا f بكيشه كو مهرچين ل خواري ساخبكهت.

• $f(0)$ نينه.

• $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 6$

• $f(2) = 6$

• $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$



ژ راهیانانا 1-7 ، ئارمانجا داخوازکری بههژمیڤه:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3x + 2} \quad \mathbf{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} \quad \mathbf{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad \mathbf{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - 1}{x} \quad \mathbf{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2} \quad \mathbf{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{4x} \quad \mathbf{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x+1| - |x-1|}{x} \quad \mathbf{7}$$

بینهدهر.

ل ههردوو راهیانانین 8 و 9 ، سهلمیئراوا دوو مهرج (سهندووچ) بو ههژمارتنا $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ بکاربینه.

$$3 + 2x - x^2 \leq f(x) \leq 3 + 2x + x^2, \quad c = 0 \quad \mathbf{8}$$

$$x - |x - 1| \leq f(x) \leq x + |x - 1|, \quad c = 1 \quad \mathbf{9}$$

$\mathbf{10}$ نهخشهیا f و g دیاریکه کو فان ساخدکه: ئەف ههردوو ئارمانج $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ نهبن، لی $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) \cdot g(x)]$ ههبن.

$\mathbf{11}$ نهخشهیا $s(t) = -4.9t^2 + 200$ لادانا بهرهکی ل بلنداها 200m پشتی t چرکه ژ کهفتنا وی دنویئت.

$$\text{ئارمانجا } \lim_{t \rightarrow a} \frac{s(t) - s(a)}{t - a} \text{ دبیته لهزا وی بهری ل } t = a$$

\mathbf{A} لهزا وی بهری ل $t = 2$ بههژمیڤه.

\mathbf{B} لهزا وی بهری ل دهمی کهفتنا وی ل ئهردی چهنده؟

$\mathbf{12}$ \mathbf{A} پوونبکه کو $|a| \leq a \leq -|a|$ ههکه ژمارهیا راستی a ههچه ندبیت.

\mathbf{B} پوونبکه، ههکه $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0$ دی $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$

راهینان

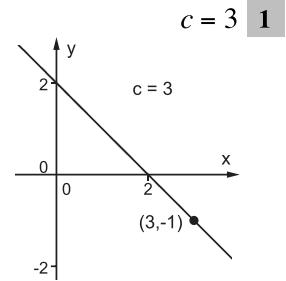
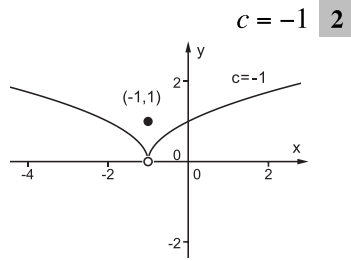
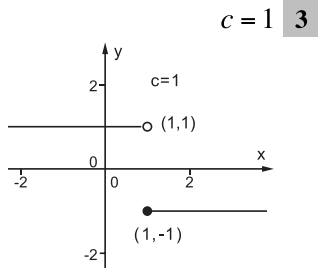
وانه

Continuous Function

نه خشه یا بهردهوام

4-2

ژ راهینانا 1 هتا 3 ، وینهیی پروونکرنی بکاربینه، بو دیاریکرننا ئارمانجا نه خشهیی ده می x له رهخی راستی و ل رهخی چهیی بو c نیژیکدبیت. $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ (ههکه هه بیت) بهه ژمیره پاشی بهردهوامیا نه خشهیی ل $x = c$ تاوتوبکه.



ژ راهینانا 4 هتا 6، بهردهوامیا نه خشهیی تاوتوبکه (دیاریکه).

6 $f(x) = \frac{|x+1|-|x|}{x}$

5 $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$

4 $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$

ل هردوو راهینانین 7 و 8 ، بهایی x (ههکه هه بیت) کو نه خشهیا تیدا یا پچاندی بیت، بینهدر و دیاریکه ههک لادانا وی پچاندنی یا دشیاندابیت.

8 $f(x) = \frac{e^x-2}{x-1}$

7 $f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$

9 بهایی a و b دیاریکه کووی نه خشهیی خالا بچاندنی نه بیت.

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x \leq 1 \\ ax + 3 & 1 < x \leq 4 \\ bx + 1 & x > 4 \end{cases}$$

10 بوچی ئەفی نه خشهیی رهگ ههیه لنافهرا a و b ؟

$b = 1, a = 0, f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$

11 ناخفتنکرن: لیچوونا ناخفتنکرنی لناقبهرا ههفلیری و دهرقه ب ئەفی شیوهیی دهیته ههژمارتن: 1040 دینار بو هردوو

خولهکین ئیکی، 360 دینار بو هر خولهکهکی یان بهشکی ژ خولهکا زیده، نه خشهیا $[x]$ بکاربینه ب نقیسینا لیچوونا ناخفتنکرنی پی ده می t ب خولهکان. وینهیی پروونکرنی بو ئەفی نه خشهیی بکیشه و تاوی ل سهر بهردهوامیا وی بکه $[x]$ رامانا وی ئەوه مهزنترین ژمارهیا تهواو کو نه زیدهتر بیت x .

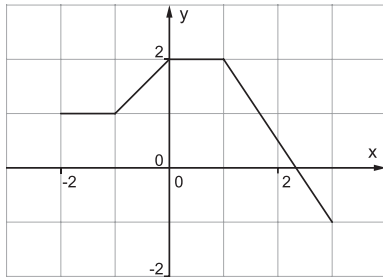
دەرکناریڻ ستوونی (ههکه ههبن) بۆ چهماوهیڻ ههه نهخشهیهکی بههژمیڻه:

$$f(x) = \frac{x}{\sin x} \quad \mathbf{3}$$

$$f(x) = \frac{2+x}{x^2(1-x)} \quad \mathbf{2}$$

$$f(x) = \frac{4}{(x-1)^3} \quad \mathbf{1}$$

دیاریکه ئههڻ نهخشهیهڻ دەرکناریڻ ستوونی ههیه، یان لادانا پچاندنڻ یادشياندايه یان نه. $x = -1$.



$$f(x) = \frac{x^2 - 6x - 7}{x+1} \quad \mathbf{4}$$

$$f(x) = \frac{\sin(x+1)}{x+1} \quad \mathbf{5}$$

6 وینهیهڻ پوونکرنڻ یڻ نهخشهیا بهرامبهه f بۆ نفیسینا هاوکیشهیا نهخشهیا $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ ل ماوهیهڻ $[-2, 3]$ بکارینه.

لاری نهخشهیی ل خالا دیاریکری بههژمییره.

(0, 1), $f(x) = x^3 + 1$ **3**

(1, $\frac{2}{3}$), $f(x) = \frac{2x}{2+x}$ **2**

(1, 2), $f(x) = x^2 - 2x + 3$ **1**

داتاشراوی همر نهخشهیهکی بههژمییره بکارئینانا نارمانجان.

$f(x) = \sqrt{2x+3}$ **6**

$f(x) = \sin x$ **5**

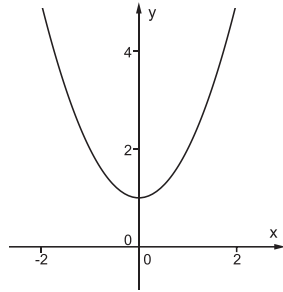
$f(x) = x^2 + x$ **4**

هاوکیشهیا لیکهفتی چهماوهیی نهخشهیی بههژمییره ههکه بی تهریب بیت دگهل راستههیلی هاوکیشهیا وی دیاریکری.

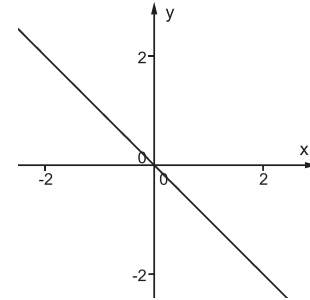
$2x - y + 2 = 0$, $f(x) = x^2 - 2x + 2$ **7**

$x - 4y + 5 = 0$, $f(x) = \sqrt{x+1}$ **8**

ههکه وینهیی روونکرنی بو نهخشهیا f ههبت. وهکی ل بهرامبر دیار، وینهیی بو داتاشراوی نهخشهیی بکیشه.



10



9

11 لیکهفتی وینهیی روونکرنهیی نهخشهیا h ل خالا (3, 1) دخالا (1, 3) را دبورت. $h(3)$, $h'(3)$ بههژمییره.

12 بهایین x بههژمییره کو نهخشهیا $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & x < 0 \\ 2x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$ شیانا داتاشراوی نهبت.

ل هردوو راهیانین **13** و **14**، دیاریکه ههکه نهخشهیی شیانا داتاشراوی ههبت ل $x = 1$.

$f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & x \leq 1 \\ (x-1)^2 & x > 1 \end{cases}$ **14**

$f(x) = |x-1|$ **13**

داتاشراوی هه نهخشهیهکی بههژمیٚره.

$f(x) = x^2 + xe^x$ 3

$f(x) = x^2 \sin x$ 2

$f(x) = x^2 + 4 - \frac{5}{x^2}$ 1

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ 6

$f(x) = \sqrt{1+e^x}$ 5

$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ 4

$f(x) = \tan \sqrt{x}$ 8

$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$ 7

هاوکیٚشهیا لیٚکهفتی نهخشهیی ل خالا دیارگری بههژمیٚره.

$(3, 6), f(x) = x\sqrt{x+1}$ 9

$(0, 1), f(x) = x^2 e^x + 1$ 10

بۆ دیارکردنا بهایی $f'(1)$ فان ییٚداییان بکارینه.

$h'(1) = 3$ و $h(1) = -2$ ، $g'(1) = -1$ و $g(1) = 1$

$f(x) = g(x^2) \times h(x)$ 12

$f(x) = 3g(x) - 2h(x)$ 11

$h'(1) = 5$ و $g'(0) = -2$ و $g(0) = 1$: $f'(0)$ فان بکارینه بۆ دیارکردنا $f(x) = h(g(x))$ 13

بهایین C و K دیاریکه ژ بۆ نهخشهیا $f(x) = x^3 + kx^2 + c$ لیٚکهفتی ئاسویی ل خالا $(1, 2)$ هه بیت. 14

لهن: بیسهلمینه کو ناقهندی لهزا تهنهکی ل قوٚک ل ماوهیی $[t_0 - 4, t_0 + 4]$ دبیته لهزا ساتی ل $t = t_0$ ، 15

ههکه بزانی کو نهخشهیا لادانی دبیته $s(t) = -\frac{1}{2}at^2 + c$

هاوکیٚشهیا برگیهیی هاوتا $f(x) = ax^2 + bx + c$ بههژمیٚره کو د خالا $(0, 1)$ را 16

دبۆریت و راسته هیلا $y = x - 1$ دبیته لیٚکهفت ل خالا $(1, 0)$.

راهیٚنان

وانه

3-3

داتاشراویٰ خوٚبه خوٚ و داتاشراویٚن بلند

Implicit Differentiation and Higher Derivative

y' بههٚمیره.

$x^2 + \ln y = e^y$ **3**

$x = y + \sin y$ **2**

$x^3 y + xy^2 = 2$ **1**

y' و لاریٰ چهماوهی ل خالا دیارگری بههٚمیره.

$(-1, 2): xy + x^2 + y^2 = 3$ **5**

$(1, 1): 2x^2 + 5y^2 = 7$ **4**

داتاشراویٰ دووی بو هر نهخشهیهکی بههٚمیره.

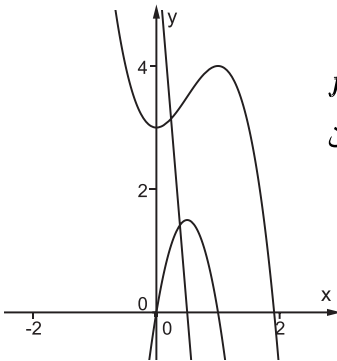
$f(x) = e^x + \ln^2 x$ **7**

$f(x) = x + \sqrt{x+1}$ **6**

داتاشراویٰ داخوازگری بو نهخشهیی بههٚمیره کو نیک ژ داتاشراویٚن وی یادیارگریه.

$f^{(6)}(x), f'''(x) = x^2 + e^x$ بههٚمیره. **9**

$f^{(4)}(x), f''(x) = x \sin x$ بههٚمیره. **8**



10 وینهیی بهرامبر، چهماوهیی نهخشهیا f' و چهماوهیی نهخشهیا f'' دنوینت، چهماوهیی هر نیک ژ ئەوان دیارکه بهحسی چاوانیا دیارکنا هرسی چهماوهیان بکه.

11 ئارمانجا داخوازگری بههٚمیره، پاشی ئارمانجی بکارئینانا سهلمینراوا لوبیتال بههٚمیره.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1}}{\sqrt{4x^2+1}}$ **ج**

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-27}{x^2-9}$ **ب**

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}$ **ا**

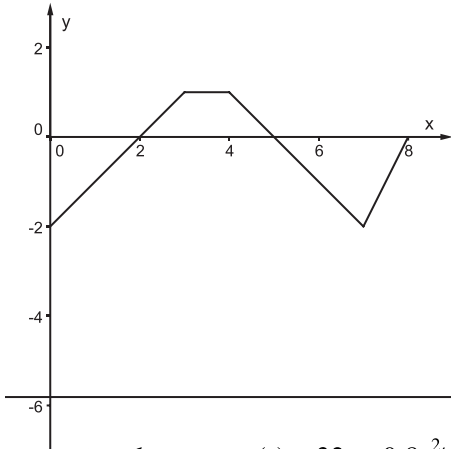
12 خالهکی یان زیدهتر دیارکه کو تیدا لیکهفتی چهماوهیی پهیوهندی $y^2 - x^2 = 4$ ئاسویی بیت.

13 ههموو خالیٚن لسهر بازاننا $x^2 + y^2 = 25$ بههٚمیره دهمی لاری لیکهفتی پهکسانی $\frac{3}{4}$ بیت.

14 وان خالان بههٚمیره کو دواندا لاری چهماوهیی هاوکیشهیا $25x^2 + 16y^2 + 200x - 160y + 400 = 0$ ئاسویی بیت.

1 دریژیا لاکیشیهکی $(3t + 2)$ و پانیا وی $(\sqrt{t+1})$ ، تیکرایي گوهورینا ئه وی لاکیشیهی ل دووف گوهورینا t بههژمیڤه.

2 لولهکهکا بازنهیی یاوهستاو نیقتیرهیی بنکهیی وی $(\sqrt{t+2})$ و بلنداهیا وی $(\sqrt{2t+1})$. تیکرایي گوهورینا قهبارهیی وی لولهکی ل دووف گوهورینا t بههژمیڤه.



3 وینهیی بهرامبر چهماوهیی نهخشهیا $v = f(t)$ دنوینت، کولهزا ئاراستهکری بۆ خالهکا تهوهری x دنوینت.

ا) کهنگی ئه و خاله بهرهف پاش دلقت؟ بهرف پیش دلقت؟ کهنگی

لهزا وی زیده دبیت؟ وکهنگی کیم دبیت؟

ب) کهنگی تاودانا خالهکی موجهب یان سالب یان سفر دبیت؟

ج) کهنگی خال ب پهره لهز خو بریقه دچیت؟

د) کهنگی ئه و خاله ژلقینی رادوستییت؟

4 بهرهک ل سهر پرووی ههقی بهرهف سهری ههلا ب لهزا بنهڤرت 32 m/s نهخشهیا $s(t) = 32t - 0.8t^2$ نمونهیهکه بۆ ههژمارتنا بلنداهیا وی بهری پشتی t چرکه.

ا) لهزا وی بهری وهک نهخشهیهکه پی دهمی t بههژمیڤه، ههروهسا تاودانا وی بهری پی دهمی t بههژمیڤه.

ب) پشتی چند چرکهیان ئه و بهره دگههته بلندترین بلنداهیی (پهره بلنداهیی)؟

ج) بلندترین بلنداهیا ئه و بهره دگههتی چنده؟

د) کهنگی ئه و بهره دگههته بلنداهیا نیقا بلندترین بلنداهیی؟

ه) چند چرکان ئه و بهره ل ئاسمانی دهمینیت؟

ل ههردوو راهیڤنانین 5 و 6 دا، وهسا دانه x و y دوو نهخشهنه پی t و شیانا داتاشراوی ههنه، داخوایی ل دووف پیدایان بههژمیڤه.

پیدایی	داخوایی	پهوهندی لناقبهرا x و y
$\frac{dx}{dt} = 10$	له $x = 8$	$\frac{dy}{dt}$
$\frac{dy}{dt} = -6$	له $x = 1$	$\frac{dx}{dt}$
$\frac{dx}{dt} = -2$	له $x = 1$ له $y = 1$	$2x^2 + 3y^2 = 5$

7 نیقتیرهیی بازنهیهکی 3 cm/s زیده دبیت.

ا) تیکرایي چیهویی بازنهیی بههژمیڤه دهمی $r = 9 \text{ cm}$.

ب) تیکرایي گوهورینا پروبهری بازنی بههژمیڤه دهمی $r = 6 \text{ cm}$.

8 تیکرایي گوهورینا دوریی لناقبهرا خالهکی ل سهر چهماوهیی نهخشهیا $y = x + \cos^2 x$ دلقت و خالا بنهڤرت

بههژمیڤه ههکه بزانی کو $\frac{dx}{dt} = 2 \text{ cm/s}$.

راهینان

وانه

1-4

First Derivative Test

تاقیکرنا داتاشرای ئیکی

ل راهینانا 1 هتا 4، ماوهیین بهرهف زیدهبوونی و بهرهف کیمبوونی دیاریکه.

$f(x) = x^3 - 12x + 1$ 2

$f(x) = 4x + \frac{1}{x}$ 1

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 4

$f(x) = xe^x$ 3

ژ راهینانا 5 هتا 8، فان بههژمیڤه: (أ) بهایین شلوڤه (ب) ماوهیین بهرهف زیدهبوون و کیمبوونی (ج) تاقیکرنا داتاشرای ئیکی بکاربینه بو ههژمارتنا بهایین پهڤر خوجهی (د) چهماوهیی نهخشهیی بو ساخرنا دروستیا بهرسفا خو بکیشه.

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$ 6

$f(x) = x^2 + 4x$ 5

$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$ 8

$f(x) = -4x + \frac{4}{x}$ 7

ژ راهینانا 9 هتا 12، نهوان داخوایین پرسیارین پیشتەر ل ماوهیی $[0, 2\pi]$ بجهینه.

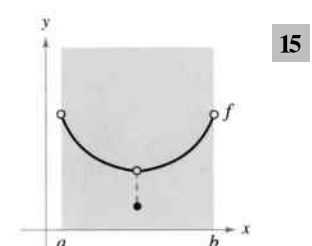
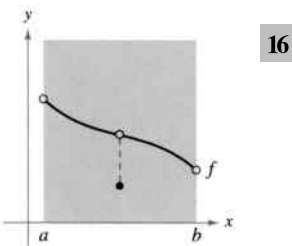
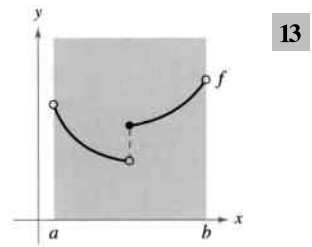
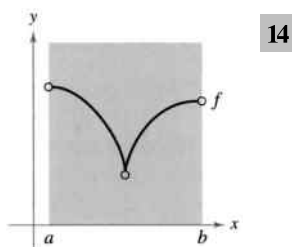
$f(x) = \sin 2x$ 10

$f(x) = \frac{x}{2} - \sin x$ 9

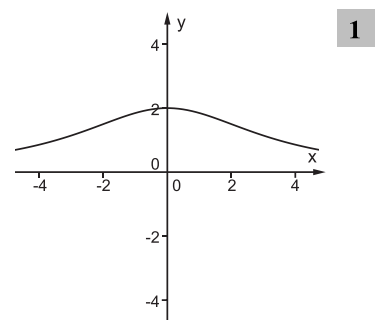
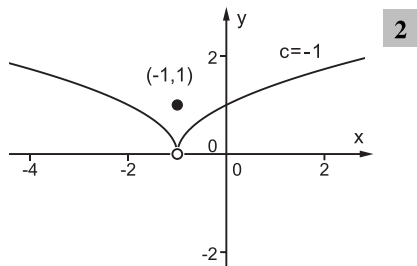
$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}$ 12

$f(x) = x^2 + \cos x$ 11

ژ راهینانا 13 هتا 16، دیاریکه نهڤی نهخشهیی بهایی بچووکتیرین خوجهی ل ماوهیی $[a, b]$ ههیه ل دووڤ چهماوهیی ل نهوی ماوهیی.



ل راهینانا 1 و 2 ، ماوهیین فهکری بههژمیڤه دهمی چهماوهیی نهخشهیی کومدبیت یان ناچجال بیت.



ژ راهینانا 3 هتا 6، خالیڤ ودرگهپانی دیاربکه (ههکه ههبن)، دهقهریڤ کومد و ناچجال ب وینهیی پوونکرڤ نهخشهیه یی بههژمیڤه.

$f(x) = x\sqrt{x+1}$ 4

$f(x) = 2x^4 - 8x + 3$ 3

$f(x) = xe^x$ 6

لهماوهی $[0, 2\pi]$ 5 $f(x) = x - \cos x$

ژ راهینانا 7 هتا 10، پهڤه بهایی دوماهیا خوجهی (مهزنتریڤ و بچووکتیریڤ) بههژمیڤه بکارئینانا داتاشاروی دووی ههکه یادشیاندا بیت.

$f(x) = -\frac{1}{8}(x+2)^2(x-4)^2$ 8

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ 7

$f(x) = 2 \sin x + \cos 2x$ له ماوهی $[0, 2\pi]$ 10

$f(x) = x \ln x$ 9

ل راهینانا 11 و 12، وینهیی پوونکرڤ بو نهخشهیی بکیشه کو مهرجیڤ دیارکریڤ ساخدکته

$f(0) = f(2) = 0$ 12

$f(0) = f(2) = 0$ 11

$f'(x) < 0$ له ماوهی $x < 1$

$f'(x) > 0$ له ماوهی $x < 1$

$f'(1) = 0$

$f'(1) = 0$

$f'(x) > 0$ له ماوهی $x > 1$

$f'(x) < 0$ له ماوهی $x > 1$

$f''(x) > 0$

$f''(x) < 0$

13 نهخشهیا $C(x) = 2x + \frac{320000}{x}$ نمونهیهکه بو ههژمارتنا لیچوویا کریڤ و داگرتنا x یهکهیان ژ بهرهههکی دیارکری. چهڤد یهکهیان ژ x دقیت بکرت و داگرت بهمهرجهکی کیتمترین لیچوون ههبت.

14 نهخشهیا $S = \frac{100t^2}{65+t^2}$ کو $t > 0$ نمونهیهکی دنوینت بو دیارکرننا لهزا چابکههکی لسهرئامیڤی چاپی (ب ژمارا پهیقان د خولهکهکیڤا) بهپیی ژمارهه ههفتهکان t پاش راهینانکرڤ.

ب) ئهڤی لهزا چابکههکی بهردهوام زیدهدبیت دهمی بهایی t زیده بیت؟ پوونبکه.

ا) نیشانانا داتاشاروی ئیکی چیهه دهمی t یی موجهب بیت؟

پراهيئنان

وانه

3-4

Limits at infinity

ئارمانچ ل بیدوماهيی

ژ پراهيئنانا 1 هتا 6، ئارمانجا داخوازکری بههژميړه.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+5}} \quad \mathbf{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+4}} \quad \mathbf{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+1}{2x-3} \quad \mathbf{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos \frac{1}{x}}{x+1} \quad \mathbf{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin 5x}{x} \quad \mathbf{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3x+2 \cos x} \quad \mathbf{4}$$

ژ پراهيئنانا 7 هتا 12، ويښه پوونکری بو نه خسه يه ي بکيشه بکاريئنانا په ره بهايي دوماهيا خوځهي و ئيکو دوو برينان دگهل ههردوو ته ودرين پوتانان و هاوجيپوون و دهرکناران،

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 16} \quad \mathbf{9}$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} \quad \mathbf{8}$$

$$f(x) = \frac{3+x}{2-x} \quad \mathbf{7}$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} \quad \mathbf{12}$$

$$f(x) = 4x + \frac{1}{x} \quad \mathbf{11}$$

$$f(x) = 1 - \frac{4}{x^2} \quad \mathbf{10}$$

13 پاسته هيلهك لاری وی m بيټ و د خالا $(-2, 0)$ را دپوريت.

ا پي m دووری $d(m)$ لناقبره $(2, 4)$ و نهوی پاسته هيلي بههژميړه.

ب $\lim_{x \rightarrow -\infty} d(m)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} d(m)$ بههژميړه.

راھینان

وانه

4-4

وینەکیشتانا وینەیی ڤوونکرئی (چەماوە) بو نەخشەیی Curve Sketching

ژ راھینانا 1 هەتا 6، وینەیی ڤوونکرئی بو نەخشەیی وینەبکە.

3 $f(x) = (x-1)^5$

2 $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$

1 $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

6 $f(x) = x^5 - 5x$

5 $f(x) = |2x-5|$

4 $f(x) = x\sqrt{16-x^2}$

ژ راھینانا 7 هەتا 9، وینەیی ڤوونکرئی بو نەخشەیی وینەبکە.

7 $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$ لە ماوەی $[0, 2\pi]$

8 $f(x) = 2x - \tan x$ لە ماوەی $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$

9 $f(x) = \frac{x}{\tan x}$ لە ماوەی $]0, \frac{\pi}{2}[$

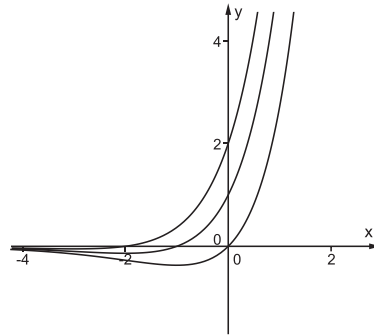
ژ راھینانا 10 هەتا 12، نەخشەبەکی دیاریکە، کو مەرجین پرسیاری ساخبەت.

10 نەخشەبەکە دەرکناری ستوونی $x=1$ و دەرکناری ئاسۆیی $y=3$ هەبە.

11 نەخشەبەکە دەرکناری ستوونی $x=-2$ و دەرکناری لاری $y=-x+1$ هەبە.

12 نەخشەبەکە دەرکناری ستوونی $x=1$ و دەرکناری لاری $y=2x+3$ هەبە.

13 لیسەر ئیک روتەختی ڤۆتانی وینەیی ڤوونکرئی بو نەخشەبەکی f و داتاشراوی وی یی ئیکی f' و داتاشراوی دووی f'' دیاردکەت. وینەیی ڤوونکرئی بو f' و f'' جۆدابکە.



14 $f(x) = \frac{1}{2}(ax)^2 - ax$ کو $a \neq 0$

1 ا لیسەر ئیک روتەختی ڤۆتانی وینەیی ڤوونکرئی بو چوار بەایین جیاوازین a بکیشە.

ب دیاریکە، ئەری گۆھۆرینا بەای a ، ئیکو دوو برینین وینەیی ڤوونکرئی و پەرە بەایی ناچجالی نەخشەیی یان کومدی

نەخشەیی د گۆھۆریت.

راھینان

راهیانان

وانه

5-4

Optimization گهريان ل دووق پهري بهايان (مهزنترين و بچووکترين بهايان)

- 1 دوو ژماره يان دياربکه، کو سرجهمی وان 120 بیت و نهجامی لیکدانا وان مهزنترين بیت.
 - 2 دوو ژماره ييښ مووجهب بههژمیره، کو نیک ژوان هه لگه پراوی یی دی بیت و سرجهمی وان بچووکترين بیت.
 - 3 دوو ژماره ييښ مووجهب بههژمیره، کوسرجهمی دوو جاييښ هه ردوان دبیته 72، و نهجامی لیکدانا وان مهزنترين بیت.
 - 4 دريژی و پانیا لاکيشه يه کی بههژمیره کو رووبه ری وی مهزنترين بیت، ههکه بزانی چيوه یی وی 120m.
- ل هه ردوو راهيانين 5 و 6، خاله کی ل سر چه ماوه یی نه خشه یی دياربکه کو نيژيکترين خال بیت بو خالا ديارکری.

5 $f(x) = x^2$ ؛ $(2, \frac{1}{2})$ 6 $f(x) = \sqrt{x+8}$ ؛ $(2, 0)$

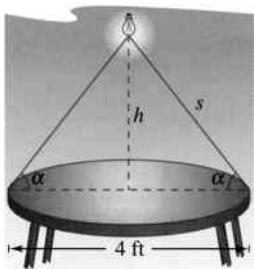
7 بچووکترين رووبه ر: سرجهمی چيوه یی سيگوشه يه کا پیک (لايه کسان) و چوارگوشه يه کی 10m، دريژيا هه رنيک ژ لايی سيگوشه يی و لايی چوارگوشه يی بههژمیره کو سرجهمی هه ردوو رووبه ريښ وان بچووکترين بیت.

8 مهزنترين رووبه ر: دريژی و پانیا مهزنترين لاکيشه يه کی بههژمیره، کو د ناف نيڤ بازنيدا بيته وينه کرن، ههکه نيڤ تيره یی بازنی ۲ بیت.

9 تيله کا كانزايی دريژيا وی 30 m و دقین دوو شيويه يان پی وی تیلی دروستبکه ن، دقیت چهند ژ وی تیلی بو هه رشيويه کی بيته بكارئينان؟ ههکه بزانی کو رووبه ری گشتی یی وی تیلی ده و رودايی مهزنترين بیت، فان بارين ل خواری روونبکه ههکه هه ردوو شيوه.

ا سيگوشه يه کا پیک و چوارگوشه يه ک يت.

ب چوارگوشه و بازنه بن.



10 پووناهايا، گلوپه کی دکه فيته سر ميزه يه کی بازنه يی کو نيقتيره یی وی 4 پيهه. تيشکی I کو ژ رووناهايه کی دهر دکه فیت ب ياسايا $I = \frac{k \sin \alpha}{s^2}$ ده يته هژمارتن کو k بهايه کی نه گوره و s دريژيا تيشکيه ژ زيده ری رووناهايی هه تا لايه کی ميزه یی، و α هه گوشه يه کو تيشک ل گه ل ناستی ميزه یی پیکد نينت. بهای h بههژمیره کو وه سا هه تيشکه مهزنترين بیت.

ل راهینانین 1 و 2 ، دروستیا تمامکاریی ساخبکه بکارئینانا داتاشراوی.

$$\int \frac{x dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2(x^2+1)} + c \quad 1$$

$$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + c \quad 2$$

3 نهخشهیا $f(x)$ بههژمیڤه ههکه بزانی کو $f'(x) = 2 - 3x^2$ و چهماویی نهخشهیا f د خالا $(-1, 3)$ را دپۆریت.

ژ راهینانا 4 ههتا 10، تهمامکارییا بیسنور بههژمیڤه:

$$\int (2x^3 - 3 \sin x) dx \quad 4$$

$$\int (2\sqrt{x} - 1)^2 dx \quad 5$$

$$\int \frac{2-3\cos x}{4} dx \quad 6$$

$$\int \frac{dx}{3x\sqrt{x}} \quad 7$$

$$\int \frac{4x^4 - 1}{x^2} dx \quad 8$$

$$\int (x-2)(x+2)(x^2+4) dx \quad 9$$

$$\int \frac{(2x-1)^2}{2\sqrt{x}} dx \quad 10$$

11 وینهیی بهرامبهر چهماوهیی داتاشراوی نهخشهیی $f(x)$ دیاردکهت،

ئوی وینهیی بکاربینه بو بهرسفدانا. فان پرسیارین ل خوارئ

ههکه $f(1) = 0$.

ا لاری نهخشهیا f له خالی $x = 0$ بههژمیڤه.

ب هاوکیشهیا لیکهفتی چهماوهیی نهخشهیا f له $x = 1$ بههژمیڤه.

ج بهراوردیی بکه لنافهرا $f(0)$ و $f(1)$ و $f(2)$.

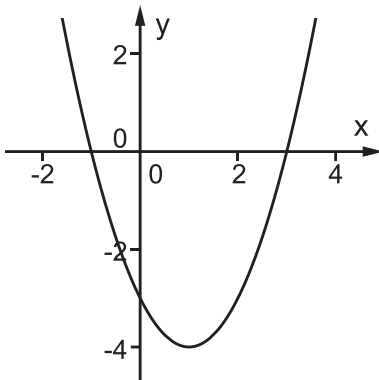
د ههکه $f'(x) = x^2 - 2x - 3$ هاوکیشهیا f' بیت، $f(x)$ پی x

بههژمیڤه.

12 ترومبیلهک ب تاودانهکا نهگۆڤ بری وی 3 m/s^2 بریکهفت بو برینا دورییا 150 m .

ا بو برینا ئوی دوری ترومبیلی چهند دهم دقیت؟

ب لهزا وی ل دهمی گهشتنی دبیته چهند؟



راهینان

وانه

Definite Integral

تہامکارییا سنووردار

2-5

ژ راهینانا 1 هتا 4، تمامکارییا سنووردار بهژمیره.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x + 3\cos x) dx \quad \mathbf{2}$$

$$\int_0^1 (x-2)(x+1) dx \quad \mathbf{1}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} (1 + |\sin x|) dx \quad \mathbf{4}$$

$$\int_1^4 \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} dx \quad \mathbf{3}$$

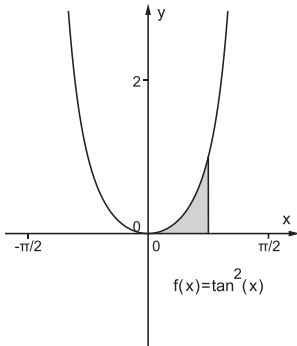
ل هردوو راهینانین 5 و 6، وینهیی وی دهقهری دیاریکه کو رووبهری وی دبیتہ تمامکارییا سنووردار، پاشی بهایی نهوی تمامکارییا بهژمیره بکارئینانا یاسایین هژمارتنا رووبهری ل نهاندازی.

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx \quad \mathbf{6}$$

$$\int_{-2}^2 (1+|x|) dx \quad \mathbf{5}$$

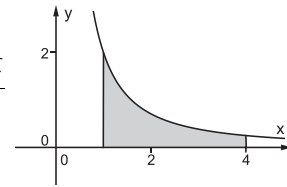
ل هردوو راهینانین 7 و 8، دهقرا سیبهرکری بهژمیره.

$$f(x) = \tan^2 x$$



8

$$f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{x^2}$$



7

9 هکه $\int_1^5 f(x) dx = 3$ و $\int_1^3 f(x) dx = 5$ بهایین نهقین ل خوارئ بهژمیره.

$$\int_3^5 (x + 2f(x)) dx \quad \mathbf{ب}$$

$$\int_1^3 \frac{x^2 f(x) - 1}{x^2} dx \quad \mathbf{ا}$$

10 رووبهری دهقرا سنوورداری ب چهماوهیی نهخشهیا $f(x) = \frac{1}{x^2} + 2\sqrt{x}$ و تهوهری x و هردوو راستههیلین $x=1$ و $x=4$ بهژمیره.

11 بهایی نافهند بو نهخشهیا $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ ل ماوهیی $[1, 4]$ بهژمیره.

12 نهخشهیا $M(x) = 3x^2 - 36x + 105$ لیچوویا پهراویزی ب هزاران دیناران بو بهرهمئینانا x یهکهیان بو بهرهمهکی دنوینت $(0 \leq x \leq 8)$.

ا نهوی نهخشهیی بهژمیره کو لیچوویا گشتی $C(x)$ دنوینت، هکه بزانی کو لیچوویا نهگور دبیتہ 56000 دینار.

ب لیچوویا گشتی بو بهرهمئینانا 6 یهکهیان بهژمیره

ژ راھینانا 1 هەتا 4، تەمامکارییا داخوێزکری بەهەژمێرە.

$$\int_0^{\pi} x \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx \quad \mathbf{2} \qquad \int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx \quad \mathbf{1}$$

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx \quad \mathbf{4} \qquad \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3e}{2}} \ln\left(\frac{2x}{3}\right) dx \quad \mathbf{3}$$

5 $\int \ln x dx$ تەمامکارییا پرتپرتکرنی (بەشەشکرنی) بکارینە.

6 $f(x) = \ln^2 x$ بێنەدەر هەکە چەماوھیی وئ د خالا (1, 1) را دببۆریت.

7 تەمامکارییا $\int x\sqrt{x+3} dx$ بەهەژمێرە بکارینانا:

8 ل جھئ $u = x + 3$ دانە.

9 تەواوکاریی ب پرتپرتکرنی دگەل $dv = \sqrt{x+3}$

10 ل هەردوو راھینانین 7 و 8، بکارینانا تەمامکارییا ب پرتپرتکرنی زیدەتر ژ جارەکی تەمامکارییا داخوێزکری بەهەژمێرە.

$$\int \frac{x^2}{e^x} dx \quad \mathbf{7}$$

$$\int e^{-x} \cos 2x dx \quad \mathbf{8}$$

11 ل هەردوو راھینانین 9 و 10، رووبەری سنووردراوی ب چەماوھیی $f(x)$ و تەوہری x و هەردوو راستەھیلین $x = a$ و $x = b$ بەهەژمێرە.

$$. b = 1, a = 0, f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} \quad \mathbf{9}$$

$$. b = \ln 2, a = 0, f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \quad \mathbf{10}$$

11 تەمامکارییا $\int e^{\sqrt{x}} dx$ بێنەدەر.

$$I_0 = \int_0^1 e^{1-x} dx \quad I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \quad \mathbf{12}$$

13 I_n بەهەژمێرە هەکە $n = 0$ و $n = 1$.

14 تەمامکاریی ب پرتپرتکرنی بکارینە بۆ سەلماندن $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$.

15 بەھایی I_3 دەرئەنجام بکە.

پرايئنان

وانه

4-5

Applications of Integral

بجهئنانين ته مامكاريي

ژ پرايئنانا 1 هتا 4، پووبهري وي دهقهي بههژميږه كو ب نهخشهيا $f(x)$ و تهوهري x و ههردوو راستههيليڻ و $x=b$ سنوورداييه.

3 $b = \frac{\pi}{2}, a = 0, f(x) = x \cos 2x$

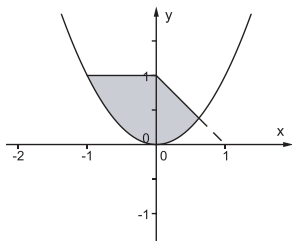
1 $b = 3, a = 0, f(x) = x^3 - 3x^2$

4 $b = \ln 2, a = -\ln 2, f(x) = e^x - e^{-x}$

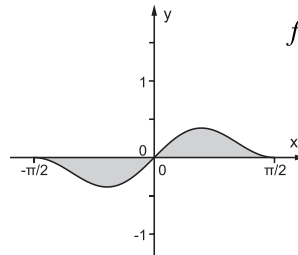
2 $b = e, a = \frac{1}{e}, f(x) = \frac{\ln x}{x}$

5 ته مامكاريي بكاربينه بۆ ههژمارتنا پووبهري بازنهكي، ههكه چهقي وي $(0, 0)$ بيت و دخالا $(4, 3)$ را ببوريت.

ل ههردوو پرايئنانا 6 و 7، پووبهري دهقرا سيبهركري بههژميږه.



7 $f(x) = x^2$



6 $f(x) = \sin x \cos^2 x$

8 $f(x) = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$

ا ته و اوكاري ب پرتيرتكرني بكاربينه بۆ ههژماركرتنا پووبهري دهقرا سنوورداي ب چهماوهيي نهخشهيا $f(x)$ و تهوهري x و ههردوو راستههيلان $x=1$ و $x=e$.

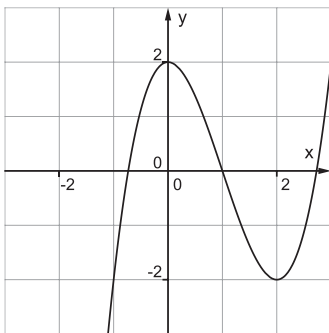
ب قهباري نهوي تهني پهيادبيت ژ نهجمي دهوردانا دهقرا سنووردايي ل (لعي أ) ل دور تهوهري x بههژميږه.

ل پرايئنانين 9 و 10، قهباري وي تهني پهيادبيت ژ نهجمي دهوردانا دهقره سنووردايي ب چهماوهيي ل دور تهوهري x بههژميږه.

10 $x = 2, y = 1, f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

9 $x = \ln 2, y = 0, f(x) = e^{2x} - e^{-x}$

ل پرايئنانين 11 و 12، خالين ئيكو دوو برينين ههردوو نهخشهيان بههژميږه، پاشي وي پووبهري ب وان سنووردايي بههژميږه.



11 $g(x) = x - 1, f(x) = xe^{-x} - e^{-x}$

12 $g(x) = x^2, f(x) = x^4 - 2x^2$

13 ويئنهيي بهرامبهر چهماوهيي نهخشهيا بنهپهت $f(x)$ دياردكهت.

ا $\int_{-1}^3 f(x) dx$ بههژميږه.

ب ئهري نهخشهيا $f(x)$ ل ماوهيي $3, 2$ يا موجهبه يان سالبه؟

ج پووبهري دهقرا سنووردايي ب چهماوهيي نهخشهيا $f(x)$ ، و تهوهري x و ههردوو راستههيلان $x=0$ و $x=3$ بههژميږه.

راھینان

وانه

1-6

Conic Sections

برگهییڻ قووچهکی

ل هەردوو راھینانیڻ 1 و 2، تیشکو و سەر و دەلیل و تەوهری برگهییڻ ھاوتا بینەدەر، پاشی وینەیی برگهییڻ ھاوتا درووتەختی پۆتانیدا بکێشە.

1 $x = -2y^2$ 2 $x^2 + 6x - 8y + 9 = 0$

ل هەردوو راھینانان 3 و 4، ھاوکێشەیا برگهییڻ ھاوتا بەهەژمێرە.

3 سەر $(0, -1)$ ، تیشکو $(0, -2)$ 4 سەر $(-3, 1)$ ، دەلیل $x = -6$

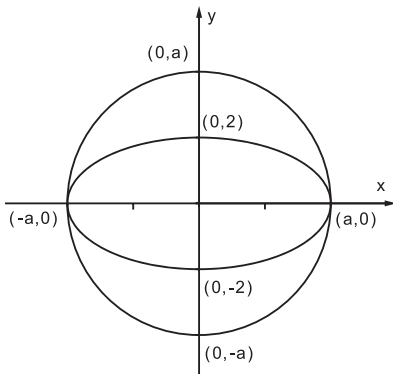
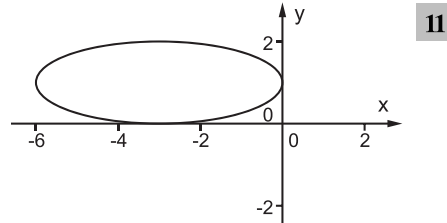
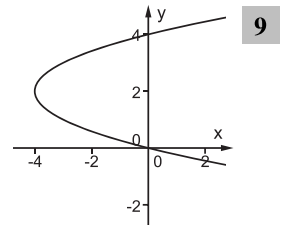
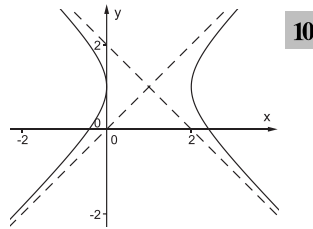
ل هەردوو راھینانان 5 و 6 چەق و هەردوو تیشکو و تەوهری مەزن و بچووک بۆ برگهییڻ نەتەمام بەهەژمێرە، پاشی وینەیی برگهییڻ بەهەژمێرە.

5 $x^2 + 9y^2 = 1$ 6 $9x^2 + 4y^2 - 18x + 8y - 23 = 0$

ل راھینانان 7 و 8 چەق و هەردوو تیشکو و تەوهری مەزن و تەوهری بچووک بۆ برگهییڻ زیدە بەهەژمێرە، پاشی وینەیی برگهییڻ بەهەژمێرە.

7 $4x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 8 $y^2 - 4x^2 + 2y - 8x - 7 = 0$

ل هەردوو راھینانیڻ 9 و 11، ھاوکێشەیا برگهییڻ قووچهکی بەهەژمێرە.



12 ھاوکێشەیا برگهییڻ نەتەمام ئەوی ل وینەیی بەرامبەر دیار بەهەژمێرە، هەکە بزانی کو پروبەری وی دبیتە نیف پروبەری بازنەیا ل وینەیی دیاربووی.

13 د پرووتەختی پۆتانیدا، چەماوەیی ھاوکێشەیا $x^2 + 4y|y| - 16 = 0$ بکێشە.

14 ھاوکێشەیا وی برگهییڻ زیدە بەهەژمێرە کو سەرین وی دبە $(1, 0)$ و $(-1, 0)$ و دەرکنارین وی دبە $y = -3x$ و $y = 3x$

15 ھاوکێشەیا وی برگهییڻ زیدە بەهەژمێرە هەکە چەقی وی $(0, 0)$ بیت و خالەکا سەرین وی $(0, 2)$ بیت و تیشکوێهکی وی خالا $(0, 4)$ بیت.

- 1 جياوازيا چهقي بؤ برگهئي نه تمام $4x^2 + 3y^2 = 12$ ل گهل هردوو تيشكويان و هردوو دهليان بههژميړه.
 - 2 هاوكيشهيا برگهئي نه تمام بههژميړه هكه چهقي وي $(2, 1)$ و تيشكويهكاكي وي $(4, 1)$ و دهليليوي $x = 6$ بن.
 - 3 هاوكيشهيا برگهئي نه تمام بههژميړه هكه چهقي وي $(0, 0)$ و تيشكويهكاكي وي $(2, 0)$ و سرهكي وي $(3, 0)$ بن.
 - 4 پوتانين سرين برگهئي نه تمام بههژميړه، هكه جياوازيا چهقي $\frac{2}{3}$ بو هردوو تيشكويين وي $(0, \pm 3)$ بن.
 - 5 جياوازيا چهقي بؤ برگهئي زيده $x^2 - 9y^2 + 1 = 0$ دگل هردوو تيشكويان و بهلگهيهكي وي بههژميړه.
- ل دهردوو راهينانين 6 و 7 دا، هاوكيشهيا برگهئي زيده بههژميړه ب زانينا پيكهاتين دياركري.
- 6 جياوازي چهقي: 2، هردوو سر $(\pm 2, 0)$
 - 7 جياوازيا چهقي: 3، هردوو تيشكؤ $(0, 4)$ $(0, 0)$
 - 8 جياوازيا چهقي بؤ برگهئي زيده $x^2 - y^2 = a^2$ كو $(a \neq 0)$ بههژميړه، وهردوو تيشكويان و دهليل و دهركناران بههژميړه.
 - 9 جياوازيا چهقي بؤ برگهئي زيده بههژميړه هكه هردوو سر $(\pm 2, 0)$ بن و دخالا $(3, \frac{5}{2})$ راببوريت.
 - 10 جياوازيا چهقي بؤ برگهيهكي نه تمام بههژميړه كوژ كومولا هموو وان خالان پيكدهيت دروتهختيدا، كو سرجهمي هردوو دوورين هر خالهكي ژ هردوو خالا $(1, 0)$ $(4, 0)$ بهايهكي نهگوره و دبته 6.
 - 11 جياوازيا چهقي بؤ خولگهئي هه سارا ميريخ دبته 0.09 بنزيكي. ريژا دريژيا وي خولگهئي بؤ پانيدا وي بههژميړه.
 - 12 روونكه كو هاوكيشهيا برگهئي نه تمام ل سر نهئي شيوهئي دهپته نفيسين:
- $$e \text{ دبته جياوازيا چهقي بؤ برگهئي نه تمام. } \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2(1-e^2)} = 1$$
- 13 راهينانا پيشتر بكاربينه دا روونكهئي كو ئارمانجا برگهئي نه تمام دبته بازنه، دهئي e نيزيك دبته بؤ 0.

راھینان

وانه

3-6

Quadratic Equations in 2 Variables ھاوکیڭشەییڭ دووجایی ب دوو گۆراون

ژ راھینانا 1 هەتا 4، تاقیکرنا جۆداکەری بکاربینە بۆ دیارکرنا جۆری وی چەماوەیی کو ھاوکیڭشە یی دنوینت.

$$4x^2 + y^2 - 4xy - 4x - 10 = 0 \quad 2 \quad x^2 + xy + y^2 + x + y + 1 = 0 \quad 1$$

$$x^2 - 3xy - 4y^2 = 0 \quad 4 \quad x^2 - 4xy + 4y^2 + 4 - 3 = 0 \quad 3$$

ژ راھینانا 5 هەتا 8، هەردوو تەوهرین پۆتانی دەوربەرە دا ژ رادەیی ئیکودوو برینی رزگاربت، پاشی جۆری نواندا چەماوەیی وی ھاوکیڭشەیی دیارکە.

$$x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 + 4 = 0 \quad 6 \quad 2x^2 + xy + 2y^2 - 15 = 0 \quad 5$$

$$xy + y + 1 = x \quad 8 \quad x^2 - 3xy + y^2 = 5 \quad 7$$

9 ساین و کۆساینا ئەوی گۆشەیا هەردوو تەوهرین پۆتانی پی ھاتینە دەوردان بەهژمیرە دا ژ رادیی ئیکودوو برینا ھاوکیڭشەیا $4x^2 - 4xy + y^2 - 8\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y = 0$ رزگاربت (بیی بکارئینانا دەوردانی).

10 کارتیکرنا دەوردانا هەردوو تەوهرین پۆتانی ب 90° ل دۆر خالا بنەرەت ل ھاوکیڭشەیا هەر برگەیهکی قووجەکی چییە؟ ھاوکیڭشەیا ئەوی برگەیی قووجەکی ل رووتەختی پۆتان یی نوی بەهژمیرە.

$$\boxed{ا} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1: \text{برگەیی نەتەمام}$$

$$\boxed{ب} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1: \text{برگەیی زیدە}$$

$$\boxed{ج} \quad y^2 = 4px: \text{برگەیی ھاوتا}$$

11 جیاوازی چەقی بۆ برگەیی زیاد $xy = 4$ بەهژمیرە.

12 ب فەرامۆشکرنا بارەییڭ ژلادانی برنی، بەایڭن ژمارەیا راستی m بەهژمیرە. کو وەسال ھاوکیڭشەیا $x^2 + mxy + my^2 - y - 1 = 0$ دیکەت ببیتە:

$$\boxed{ا} \quad \text{برگەیی نەتەمام.}$$

$$\boxed{ب} \quad \text{برگەیی زیدە.}$$

$$\boxed{ج} \quad \text{برگەیی ھاوتا.}$$

13 $xy - x^2 - x - 1 = 0$ جۆری وی چەماوەیی ھاوکیڭشەیا دنوینت چییە؟

$\boxed{ب}$ بۆ وینەکرنا چەماوەیی وی ھاوکیڭشەیی، نەخشە یڭن ریزەیی بکاربینە.

راهیانان

وانه

1-7

Various Forms of a Complex Number

شیوه یین جودا بو ژمارهیا ئاویتته

1 فان ژماره یین ل خورای ل سهر شیوه یی جهری بنقیسه.

(1-2i)³ [ا] $\frac{(2-i)(2+i)}{1+i}$ [ب] $1+i+i^2+i^3+\dots+i^{20}$ [ج]

2 فان ژماره یین ئاویتته ل خورای ل سهر شیوه یی سیگوشه یی و جه مسهری بنقیسه

$z_1 = -1+i\sqrt{3}$ [ا] $z_2 = \sqrt{6}-i\sqrt{2}$ [ب] $z_3 = \bar{z}_1 \times z_2^3$ [ج]

ج

3 شیوه یی جه مسهری بو ژمارهیا ئاویتته Z ئه فهیه $z = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$.

[ا] شیوه یی جه مسهری بو ههرئیک ژ فان ژماره یین ئاویتته یا بنقیسه $z_1 = \frac{1}{\bar{z}^2}$ و $z_2 = z + iz$.

[ب] بهایی ههرئیک ژ ئه فان $|iz^2|$ و $|\frac{1+2i}{i\bar{z}}|$ بهه ژمیره.

[ج] بهایی ههرئیک ژ $\arg(-5z)$ و $\arg(\frac{-2i}{\bar{z}^5})$ بهه ژمیره.

[د] بهایی ژمارهیا سرووشتی n بهه ژمیره z^n ژماره یه کا راستی نه یا سالب نه بیت.

4 شیوه یی جه مسهری بو ژمارهیا ئاویتته ی $z = \sin(2\theta) - i\cos(2\theta)$ بنقیسه.

5 [ا] ل سهر شیوه یی جهری ژمارهیا ئاویتته z^2 بنقیسه هه که $z = (1+\sqrt{3}) + i(1-\sqrt{3})$

[ب] بهایی روتی ژمارهیا ئاویتته Z و گو شه یا جه مسهری بهه ژمیره.

[ج] به های ریک بو $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$ بهه ژمیره.

6 بیسه لمینه کو $|\frac{iz+1}{z+i}| = 1$ ده می $z \neq i$.

7 M و N و P سی خالین جیاوازن $z_M = 2e^{i\theta}$, $z_N = \bar{z}_M$, $z_P = 2e^{3i\theta}$ بسه لمینه کو $MN = MP$.

8 شیوه یی جه مسهری بو فان ژماره یین ئاویتته بنقیسه

$z = \left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{20}$ [ب] $z = \left(\frac{i}{\sqrt{3}-i}\right)^{12}$ [ا]

9 شیوه یی جه مسهری بو قی ژماره یی $z = \left(\sin \frac{\theta}{2} + i\cos \frac{\theta}{2}\right)^{10}$ بنقیسه.

10 [ا] ل سهر شیوه یی جه مسهری، ره گین 1 ل په یا 5 بنقیسه.

[ب] سه رجه می ئه وان ره گان چه نده؟

11 ل سهر شیوه یی جهری، ژمارهیا ئاویتته Z کو فان هه ردوو مه رجان ساخدکته بنقیسه: $|z-1| = \sqrt{5}$ $\arg(z) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

12 بیسه لمینه کو $(1+i\sqrt{3})^n + (1-i\sqrt{3})^n = 2^{n+1} \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

ژ راهینانا 1 تا 4، ژمارهیا ئاویتته بۆ شیوهیی خالا m ب جهگوهورکا دیارکری بنقیسه.

1 $M(3, 4)$ ، پراکیشانا ئاراستهبرهکی $\vec{u}(-2, 1)$ 2 $M(1, 2 - \sqrt{3})$ وینهدانهوه ل دوری تهوهری x .

3 $M(\sqrt{2}, -1)$ ، ب هاوریژهیهکا ئەندازهی چهقی وی خالا بنهرت و ریژهیا وی $\sqrt{2}$.

4 $M(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ، دهوردان ل دورخالا بنهرت ب گوشهیا $\frac{\pi}{6}$.

5 M خالا ژمارهیا ئاویتته (z) دهمی $z \neq \pm 1$ و $z \neq \pm i$. کومهلا خالین M بههژمیره دا ههردوو راستههیل PQ و PR ستوون بن، ههکه بزانی کوا $z_P = 1$ ، $z_Q = z^2$ ، $z_R = z^4$.

6 A, B, P, D چار خال ل سهرووتهختی پوتانی، دهمی $z_A = 2$ ، $z_B = i$ ، $z_C = 3i$ ، $z_D = \frac{18}{5} + \frac{6}{5}i$.

ا) بسهلمینه کو $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_D}\right) = 2k\pi$ دهبراهی ههردوو راستههیلین AB و CD چ دههئانجام دکهی؟

ب) $|z_B - z_C|$ و $|z_A - z_D|$ بههژمیره.

ج) جورئ چوار لایی $ADCB$ چیه؟

7 بسهلمینه کوسیگوشهیا PQR سیگوشهیهکا ریکه، دهمی $z_P = -2$ ، $z_Q = 1 + i\sqrt{3}$ ، $z_R = 1 - i\sqrt{3}$.